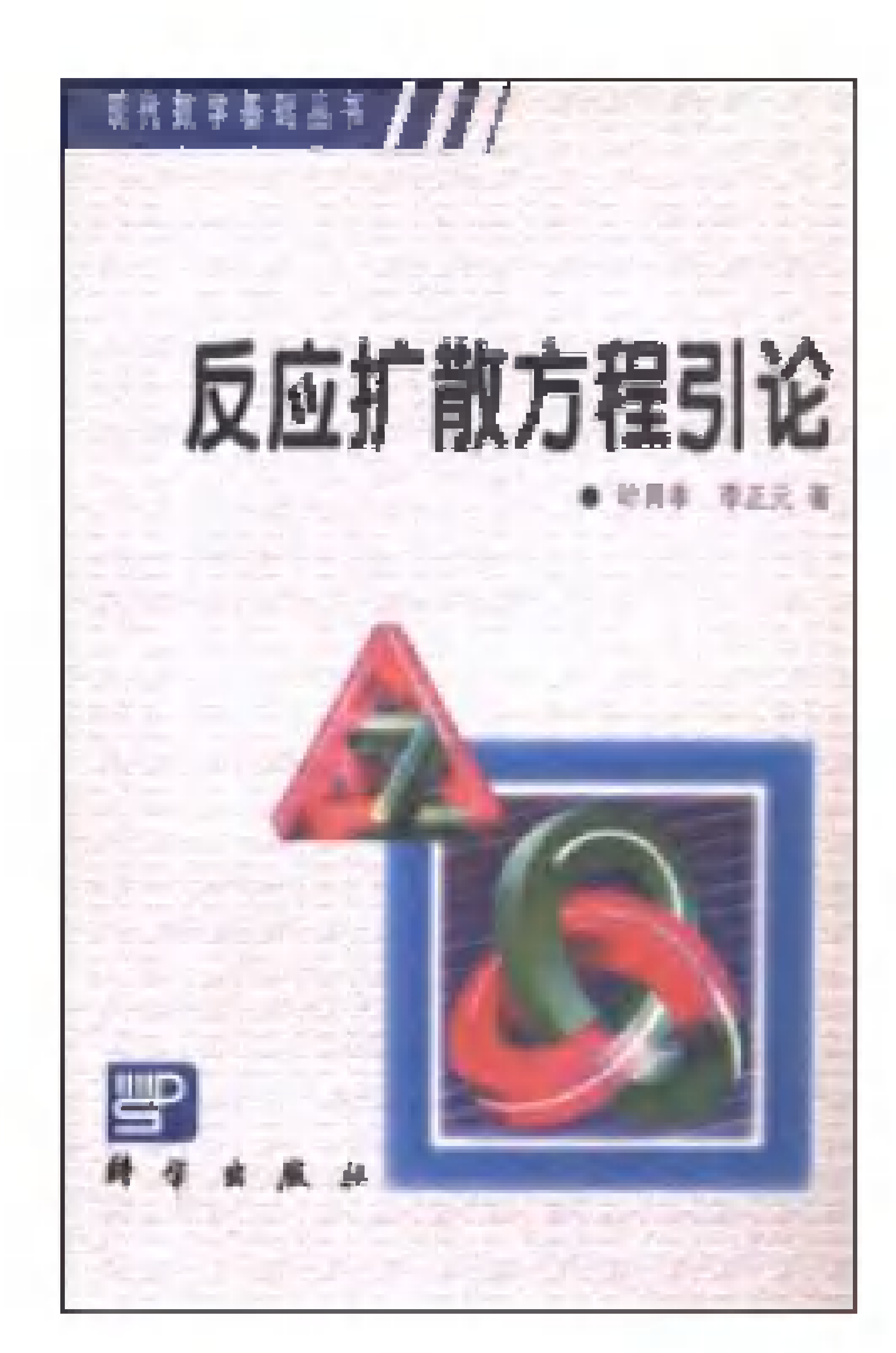

现代数学基础丛书
反应扩散方程引论
科学出版社

现代数学基础丛书

反应扩散方程引论

叶其孝　李正元 著

科 学 出 版 社

1 9 9 9

内 容 简 介

在物理学、化学、生物学、经济学及各种工程问题中提出的大量的反应扩散问题，近 20 年来，日益受到人们的重视. 本书详细阐述与这些问题有关的数学理论、方法及其应用. 本书论证严谨，深入浅出，有一定的自封性，能把读者较快地带到反应扩散方程的各种问题的研究中去. 每章末附有大量习题，有助于读者深入理解本书的内容.

读者对象为理工科大学数学系、应用数学系和其他有关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者.

现代数学基础丛书

反应扩散方程引论

叶其孝　李正元 著

责任编辑 吕 虹

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新 蕾 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1990 年 2 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1999 年 6 月第三次印刷　　印张：15 7/8

印数：2 513－4 518　　字数：410 000

ISBN 7-03-001500-2/O・306

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　言

本书是根据作者 1982 年以来在北京大学、郑州大学、武汉大学和山西大学等单位讲课的讲稿整理而成的．它具有一定的自封性，能把读者较快地带到反应扩散方程的各种问题的研究中去．

现代科学技术的发展在很大程度上依赖于物理学、化学和生物学的成就和进展，而这些学科自身的精确化又是它们取得进展的重要保证．学科的精确化往往是通过建立数学模型来实现的，而大量的数学模型可归纳为所谓的反应扩散方程．

近二十多年来反应扩散方程的研究日益受到重视．这是因为反应扩散方程涉及的大量问题来自物理学、化学和生物学中众多的数学模型，因而有强烈的实际背景；另一方面，在反应扩散方程的研究中，对数学也提出了许多挑战性的问题，因此正引起愈来愈多的数学家、物理学家、化学家、生物学家和工程师的注意．

1. 反应扩散方程及其基本问题．

通常在数学上把以下半线性抛物型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x, u)\Delta u + f(x, u, \operatorname{grad} u)$$

$$((x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+) \tag{1}$$

称为反应扩散方程组，其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$，$n, m \geqslant 1$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$u = (u_1, \cdots, u_m)$，$\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)$，

$\operatorname{grad} u = (\operatorname{grad} u_1, \cdots, \operatorname{grad} u_m)$，　　$\operatorname{grad} u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right)$

$(i = 1, 2, \cdots, m)$，$D(x, u) = (d_{ij}(x, u))$ $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$．根据不同的问题可以研究初值问题，即 $\Omega = \mathbf{R}^n$，满足初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{2}$$

也可以研究各种边值问题，即 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 有界，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，满足边界条件

$$u = g(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^+ \text{ (Dirichlet 条件)} \tag{3}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, t), (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^+ \text{ (Neumann 条件)} \tag{4}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = g(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^+ \text{ (Robin 条件)} \tag{5}$$

(1) 的与时间 t 无关的解满足

$$-D(x, u)\Delta u = f(x, u, \operatorname{grad} u) \quad (x \in \Omega) \tag{6}$$

我们把定常问题 (6)，(3) 或 (6)，(4) 或 (6)，(5) (其中 $g(x, t) \equiv g(x) = \lim\limits_{t\to\infty} g(x, t)$) 的解称为 (1)，(3) (或 (4) 或 (5))，(2) 问题的平衡解或定态解.(1)的空间均匀的解满足常微分方程组

$$\frac{du}{dt} = \bar{f}(u) \quad (f(x, u, \nabla u) \equiv \bar{f}(u)) \tag{7}$$

$$u(0) = u_0 \tag{8}$$

还可以研究(1)的行波解 $u(x, t) = u(x - ct)$ (设 $n = 1$).

由于(6)，(7)是(1)的特殊形式，我们也把(1)，(6)，(7)的耦合组称为反应扩散方程组.

(1)中的 D 和 f 也可以依赖于 t，$D(x, u)\Delta u$ 也可以替换为非线性抛物算子，边界条件也可以是非线性的，f 也可以是一个泛函，等等.

反应扩散方程研究中的基本问题是：

(i) (1) 的行波解的存在唯一性及稳定性；

(ii) (1) 的初值问题、初边值问题的整体解(包括周期解和概周期解)的存在唯一性及渐近性；

(iii) 平衡解的存在性，尤其是当问题依赖于某些参数时平衡解的分叉结构，以及平衡解的稳定性问题；

(iv) 当解没有整体解时解在有限时间内的"爆炸"(blow up)问题,以及解的其它性质,例如,"熄灭区"(dead region) 问题;

(v) 计算方法问题: 解决 (i)—(iv) 中各种问题的计算问题有一些困难,需要发展一些新的行之有效的计算方法.

2. 物理学、化学和生物学中提出的反应扩散方程例举.

正因为(1),(6),(7)的耦合组在很大程度上反映了"扩散"和"反应"的相互作用,也反映了分量 u_i 之间的相互作用,因而为许多实际问题的数学模型的建立提供了条件. 为说明反应扩散方程的各种实际背景,我们在这里仅列举若干例子. 为简单起见只写出方程. 如不特别指出参考文献,请参看 [Ye].

A. 半导体方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n}{\partial t}=\operatorname{div} q\mu_n(\alpha_n\operatorname{grad} n-n\operatorname{grad} V)-R_n(n,p)\\ \dfrac{\partial p}{\partial t}=\operatorname{div} q\mu_p(\alpha_p\operatorname{grad} p+p\operatorname{grad} V)-R_p(n,p)\\ \Delta V=-q(p-n+D)\end{cases}\tag{9}$$

其中 D, q, μ_n, μ_p, α_n, α_p 是正常数, R_n, R_p 是给定的函数.

B. 燃烧方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial t}=K_1\Delta T+Qn\exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right)\\ \dfrac{\partial n}{\partial t}=K_2\Delta n-n\exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right)\end{cases}\tag{10}$$

C. Belousov-Zhabotinskii 反应的 Noyes-Field 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lrv+u(1-u-rv)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=Mv-buv+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{cases}\tag{11}$$

Brusslator 方程(见 [Ro])

$$\begin{cases}u_t=a\Delta u+A-(B+1)u+u^2v\\ v_t=b\Delta v+Bu-u^2v\end{cases}\tag{12}$$

D. 神经传导的 Hodgkin-Huxley 方程

$$u_t = u_{xx} + l(u, w_1, w_2, \cdots, w_k)$$

$$w_{it} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}(u) w_j + q_i(u) \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, k)$$

E. 酶的数学模型

$$\begin{aligned} s_t &= \Delta s - R(s, a) + (s_0 - s) \\ a_t &= \beta \Delta a + [R(s, a) - d(a_0 - a)] \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$R(s, a) = \frac{\rho a s}{1 + |s| + k s^2}$$

F. 生态方程(群体增长,传染病,病虫害等)

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + uM(u, v) \\ &\quad + \int_0^t F(u(x, s), v(x, s)) ds \\ v_t &= \Delta v + vN(u, v) \\ &\quad + \int_0^t G(u(x, s), v(x, s)) ds \end{aligned} \tag{15}$$

其它方程,如渗流方程、超导方程、液晶方程、反应器动力学方程;各种生物现象中提出的众多数学模型;医学提出的各种方程;传热中以及污染问题中出现的对流扩散方程等,在此不一一列举了.其中许多方程组比(9)—(15)更为复杂.

3. 本书内容的安排.

反应扩散方程的研究涉及面很广,就一本书而言是不可能面面俱到的.根据我们的教学和研究工作的经验,我们认为抓住主要的问题和基本的方法是入门的关键,掌握住这一点,在阅读进一步的文献和做研究工作时都会获益匪浅.本书各章的内容就是尽可能按这种思想来安排的.

由于在反应扩散方程的研究中用到的研究方法,许多是常微分方程理论中的方法,或是受启发于这种方法,或是常微方法和偏微方法的结合,因此我们把可能要用到的有关常微分方程的知识集中罗列在第一章中(大多数没有证明),以保持本书在某种意义

下的自封性.

第二章主要讨论单个方程的行波解的存在唯一性，所用的方法是相平面方法(这是一个标准的一般性的方法). 我们既讨论了单调有界非常数行波解(即波前解)的存在唯一性，也讨论了非单调(甚至振动行波解)的存在性. 由于篇幅有限，关于方程组的行波解的讨论只好在本章末的评注中简要地加以叙述，并且我们只叙述有关的方法和结果并尽可能列出最新进展的有关文献. 关于行波解的稳定性这一重要问题我们也只在评注中加以简要叙述.

上、下解方法(或称单调方法)，在研究一些具体的反应扩散方程整体解及平衡解的存在性，以及平衡解的稳定性时，是一个很有效的方法. 第三章给出了单个方程的上、下解方法的有关理论的完整叙述，并给出了它的一些应用. 在本章中还罗列了本书中将用到的最大值原理，椭圆型及抛物型方程的先验估计及有关的存在唯一性定理. 本章还给出了以后要经常用到的椭圆边值问题的特征值理论的系统阐述.

第四章主要讨论单个方程的平衡解的稳定性问题，所讲述的方法是有普遍意义的，在讨论方程组的平衡解的稳定性时也是有参考价值的.

第五章专门讨论方程组的上、下解方法，我们除了揭示它与单个方程的上、下解方法的不同外，还分别讨论了拟增(减)、混拟、非拟单调情形反应扩散方程组的控制问题的引入以及上、下解的定义，由此证明了解的存在定理；本章还对椭圆组讨论了上、下解方法；并用上、下解方法研究非常数平衡解的稳定性.

方程组的最大值原理一般不成立，因而不能用它去得到解本身的最大模估计，从而给用 Schauder 不动点理论等方法证明解的存在性带来了巨大的困难. 受启发于常微分方程的反应扩散方程组的不变区域理论的出现和发展，在某种程度上给出了解本身的最大模估计. 第六章论述了不变区域的本质，也指出了应用不变区域理论的困难所在.

平衡解的存在性以及当问题依赖于某些参数时平衡解关于参

数的分叉结构是一个极其重要的问题。第七、八两章专门讨论这个问题。度理论已成为研究非线性问题中不可缺少的拓扑工具，第七章就是度理论在反应扩散方程中的应用。首先我们以较短的篇幅论述度理论的概要，包括度的定义、性质与计算，力求深入浅出，既直观又准确。然后论述度理论的应用，利用度理论并将其与上、下解方法相结合讨论椭圆型边值问题的多解问题以及椭圆型方程和常微分方程的分叉问题。通过解决几类典型问题，尽可能使读者了解到问题的全貌。第八章涉及常微分方程的二阶保守系统的边值问题，当空间变量是一维时，它是一类反应扩散方程的平衡解方程。在这一章论述利用相图法讨论二阶保守系统边值问题解的存在性与解的个数的一般原理与步骤，并给出 N. Chafee 和 E. F. Infante 的一个例子，利用相图法可以得到平衡解的全局与完整的分叉结构。

抛物型方程组的初值和初边值问题，常常可看成是适当的 Banach 空间中的一个抽象常微分方程的初值问题，而第九章的半群方法正是解决这一问题的有效方法。但是，当把这一抽象方法用来解决具体的反应扩散方程的有关问题时，必须要结合偏微分方程的有关结果，特别是解的先验估计的有关结果。为了选择正确的基本 Banach 空间，必须要有一系列的嵌入定理。因而本章的安排首先是讲清抽象理论（扇形算子、分数幂算子、分数幂空间及有关抽象常微分方程的结果），然后是讲怎样把抽象理论用到具体的问题中去。通过例子说明怎样应用偏微分方程的先验估计及嵌入定理把具体问题纳入抽象框架，怎么选择基本工作空间等等。我们相信通过这样的讲述会使读者更好地了解怎样使抽象理论发挥作用。

最后一章（第十章）主要研究抽象问题解的渐近性态，论述了一些重要的概念和方法，例如动力系统，极限集，Liapunov 方法和线性化方法等等，并利用这些方法讨论若干反应扩散方程平衡解的稳定性，通过例子说明如何构造 Liapunov 函数，如何证明线性特征值问题最小特征值的正性等。

为使读者更好地掌握本书中所论及的理论和方法，书中配有一定的习题。

本书多数章末有评注，简要论述正文中未涉及的问题或有关问题的最新进展。

本书的出版得到国家自然科学基金的资助，谨此致谢。

由于作者水平有限，书中定有一些错误和不当之处，真诚地希望读者批评指正。

叶其孝　李正元

1985 年

目　　录

第一章 常微分方程准备知识

设 $x\in\mathbf{R}^n$, $u\in\mathbf{R}^m$. 形为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u+f(u,x,t)$$

的反应扩散方程与常微分方程有密切联系，其中

$$D=\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_m)$$

为正对角矩阵. 这类方程中的有些问题可以直接转化为常微分方程的有关问题，还有些问题则可以用常微分方程的方法与有关结果来研究. 就抽象理论来看，这类方程的定解问题可化为 Banach 空间中的微分方程，它的理论与分析方法类似于常微分方程相应的理论和分析方法. 因此，一开始我们就用相当的篇幅来阐述常微分方程的基本理论和方法. 本章内容可参见 [MMic], [Zh].

1.1 基本定理

1.1.1 初值问题解的存在性与唯一性

设 t 是实变量，x 是 n 维向量，G 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的开区域，其元素记为 (x,t). 函数 $f\colon G\to\mathbf{R}^n$ 至少是连续的，$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$. 又记 $\mathbf{R}^n$ 中的模为 $|\cdot|$，零向量为 θ.

考察常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{I}$$

其中 $(x_0,t_0)\in G$.

定理 1.1.1（存在性定理） 设 $(x_0,t_0)\in G$, $f\in C(G)$, $R=\{(x,t)\,|\,|x-x_0|\leqslant a,\ |t-t_0|\leqslant b\}$ 是 G 中的闭长方体，则 (I)

至少存在一个解 $x = x(t)$ 定义在区间 $J = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上，其中 $h = \min\left(b, \frac{a}{M}\right)$，而 $M = \max\limits_{R} |f(x, t)|$。

定义 1.1.2 若对 G 内任意有界闭区域 U，存在常数 L_U 使得当 (x, t)，$(y, t) \in U$ 时，有

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leqslant L_U |x - y|$$

则称 $f(x, t)$ 在 G 内对 x 是局部 Lipschitz 的。

显然，若 $f \in C^1(G)$，则 f 在 G 内对 x 是局部 Lipschitz 的。

定理 1.1.3 (存在唯一性定理) 在定理 1.1.1 的条件下，若又有 f 在 G 对 x 是局部 Lipschitz 的，则 (I) 的解在 $|t - t_0| \leqslant h$ 上存在而且唯一。这里的 h 如定理 1.1.1 所给出。

1.1.2 解的延拓

(I) 的解的最大存在区间有多大?

定理 1.1.4 (解的延拓定理) 设 $(x_0, t_0) \in G$，$f \in C(G)$，若 $x(t)$ 是 (I) 在 $|t - t_0| \leqslant a$ 上的解，则存在 $x(t)$ 的延拓 $\hat{x}(t)$，其最大存在区间是开区间。若 (α, β) 是解 $\hat{x}(t)$ 的最大存在区间，则 $t \to \alpha + 0$ 和 $t \to \beta - 0$ 时 $(\hat{x}(t), t)$ 趋于 G 的边界 (若 G 无边界，则 $|t| + |\hat{x}(t)| \to \infty$)。

什么时候能保证 (I) 的解定义在区间 $[t_0, +\infty)$ (或 $(-\infty, +\infty)$) 上?

定理 1.1.5 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开区域，$x_0 \in \Omega$，$f \in C(\Omega \times [t_0, +\infty))$。又设 K 是 Ω 内的有界闭集。若 $x(t)$ 是 (I) 的解并且

$$\{x(t) | t \geqslant t_0,\ t \text{ 属于解的存在区间}\} \subset K$$

则解 $x(t)$ 定义在区间 $[t_0, +\infty)$ 上。

推论 1.1.6 设 $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^n \times [t_0, +\infty))$，若存在常数 $M > 0$，使得对 (I) 的解 $x(t)$ 在 $t \geqslant t_0$ 的存在区间上有

$$|x(t)| \leqslant M$$

则解 $x(t)$ 定义在区间 $[t_0, +\infty)$ 上。

1.1.3 解的连续性与可微性

(I) 的解可记为 $x(t;\ t_0, x_0)$，作为 t，t_0，x_0 的函数我们讨论它的连续性与可微性。

我们假设：

(H_1) $f \in C(G)$，在 G 内对 x 局部 Lipschitz.

(H_2) $\varphi(t)$ 是 $\dot{x} = f(x, t)$ 在某区间 $J_0 = [a_0, b_0]$ 上的一个解，因而 $t \in J_0$ 时 $(\varphi(t), t) \in G$。

定理 1.1.7 设 (H_1)，(H_2) 成立. 则

1° 存在 $\delta > 0$，使得对任意 $(x_0, t_0) \in W$，其中

$$W:\ a_0 < t_0 < b_0,\ |x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$$

(I)在 J_0 存在唯一解 $x(t;\ t_0, x_0)$。

2° 对任意 (x_0, t_0)，$(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \in W$，有

$$|x(t;\ t_0, x_0) - x(t;\ \tilde{t}_0, \tilde{x}_0)| \leqslant [\,|x_0 - \tilde{x}_0| + M_0|t_0 - \tilde{t}_0|\,]e^{L_0(b_0-a_0)} \quad (t \in J_0)$$

其中 M_0，L_0 为常数.

3° $x(t;t_0,x_0) \in C(V)$，其中

$$V:\ a_0 < t < b_0,\ (x_0, t_0) \in W$$

我们还假设

(H_3) $f_x \in C(G)$.

定理 1.1.8 设 (H_1)，(H_2)，(H_3) 成立，则 (I) 的解

$$x(t;\ t_0, x_0) \in C^1(V)，且\ y = \frac{d}{dt_0}x(t;\ t_0, x_0)\ 是$$

$$\begin{cases} \dot{y} = f_x(x(t;\ t_0, x_0), t)y \\ y|_{t=t_0} = -f(x_0, t_0) \end{cases}$$

的解，而 $Z(t;\ t_0, x_0) = D_{x_0}x(t;\ t_0, x_0)$（是 $x(t;\ t_0, x_0)$ 对 x_0 的导数，是一个矩阵）是矩阵方程初值问题

$$\begin{cases} \dot{Z} = f_x(x(t;\ t_0, x_0), t)Z \\ Z|_{t=t_0} = I_n \end{cases}$$

的解，其中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。

现在考察含参数向量 $\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ 的常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x, t, \mu)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \tag{I_μ}$$

(I_μ) 的解记为 $x(t; t_0, x_0, \mu)$，作为 (t, t_0, x_0, μ) 的函数，讨论 $x(t; t_0, x_0, \mu)$ 的连续性与可微性。

我们假设：

(H_{μ_1}) J_μ 是 k 维 μ 空间中的开区域，$G_\mu=G\times J_\mu$，$f\in C(G_\mu)$，在 G_μ 对 x 是局部 Lipschitz 的，Lipschitz 常数与 $\mu\in J_\mu$ 无关。

(H_{μ_2}) $\mu=\mu_0\in J_\mu$ 时 $\varphi(t)$ 是 $\dot{x}=f(x, t, \mu_0)$ 在某区间 $J_0=[a_0, b_0]$ 上的解，因而 $t\in J_0$ 时 $(\varphi(t), t, \mu_0)\in G_{\mu_0}$.

定理 1.1.9 设 (H_{μ_1})，(H_{μ_2}) 成立，则

1° 存在 $\delta>0$，使得对任意 $(x_0, t_0, \mu)\in W_\mu$，其中

$$W_\mu:\ a_0<t_0<b_0$$
$$|x_0-\varphi(t_0)|<\delta$$
$$|\mu-\mu_0|<\delta$$

(I_μ) 在 J_0 上存在唯一解 $x(t; t_0, x_0, \mu)$.

2° $x(t; t_0, x_0, \mu)\in C(V_\mu)$，其中

$$V_\mu: a_0<t<b_0,\ (x_0, t_0, \mu)\in W_\mu$$

现在用 (H_{μ_1}') 代替 (H_{μ_1})，

(H_{μ_1}') f，f_x，f_μ 均属于 $C(G_\mu)$.

定理 1.1.10 设 (H_{μ_1}')，(H_{μ_2}) 成立，则

$$x(t; t_0, x_0, \mu)\in C^1(V)$$

且 $D_\mu x(t; t_0, x_0, \mu)=Y(t; t_0, x_0, \mu)$ 是矩阵方程的初值问题

$$\begin{cases}\dot{Y}=f_x(x(t; t_0, x_0, \mu), t, \mu)\cdot Y\\ \qquad +f_\mu(x(t; t_0, x_0, \mu), t, \mu) \quad (t\in J_0)\\ Y|_{t=t_0}=O_k\end{cases}$$

的解，其中 O_k 是 $k\times k$ 的零矩阵。

最后考察解对右端函数的连续性。设有初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f_m(x,t)\\ x(t_0)=x_m\end{cases}\qquad (m=1,2,\cdots)\tag{I^m}$$

定理 1.1.11 设 $f, f_m\in C(G)$，(x_0,t_0)，$(x_m,t_0)\in G$，$x_m\to x_0$ 且 $f_m\to f$ 在 G 的紧子集上是一致的. 若 $x_m(t)$ 是 (I^m) 定义在 J_m 上的不可延拓的解. 则存在子序列 $\{m_j\}$ 和 (I) 定义在 J_0 上的不可延拓的解 $x(t)$，使得

1° J_0 包含 t_0，$\liminf\limits_{j\to\infty} J_{m_j}\supset J_0$[1].

2° 当 $j\to\infty$ 时 $x_{m_j}(t)\to x(t)$ 在 J_0 的紧子区间上是一致的.

若 (I) 的解是唯一的，则 $m\to\infty$ 时 $x_m(t)\to x(t)$ 在 J_0 的紧子区间上是一致的.

1.1.4 线性方程

一类非常特殊但又非常重要的方程组是线性方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}(t)x_1+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t)\\ \vdots \\ \dot{x}_i=a_{i1}(t)x_1+\cdots+a_{in}(t)x_n+f_i(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n=a_{n1}(t)x_1+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t)\end{cases}$$

可写成

$$\dot{x}=A(t)x+f(t)\tag{II}$$

其中 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 矩阵函数，

$$x=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$$

当 $f(t)$ 是非零向量时 (II) 是线性非齐次方程，当 $f(t)$ 是零向量时 (II) 是线性齐次方程

$$\dot{x}=A(t)x\tag{II$_0$}$$

---

1) lim inf 是下极限记号.

我们总是假定：$a_{ij}(t)$，$f(t)\in C(J)$，J 是某个区间。

定理 1.1.12 对任意 $t_0\in J$，$x_0\in \mathbf{R}^n$，初值问题

$$\dot{x}=A(t)x+f(t),\quad x(t_0)=x_0$$

存在唯一解，其定义域也是 J。

定理 1.1.13 对任意 t，$\tau\in J$，设 $\Phi(t,\tau)$ 是 (II_0) 的基本矩阵解，满足 $\Phi(\tau,\tau)=I_n$，则

1° 对任意 t,σ,τ 有

$$\Phi(t,\tau)=\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)$$

$$\Phi(t,\tau)=\Phi(t,\sigma)\cdot\Phi(\sigma,\tau)$$

$$\Phi^{-1}(t,\tau)=\Phi(\tau,t)$$

其中 $\Psi(t)$ 是 (II_0) 的任一基本矩阵解。

2° 初值问题

$$\dot{x}=A(t)x,\ x(t_0)=x_0$$

的唯一解可表为

$$x(t;t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)x_0\quad (t\in J)$$

3° 初值问题

$$\dot{x}=A(t)x+f(t),\quad x(t_0)=x_0$$

的唯一解可表为

$$x(t;t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

当 $A(t)$ 为常数矩阵时，我们得到常系数方程

$$\dot{x}=Ax$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，a_{ij} 是常数。

象 e^a 的级数展开式，我们引进矩阵 e^A。

考察矩阵序列

$$T_m=I_n+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^m}{m!}$$

它是收敛的，记

$$e^A=\lim_{m\to+\infty}\left(I_n+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^m}{m!}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$$

定理 1.1.14 设 A 是 $n\times n$ 常数矩阵，则

1° $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$

2° 初值问题

$$\dot{x}=Ax,\quad x(t_0)=x_0$$

的唯一解是

$$x=e^{A(t-t_0)}x_0$$

定理 1.1.15 设 A,B 是 $n\times n$ 常数矩阵。

1° 若 A,B 相似，即 $A=PBP^{-1}$，则 $e^A=Pe^BP^{-1}$。

2° 若 A,B 可交换，即 $AB=BA$，则 $e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$。

3° e^A 有逆矩阵 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$。

4° $(e^A)^T=e^{A^T}$。

5° $\det e^A=e^{\mathrm{tr}A}$，$\mathrm{tr}A$ 为 A 的迹。

怎样求 e^{tA}？

设 A 的标准形是 $\hat{J}$，并假定 P 是非奇异常数矩阵，使得 $A=P\hat{J}P^{-1}$，则

$$e^{tA}=Pe^{t\hat{J}}P^{-1}$$

而 $\hat{J}$ 有如下形式

$$\hat{J}=\begin{pmatrix}J_0 & & 0\\ & J_1 & \\ 0 & & J_s\end{pmatrix}$$

其中 J_0 是对角矩阵，对角线上的元素是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_q$

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_{q+i} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{q+i} & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{q+i}\end{pmatrix}\quad(i=1,2,\cdots s)$$

容易证明

$$e^{t\hat{J}}=\begin{pmatrix} e^{tJ_0} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & e^{tJ_1} & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots e^{tJ_s} \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ_0}=\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots e^{t\lambda_q} \end{pmatrix}$$

因为 $J_i=\lambda_{q+i}I_{r_i}+Z_i$，其中 I_{r_i} 是 $r_i\times r_i$ 单位矩阵。

$$Z_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是 $r_i\times r_i$ 矩阵。所以

$$e^{tJ_i}=e^{t\lambda_{q+i}}e^{tZ_i}=e^{t\lambda_{q+i}}$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由 e^A 的上述表达式我们还可得

定理 1.1.16 λ 是 A 的特征值的充要条件是 e^λ 是 e^A 的特征值。

1.2 常微分方程的比较原理

本节先讨论常微分方程式的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{I^1}$$

即 x, $f(x, t) \in \mathbf{R}^1$. 这时G是 (x, t) 平面中的开区域. 然后再讨论常微分方程组 (I').

1.2.1 方程式的最大解与最小解

设 $f \in C(G)$, $(x_0, t_0) \in G$, 若 (I^1) 的解不唯一,我们将证明其中必有一个最大解和一个最小解.

定义 1.2.1 设 $\varphi_M(t)$ 和 $\varphi_m(t)$ 均是 (I^1) 在 (a, b) 上的解,若对 (I^1) 在 (a, b) 的任意其它解 $x(t)$ 都满足

$$\varphi_m(t) \leqslant x(t) \leqslant \varphi_M(t) \quad (t \in (a, b))$$

则分别称 φ_M 和 φ_m 为 (I^1) 在 (a, b) 上的最大解和最小解.

如果最大、最小解存在,则它们必然唯一.

考察辅助初值问题

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + \varepsilon \\ x(t_0) &= x_0 + \varepsilon \end{aligned} \tag{I^1_\varepsilon}$$

其中 $\varepsilon \geqslant 0$, 记 $(\mathrm{I}^1_\varepsilon)$ 的解为 $x(t, \varepsilon)$, 它向右是不可延拓的.

定理 1.2.2 设 $f \in C(G)$, $(x_0, t_0) \in G$, $\varepsilon \geqslant 0$ 充分小.

1° 若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 则当 $t \geqslant t_0$ 且在二者共同的存在区间上时 $x(t, \varepsilon_1) > x(t, \varepsilon_2)$.

2° 存在常数β和 (I^1) 的解 $x^*(t)$ 定义在 $[t_0, \beta)$ 上且向右是不可延拓的,使得

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} x(t, \varepsilon) = x^*(t)$$

对 t 在 $[t_0, \beta)$ 的任意紧子区间上一致成立.

3° x^* 是 (I^1) 的最大解.

证明 1° 因为 $x(t_0, \varepsilon_1) > x(t_0, \varepsilon_2)$, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $t_0 \leqslant t < t_0 + \delta$ 时 $x(t, \varepsilon_1) > x(t, \varepsilon_2)$. 若结论 1° 不对, 则存在 $t_1 > t_0$, 当 $t \in [t_0, t_1)$ 时 $x(t, \varepsilon_1) > x(t, \varepsilon_2)$ 而 $x(t_1, \varepsilon_1) = x(t_1, \varepsilon_2)$. 于是

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_1, \varepsilon_1) &= f(x(t_1, \varepsilon_1), t_1) + \varepsilon_1 \\ &= f(x(t_1, \varepsilon_2), t_1) + \varepsilon_1 \\ &> f(x(t_1, \varepsilon_2), t_1) + \varepsilon_2 \\ &= \dot{x}(t_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

这与 $x(t, \varepsilon_1) > x(t, \varepsilon_2)(t_0 < t < t_1)$ 矛盾。因此 1° 成立。

证明 2° 选取 ε_m 严格单调下降趋于零。令 $x_m(t) = x(t, \varepsilon_m)$，定义在最大区间 $[t_0, \beta_m)$ 上。由定理 1.1.11 知，存在 $\{x_m\}$ 的子序列(仍记为 x_m)和 (I^1) 的解 x^* 定义在 $[t_0, \beta)$ 上，它向右不可延拓，并满足

$$[t_0, \beta) \subset \liminf_{m \to +\infty} [t_0, \beta_m)$$

$$x^*(t) = \lim_{m \to +\infty} x_m(t)$$

这后一极限对 t 在 $[t_0, \beta)$ 的任意紧子区间上是一致的。设 J 是 $[t_0, \beta)$ 中的任意紧子区间，则 m 充分大后，$J \in [t_0, \beta_m)$。若 $\varepsilon_{m+1} < \varepsilon < \varepsilon_m$，则当 $t \in J$ 时 $x_{m+1}(t) < x(t, \varepsilon) < x_m(t)$，由此立即证明了结论 2°。

证明 3° 设 $x(t)$ 是 (I^1) 的任意一个解，则 $x(t, \varepsilon_m) > x(t)$ 当 $t \geq t_0$ 且在它们的共同存在区间上时。令 $m \to +\infty$ 得

$$x^*(t) = \lim_{m \to +\infty} x(t, \varepsilon_m) \geq x(t)$$

即 x^* 是 (I^1) 的最大解。证毕。

注 1 考虑初值问题 $y' = -f(-s, y)$，$y(-t_0) = x_0$ 可得 $s < t_0$ 时的最大解，其中 $y' = \dfrac{dy}{ds}$。

注 2 考虑初值问题 $\dot{y} = -f(t, -y)$，$y(t_0) = -x_0$ 可得 (I^1) 的最小解。

1.2.2 微分不等式与微分方程式的解的比较

我们分别以 $\overline{D}^+x(t)$，$D^+x(t)$ 表示函数 $x(t)$ 在 t 处的右上导数和右下导数：

$$\overline{D}^+x(t) = \limsup_{h\to 0+} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$ [1]

$$\underline{D}^+x(t) = \liminf_{h\to 0+} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

类似地可定义 $x(t)$ 在 t 的左上导数和左下导数。

现在考察微分不等式

$$\overline{D}^+x(t) \leqslant f(x(t), t) \tag{2.1}$$

若 $x(t)$ 连续并满足(2.1),称 $x(t)$ 是(2.1)的解。现建立微分不等式(2.1)的解与微分方程式初值问题(I^1)的解之间的比较定理。

定理 1.2.3 设 $f\in C(G)$, $(x_0, t_0)\in G$, $x(t)$ 是(2.1)的解, $x(t_0)\leqslant x_0$, $\varphi_M(t)$ 是(I^1)的最大解。又设

$J=\{t|t\geqslant t_0$, t 属于 $x(t)$ 与 $\varphi_M(t)$ 的共同存在区间$\}$

则有

$$x(t)\leqslant \varphi_M(t) \quad (t\in J)$$

证明 设 $\varepsilon>0$ 充分小,记 $x(t, \varepsilon)$ 是(I^1_ε)的解。显然,存在 $\delta>0$, 当 $t_0\leqslant t<t_0+\delta$ 时 $x(t)<x(t, \varepsilon)$. 进一步证明在 $t\geqslant t_0$ 的共同存在区间上 $x(t)\leqslant x(t, \varepsilon)$. 若不然,则存在一个 t 值和递减而趋于零的序列 $\{h_m\}$, 使得

$$x(t)=x(t, \varepsilon), \quad x(t+h_m)>x(t+h_m, \varepsilon)$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{D}^+x(t) &= \limsup_{h\to 0+}[x(t+h)-x(t)]/h\\ &\geqslant \limsup_{m\to+\infty}[x(t+h_m)-x(t)]/h_m\\ &\geqslant \lim_{m\to+\infty}\frac{x(t+h_m, \varepsilon)-x(t, \varepsilon)}{h_m}\\ &= x'(t, \varepsilon)=f(x(t, \varepsilon), t)+\varepsilon\\ &= f(x(t), t)+\varepsilon>f(x(t), t)\geqslant \overline{D}^+x(t)\end{aligned}$$

---

1) limsup 是上极限记号。

这是不可能的。因为 $x(t,\varepsilon)\geqslant x(\bar{t})(\varepsilon>0)$，令 $\varepsilon\to 0+$ 并利用定理 1.2.2 得结论。证毕。

1.2.3 方程组的解的模估计

定理 1.2.4 设 $f\in C(G)$，$(x_0,t_0)\in G$，$x(\bar{t})$ 是 (I') 的解，又设 $F(x,t)$ 是二元连续函数，满足

$$|f(x,t)|\leqslant F(|x|,t)\quad ((x,t)\in G)$$

若 $|x(t_0)|\leqslant v_0$，$\varphi_M(t)$ 是

$$\begin{cases}\dot{v}=F(v,t)\\ v(t_0)=v_0\end{cases}$$

的最大解，则在共同的存在区间上

$$|x(t)|\leqslant\varphi_M(t)$$

证明 令 $w(t)=|x(t)|$，则

$$\begin{aligned}\bar{D}^+w(t)&=\limsup_{h\to 0+}\frac{|x(t+h)|-|x(t)|}{h}\\ &\leqslant\limsup_{h\to 0+}\frac{|x(t+h)-x(t)|}{h}\\ &\leqslant|\dot{x}(t)|=|f(x(t),t)|\\ &\leqslant \mathrm{F}(|x(t)|,t)=\mathrm{F}(w(t),t)\end{aligned}$$

$$w(t_0)=|x(t_0)|\leqslant v_0$$

由定理 1.2.3 得

$$|x(t)|\leqslant\varphi_M(t)$$

1.2.4 方程组的比较原理

定义 1.2.5 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 若 $a_i<b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称 $a<b$；若 $a_i\leqslant b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称 $a\leqslant b$。

先讨论 (I) 的解的正性问题。记

$$\mathrm{R}_+^n=\{x\,|\,x=(x_1,\cdots x_n),\ x>\theta \text{ 即 } x_1>0,\cdots,x_n>0\}$$

我们假定 $f(x,t)$ 在 $\bar{\mathrm{R}}_+^n\times\bar{\mathrm{R}}_+^1$ 上连续，对 x 有连续的导数，因而

初值问题

$$\dot{x} = f(x, t), \ x(0) = x_0 \tag{2.2}$$

的解 $x(t; x_0)$ 存在唯一，其最大存在区间 $J = [0, \Delta)$，其中 $x_0 \in \bar{R}^n_+$。

定理 1.2.6 设 $(x, t) \in \bar{R}^n_+ \times \bar{R}^1_+$ 时

$$f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \geqslant 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$x_0 \in \bar{R}^n_+$$

则 $x(t; x_0) \geqslant \theta \ (t \in J)$。

证明 考察辅助问题

$$\dot{x} = f(x, t) + \varepsilon, \ x(0) = x_0 \tag{2.3}$$

$J_1 = [0, \Delta_1]$ 是 J 的任意有界闭区间，则 $\varepsilon > \theta$，$|\varepsilon|$ 充分小时 (2.3) 的解 $x(t; x_0, \varepsilon)$ 定义在 $t \in J_1$ 上。

若在 $t = t^*$ 使 $x_i(t^*; x_0, \varepsilon) = 0$，则

$$\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t^*} = f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n, t^*) + \varepsilon > 0$$

$x_i(t; x_0, \varepsilon)$ 在 $t = t^*$ 是增加的。因此 $x(t; x_0, \varepsilon) \in \bar{R}^n_+$。由解对参数的连续性得

$$\lim_{\varepsilon \to \theta} (t; x_0, \varepsilon) = x(t; x_0, \theta)$$
$$= x(t; x_0) \in \bar{R}^n_+$$

证毕。

定理 1.2.7 记 $a = (a_1, \cdots, a_n)$，$b = (b_1, \cdots, b_n)$，$\sum_a^b = \{x | a < x < b\}$。设 $(x, t) \in \bar{\sum}_a^b \times \bar{R}^1_+$ 时 $f(x, t)$ 连续，对 x 有连续的导数且 f 的每个分量满足

$$\begin{array}{l} f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \geqslant 0 \\ f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \leqslant 0 \end{array} \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

又 $x_0 \in \bar{\sum}_a^b$，则 $x(t, x_0) \in \bar{\sum}_a^b (t \in J)$。

证明留给读者。

定义 1.2.8 称函数 $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \cdots, \varphi_n(x, t))$ 在

区域$\Omega\times J$对x是拟单调不减的．若对任意$\xi,\eta\in\Omega$，$t\in J$，由$\xi_j\leqslant\eta_j(j\neq i)$得到

$$\varphi_i(\xi)\leqslant\varphi_i(\eta)|_{\eta_i=\xi_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

定理1.2.9 设$U(t)$，$V(t)\in C^1[0,T]$满足:

$$V(t)\leqslant U(t)$$
$$\dot{U}(t)\geqslant f(U(t),t)$$
$$\dot{V}(t)\leqslant f(V(t),t)$$

其中$t\in[0,T]$．令$a=\min\limits_{[0,T]}V(t)$，$b=\max\limits_{[0,T]}U(t)$．又设$f(x,t)$在$\bar{\sum}_a^b\times[0,T]$上连续，对$x$拟单调不减且有连续的导数，则对任意$x_0$，$V(0)\leqslant x_0\leqslant U(0)$，(2.2)存在唯一解$x(t;x_0)$且满足

$$V(t)\leqslant x(t;x_0)\leqslant U(t)\quad(t\in[0,T])\tag{2.4}$$

证明 存在常数$K>0$，对任意$x,y\in\bar{\sum}_a^b$，$t\in[0,T]$有

$$|f(x,t)-f(y,t)|\leqslant K|x-y|\tag{2.5}$$

任给$u(t)\in C[0,T]$，$V(t)\leqslant u(t)\leqslant U(t)(t\in[0,T])$，线性问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-Kx+f(u,t)+Ku\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

有唯一解

$$x=e^{-Kt}x_0+\int_0^t e^{-K(t-\tau)}[f(u(\tau),\tau)+Ku(\tau)]d\tau$$

由此确定一个映射

$$x=Pu$$

P定义在Banach空间$B=C[0,T]$的一个闭凸集

$$S=\{x(t)|x(t)\in C[0,T],V(t)\leqslant x(t)\leqslant U(t)\}$$

上．它是紧算子．

令$w=U(t)-x$，则

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}\geqslant-Kw+f(V(t),t)-f(u,t)+K(U-u)\\ w(0)\geqslant\theta\end{cases}$$

分别考察每个分量，由(2.5)及拟单调性得

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_1}{dt} \geqslant -Kw_1 &+ f_1(U_1, U_2, \cdots, U_n, t) \\
&- f_1(u_1, U_2, \cdots, U_n, t) \\
&+ f_1(u_1, U_2, \cdots, U_n, t) \\
&- f_1(u_1, u_2, \cdots, u_n, t) \\
&+ K(U_1 - u_1) \geqslant -Kw_1 \\
w_1(0) &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

因此 $w_1(t) \geqslant 0 (t \in [0, T])$。同理可证

$$w_i(t) \geqslant 0 \quad (t \in [0, T])$$

即证 $U(t) \geqslant x(t)$。同理还可证 $V(t) \leqslant x(t)$ $(t \in [0, T])$。这就证明了 $P(S) \subset S$。由 Schauder 不动点原理，P 有不动点，它就是(2.2)的解 $x(t; x_0)$，满足(2.4)。证毕。

1.3 自治系统的一般性质

1.3.1 相空间与相轨线

设某个系统的运动状态可用 n 个量 $x_1, \cdots, x_n$ 来描述，它满足微分方程组

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.1}$$

写成向量形式即

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{3.1'}$$

$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 在同一瞬间的值表示系统在该瞬间的运动状态，几何上对应 n 维空间的一个点，故把这个表示系统状态的空间称为相空间。相空间中表示系统状态的动点称为相点，而方程(3.1′)的解 $x = x(t)$（即 $x_i = x_i(t)$，$i = 1, 2, \cdots, n$）称为系统的运动方程，即相点在相空间中的运动方程。相点的轨迹即

$$\{x(t) \mid t \in \text{解的存在区间}\}$$

称为(3.1′)的相轨线，简称为轨线，因而 $x = x(t)$ 就是相轨线的参数方程。

1.3.2 自治系统轨线的简单性质

若 $f(x, t) = f(x)$，它不依赖于 t，则(3.1′)变成

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2}$$

称它为自治系统。

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开区域，$f(x)$ 在 Ω 上是局部 Lipschitz 的。对 $\forall p \in \Omega$，方程(3.2)满足初值 $x(0) = p$ 的解是唯一的，记为 $x = \varphi(t, p)$ 或 $\varphi_t(p)$，它的最大存在区间记为 $J(p)$。

方程(3.2)的解及其对应的轨线有以下简单性质：

引理 1.3.1 若 $x(t)$ 是(3.2)的解，定义域为 J，又 h 为任意实数，则 $x(t+h)$ 也是(3.2)的解，定义域为 $J_h = \{t \mid t + h \in J\}$。

证明留给读者。

引理 1.3.1 指出：不同的解可以对应相同的轨线。事实上，若 Γ 是解 $x(t)$ 对应的轨线，则 Γ 也是解 $x(t+h)$ 对应的轨线。

引理 1.3.2 设 $x(t)$，$\tilde{x}(t)$ 都是(3.2)的解，定义域分别为 J 和 $\tilde{J}$。若 $\exists t_0 \in J$，$\tilde{t}_0 \in \tilde{J}$，使得 $x(t_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0)$，则对 $\forall t \in \tilde{J}$，有

$$\tilde{x}(t) = x(t + t_0 - \tilde{t}_0)$$

证明留给读者。

该引理指出：1° 自治系统(3.2)的不同轨线不能相交；2° 若 Γ 是自治系统(3.2)的解 $x(t)$ 对应的轨线，那么(3.2)以 Γ 为轨线的解一定可表为 $x(t+k)$，k 为某个实数。因此，以 Γ 为轨线的所有解，在 Γ 上 t 增加的方向是相同的。Γ 可看作是定向曲线。

由于通过每一点 $p \in \Omega$，方程(3.2)的轨线是唯一的，我们常用 $\Gamma(p)$ 表示。

1.3.3 自治系统的解确定一个动力系统

令 $W = \{(p, t) \mid (p, t) \in \Omega \times \mathbf{R}^1,\ p \in \Omega,\ t \in J(p)\}$，于是(3.2)的解 $x = \varphi(p, t) = \varphi_t(p)$ 定义在 W 上，取值在 Ω 内，即 $\varphi: W \to \Omega$。

定义 1.3.3 函数 $\varphi(p,t)=\varphi_t(p)$ 叫做系统(3.2)的流，也叫做 $f(x)$ 的流。

下面讨论流的性质

定理 1.3.4 设 $f(x)$ 在 Ω 是局部 Lipschitz 的，对 $\forall p\in\Omega$，$J(p)=(-\infty,+\infty)$。则(3.2)的流 $\varphi(t,p)=\varphi_t(p)$ 满足：

1° φ: $\Omega\times\mathbf{R}^1\to\Omega$ 是连续的，

2° $\varphi_0(p)=p\quad(\forall p\in\Omega)$，

3° 对 $\forall$ 实数 a，b，有 $\varphi_{a+b}(p)=\varphi_a(\varphi_b(p))\ (\forall p\in\Omega)$。

证明　由解的连续性得结论 1°，由定义得结论 2°．因为 $\varphi_t(p)$ 是(3.2)的解，由引理 1.3.1 知，$\varphi_{t+b}(p)$ 也是 (3.2) 的解，即 $\varphi_{t+b}(p)$ 与 $\varphi_t(\varphi_b(p))$ 均是(3.2)的解，有相同的初值 $\varphi_{t+b}(p)|_{t=0}=\varphi_t(\varphi_b(p))|_{t=0}$，由唯一性知，$\varphi_{t+b}(p)=\varphi_t(\varphi_b(p))$，令 $t=a$ 得结论 3°．证毕．

定义 1.3.5 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，映象 φ: $\Omega\times\mathbf{R}^1\to\Omega$ 记为 $\varphi(x,t)=\varphi_t(x)$，它是连续的．固定 t 时，映象 φ_t: $\Omega\to\Omega$，满足：φ_0: $\Omega\to\Omega$ 是恒同映象；$\varphi_t\varphi_s=\varphi_{t+s}$ 对 $\mathbf{R}^1$ 内一切的 t 与 s 成立．则称 φ_t 为动力系统．

因此，在定理 1.3.4 的条件下，(3.2)的流 $\varphi_t(p)$ 确定一个动力系统．

1.3.4 轨线的分类

现在我们对自治系统的轨线进行分类：

设对 $\forall p\in\Omega$，(3.2) 的解 $\varphi(p,t)$ 定义域是 $(-\infty,+\infty)$．

定义 1.3.6 若 $p\in\Omega$，满足 $\varphi_t(p)=p\,(-\infty<t<+\infty)$．则称 p 为系统(3.2)的平衡点或奇点．

显然，p 是(3.2)的平衡点的充要条件是：$f(p)=\theta$．平衡点 p 是系统的平衡状态．

关于平衡点有以下结论：

引理 1.3.7 没有一条异于平衡点的轨线在有限时刻会经过平衡点．

证明 由初值问题解的唯一性得结论。

记

$$\Gamma^+(p) = \{\varphi_t(p) | t \geqslant 0\}$$

$$\Gamma^-(p) = \{\varphi_t(p) | t \leqslant 0\}$$

分别称为(3.2)的正半轨线和负半轨线。

引理 1.3.8 若 $\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(q) = p$，则 p 是平衡点。

证明留作习题。

若(3.2)的解 $\varphi_t(p)$ 是 t 的周期函数，但 p 不是平衡点，则称 $\varphi_t(p)$ 是(3.2)的非平凡周期解。

引理 1.3.9 $\varphi_t(p)$ 是 (3.2) 的周期解的充要条件是：$\exists t_1 \neq t_2$ 使得 $\varphi_{t_1}(p) = \varphi_{t_2}(p)$。$\varphi_t(p)$ 是非平凡周期解的充要条件是：$\exists t_1$，t_2 满足上述条件而且 $t_1 < t < t_2$ 时 $\varphi_t(p) \neq \varphi_{t_1}(p)$。

证明 设 $\varphi_{t_1}(p) = \varphi_{t_2}(p)$，$t_1 \neq t_2$，则 $\varphi_{t_2-t_1}(p) = \varphi_{-t_1} \cdot \varphi_{t_2}(p) = \varphi_{-t_1}\varphi_{t_1}(p) = p$。因此，对 $\forall t$，$\varphi_{t+(t_2-t_1)}(p) = \varphi_t(p)$，$\varphi_t(p)$ 是周期解。记最小周期为 T，若 $\varphi_t(p)$ 是非平凡周期解，可证 $T > 0$。若 $T = 0$，则存在一串正周期 T_n，$T_n \to 0$，又

$$t = \left[\frac{t}{T_n}\right] T_n + \alpha_n$$

其中方括号表示取整数部分，$0 \leqslant \alpha_n \leqslant T_n$。于是

$$\varphi_t(p) = \varphi_{\alpha_n}(p)$$

由连续性，$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{\alpha_n}(p) = \varphi_0(p) = p$，即 $\varphi_t(p) = p$ ($t \in (-\infty, +\infty)$)，p 是平衡点，故矛盾。证毕。

非平凡周期解的轨线是闭轨。若 $\varphi_t(p)$ 的周期为 T，则

$$\Gamma(p) = \{\varphi_t(p) | 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

由引理 1.3.9 立即可得

定理 1.3.10 自治系统(3.2)的轨线必为以下三类型之一。

(1) 不封闭。当 $t_1 \neq t_2$ 时 $\varphi_{t_1}(p) \neq \varphi_{t_2}(p)$；

(2) 闭轨;

(3) 平衡点.

1.3.5 不变集与解的不变性

由引理 1.3.1 和引理 1.3.2 知,(3.2)的解具有不变性: 若 $x\in\Gamma(p)$, 则 $\varphi_t(x)\in\Gamma(p)$.

定义 1.3.11 集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 称为 (3.2) 的不变集. 若 $x\in A$, 对 $\forall t\in\mathbf{R}^1$, 有 $\varphi_t(x)\in A$. 集合 A 称为 (3.2) 的正(负)不变集: 若 $x\in A$, 对 $\forall t>0(t<0)$ 有 $\varphi_t(x)\in A$.

显然,(3.2)的整条轨线都是不变集, 正(负)半轨线是正(负)不变集. 反之,任意不变集都是由一些整条轨线组成的,正(负)不变集是由一些正(负)半轨线组成的.

定理 1.3.12 若 A 是不变集则 $\bar{A}$(A 的闭包), A°(A 的内域)也是不变集. 若 A 是正(负)不变集, 则 $\bar{A}$, A° 也是正(负)不变集.

证明留给读者.

1.4 平面自治系统的平衡点

1.4.1 概述

单位质量的质点在力 $f(x, \dot{x})$ 的作用下沿直线运动的方程是:

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}) \tag{4.1}$$

x (位置)和 $\dot{x}$ (速度) 的值刻划了系统在任意时刻的状态即为系统的相. x 与 $\dot{x}$ 的平面即为相平面. 若令 $y=\dot{x}$, 则(4.1)等价于方程组

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=f(x,y) \tag{4.2}$$

这是二维自治系统

$$\dot{x}=P(x,y), \quad \dot{y}=Q(x,y) \tag{4.3}$$

的特殊情形。研究(4.2)可得到(4.1)的解的不少性质。

二维自治系统(4.3)的解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 确定了 xy 平面，即相平面上的一条曲线，我们将研究这些曲线在相平面上所形成的图象——相图。在相图中起重要作用的是平衡点的类型。

方程(4.2)的平衡点是某个点 $(x_0, 0)$，在该点处 $y=0$, $f(x_0, 0)=0$，它相应于质点的一个运动状态，即速度 $\dot{x}$ 及加速度 $\ddot{x}$ 为零，表示质点是静止的不受力的作用，因而处于平衡状态（故称为平衡点）。系统的平衡态是最重要的状态之一，这是要研究平衡点的原因之一。

我们将研究：

1° 平衡点及平衡点附近的轨线分布。

2° 平衡点稳定与否，即靠近平衡点的质点能否保持在该点附近。

若消去时间 t，(4.3) 化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{4.4}$$

设 $P, Q\in C^1$。若 $P^2(x_0, y_0)+Q^2(x_0, y_0)\neq 0$，点 (x_0, y_0) 是(4.4)的常点，通过 (x_0, y_0)，方程(4.4)中至少有一个它的解存在且唯一。若 $P^2(x_0, y_0)+Q^2(x_0, y_0)=0$，点 (x_0, y_0) 是(4.4)的奇点，在该点解的存在唯一性定理已不适用。因此，我们也把(4.3)的平衡点叫奇点，非平衡点叫常点。

若引进极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，则(4.3)化成

$$\begin{aligned}\dot{r}&=\cos\theta\cdot P(r\cos\theta, r\sin\theta)+\sin\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ \dot{\theta}&=\frac{1}{r}[\cos\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta)-\sin\theta P(r\cos\theta, r\sin\theta)]\end{aligned} \tag{4.5}$$

我们可以通过(4.4)或(4.5)来研究(4.3)，对某些特殊情形我们还可由此求出显式解（例如线性方程的情形），从而得到全平面上的相图。然而对于一般情形，我们不可能得到显式解，这时常用

线性化的方法：

(1) 在平衡点处将非线性方程(4.3)线性化，

(2) 讨论线性化方程的相图，

(3) 在平衡点邻域用线性化方程的相图近似非线性方程的相图。

因此，本节的方法对于非线性方程来说，只能讨论平衡点邻域中解的局部性态。

若 (x_0, y_0) 是(4.3)的平衡点，通过变量替换可化成以(0,0)为平衡点。我们常常只考虑以原点为平衡点的情形。

1.4.2 二维常系数线性方程的标准化

先考虑二维常系数线性方程

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy \tag{A}$$

当系数行列式 $q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时，(A)有唯一平衡点(0，0)称为简单平衡点。当 $q = 0$ 时(A)的平衡点称为非简单平衡点。

讨论(A)的主要方法是将(A)标准化，即作线性变换将(A)化为标准形式。

(A)的系数矩阵记为 A，作非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

则(A)化为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{$\bar{A}$}$$

令 $p = -(a + d)$，$q = ad - bc$，则 A 的特征方程是

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q$$

$T^{-1}AT$ 的标准形决定于 $D(\lambda)$ 的根的情形。

我们把计算结果列在下面：

特征根	T	$T^{-1}AT$
两个相异实根 λ,μ	$\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda-a & \mu-a \end{pmatrix}$ $(b\neq0)$ 或 $\begin{pmatrix} \lambda-d & \mu-d \\ c & c \end{pmatrix}$ $(c\neq0)$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
两个相同实根 λ ① $\lambda=a=d$ $b=c=0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
② 其余情形	$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix}$ $(b\neq0)$ 或 $\begin{pmatrix} -c & d-\lambda \\ 0 & -c \end{pmatrix}$ $(c\neq0)$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \varepsilon & \lambda \end{pmatrix}$ $(\varepsilon\neq0)$
两个共轭复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ $\beta\neq0$	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha-a}{\beta} \\ 0 & \frac{c}{\beta} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

1.4.3 标准化方程的简单平衡点

现在考虑标准化后的方程(A)，其中 $\det A\neq0$.

(一) A有两个不同的实特征根 $\lambda>\mu(\lambda\cdot\mu\neq0)$ 由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

解得

$$x=c_1e^{\lambda t},\quad y=c_2e^{\mu t}$$

或
$$y=c|x|^{\frac{\mu}{\lambda}},\quad x=0$$

解曲线在 xy 平面上的图形如图 1-4.1，图 1-4.2 和图 1-4.3 所示. 图中轨线上的箭头指向时间 t 增加的方向.

当 $\mu<\lambda<0$ 时(0,0)称为稳定结点(双切结点)，见图 1-4.1. 当 $t\to+\infty$时一切轨线都趋于原点，有两条轨线(正、负 y 轴)沿两个相反的方向(正、负 y 轴方向)趋于原点，其余轨线都沿另外两个

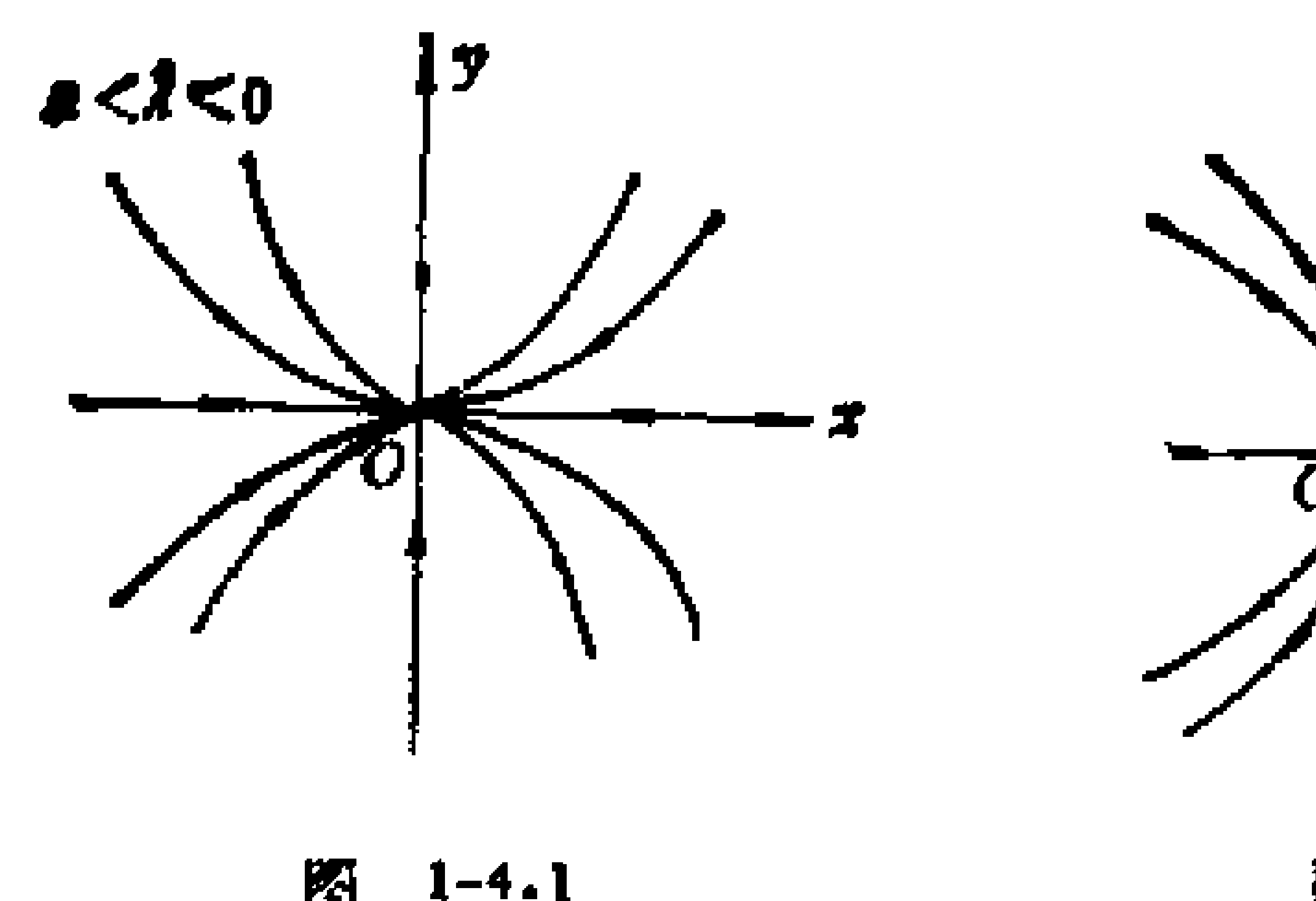


图 1-4.1

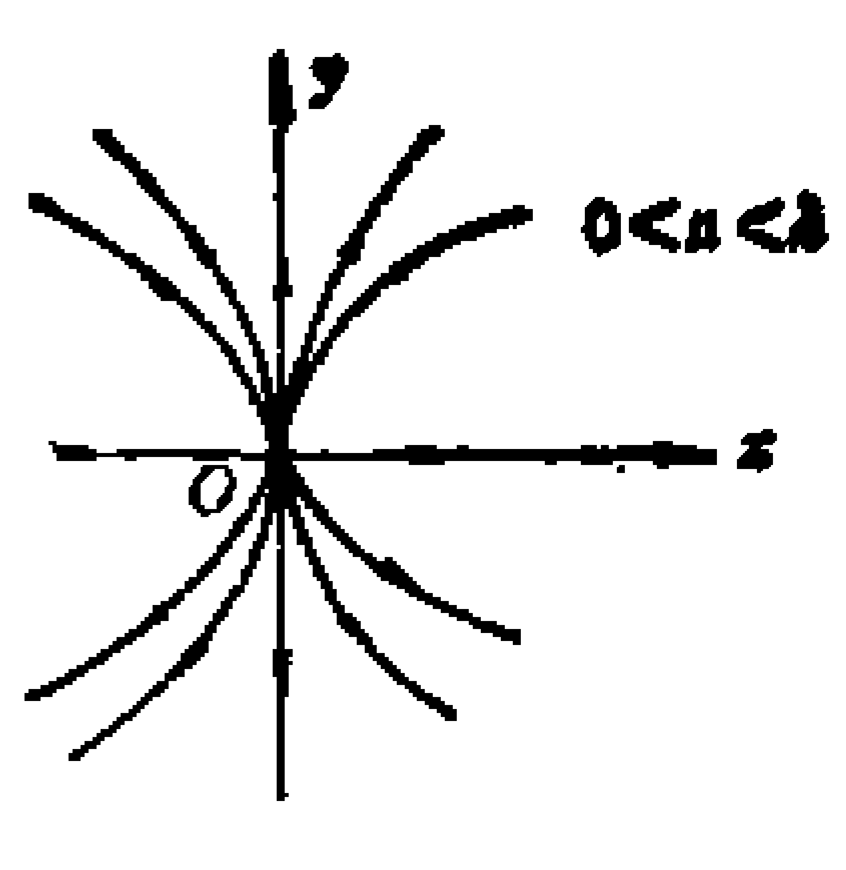


图 1-4.2

相反的方向(正负 x 轴方向)趋于原点，而且沿这两个方向的两侧都有轨线趋于原点.

当 $0<\mu<\lambda$ 时 (0, 0) 点称为不稳定结点 (双切结点)，见图 1-4.2. 它与前者的区别只是把 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，且 x, y 轴互换.

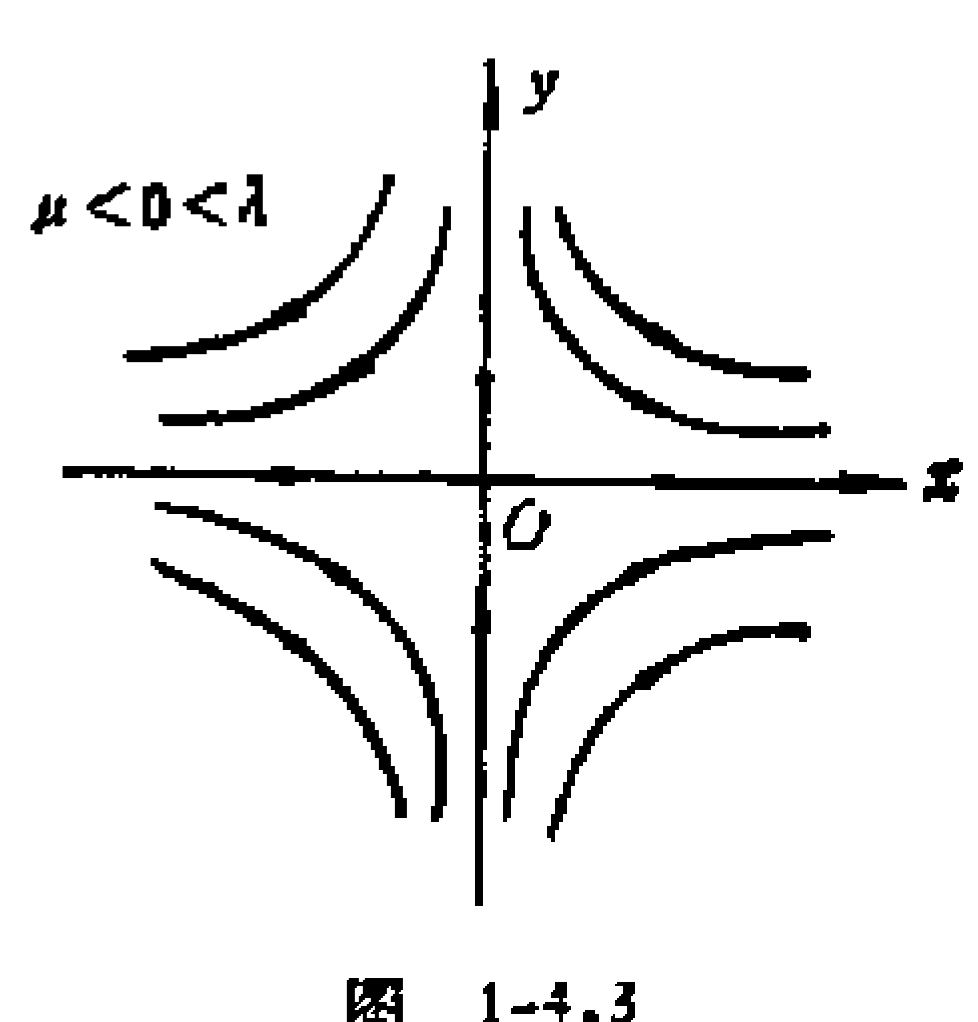


图 1-4.3

当 $\mu<0<\lambda$ 时 (0, 0)点称为鞍点(图 1-4.3). 当 $t\to+\infty$ 时只有两条轨线 (正、负 y 轴) 分别沿两个相反的方向趋向原点，这两条轨线称为鞍点的稳定流形. 其余轨线都沿另外两个方向趋于无穷，这其中有两条 (正、负 x 轴)当 $t\to-\infty$时沿着两个相反的方向趋向原点，这两条轨线称为鞍点的不稳定流形. 鞍点的这四条特殊的轨线又称为鞍点的分界线.

(二) A有两个相等的实特征根 $\lambda(\lambda\neq 0)$.

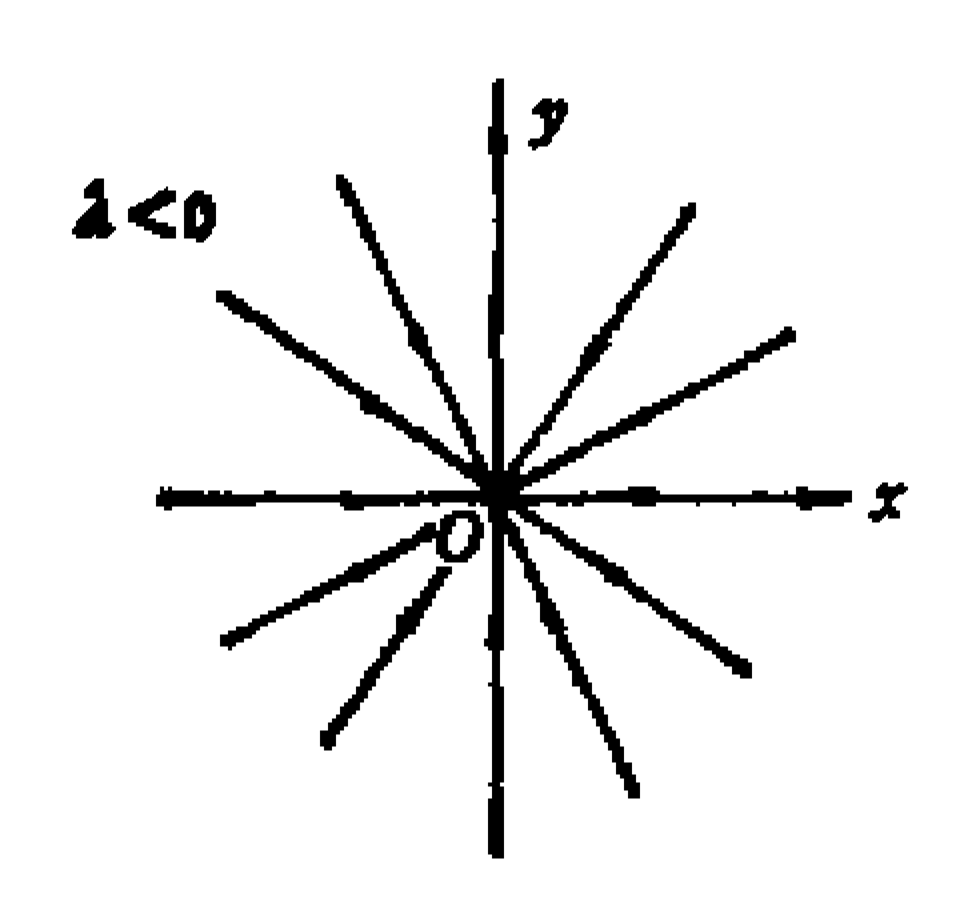
若 λ 有两个线性无关的特征向量，由

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

得

$$x=c_1e^{\lambda t},\quad y=c_2e^{\lambda t}$$

或



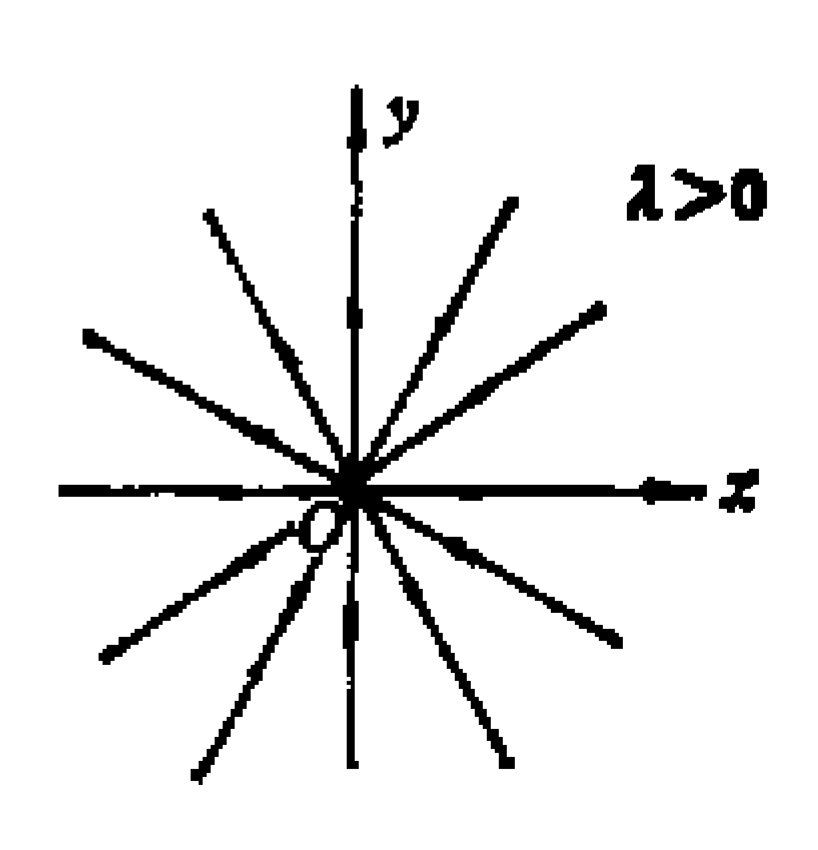


图 1-4.4

$$y = cx \text{ 和 } x = 0$$

解曲线如图 1-4.4，都是趋于原点(当 $t \to +\infty$或 $t \to -\infty$时) 的半直线.

当 $\lambda < 0(\lambda > 0)$ 时 (0, 0)点称为稳定 (不稳定) 的临界结点. 又称星形结点.

若 λ 只有一个线性无关的特征向量，由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

解得

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\lambda t} + c_1 t e^{\lambda t}$$

或

$$y = cx + \frac{1}{\lambda} x \ln|x| \quad (x = 0)$$

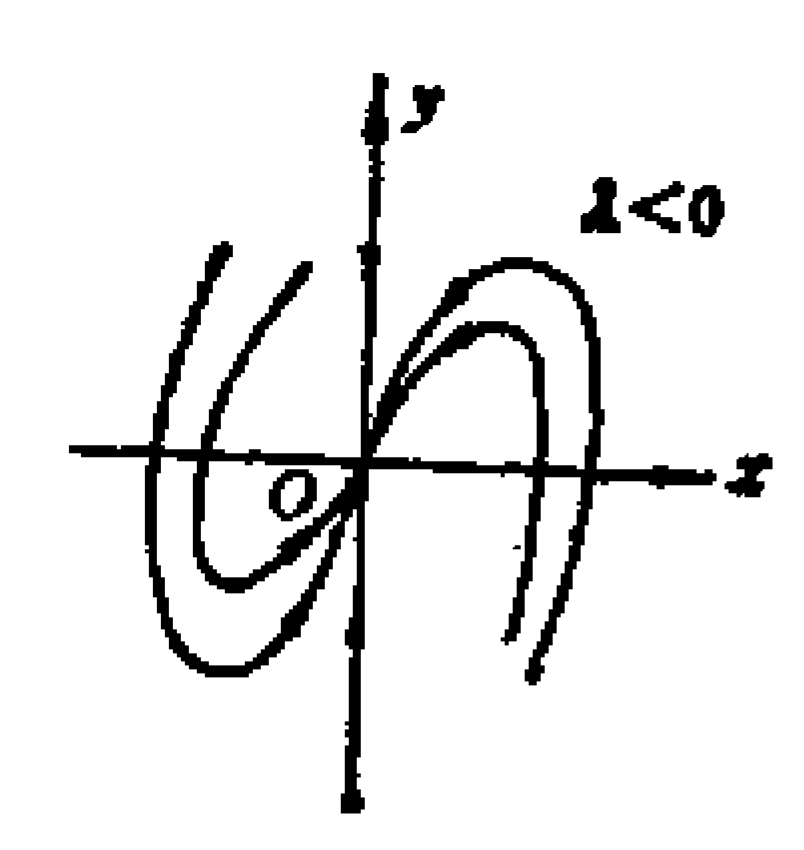
解曲线如图 1-4.5 所示.

当 $\lambda < 0$ 时,(0, 0)称为稳定的退化结点(单切结点). 当 $t \to +\infty$ 时一切轨线均沿正或负 y 轴趋于原点,而且只能沿正 y 轴的一侧,沿负 y 轴的另一侧趋于原点.

当 $\lambda > 0$ 时 (0, 0) 称为不稳定的退化结点(单切结点).

(三) A有两个共轭复特征根 $\alpha \pm i\beta$, α, β 为实数，$\beta \neq 0$, 由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



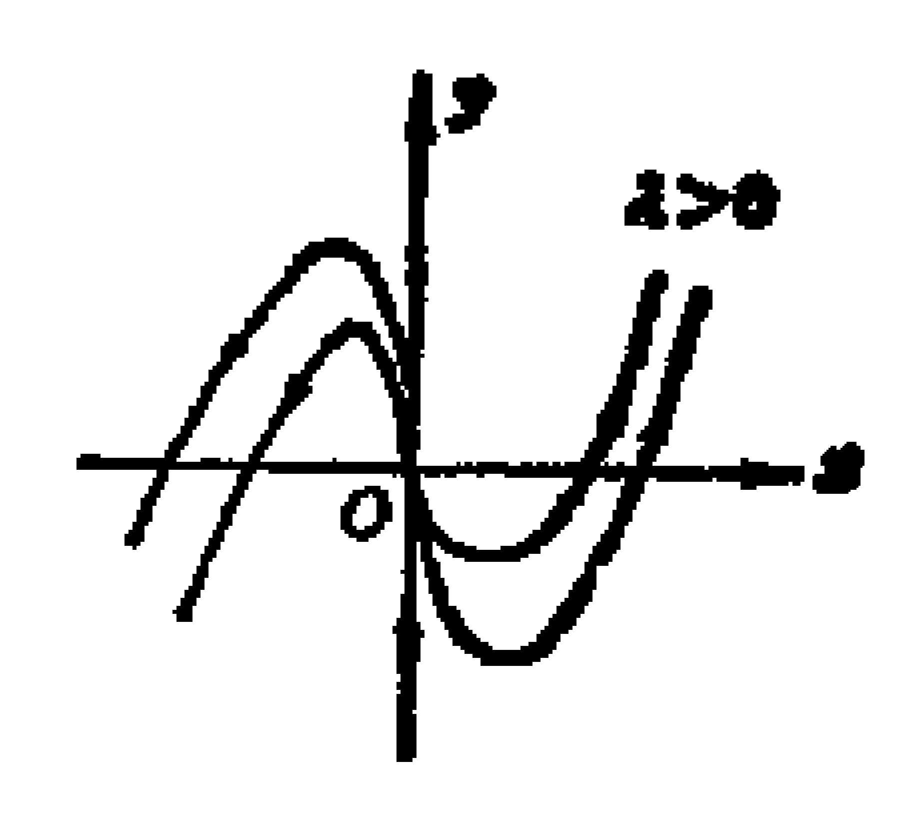


图 1-4.5

的极坐标方程

$$\dot{r}=\alpha r,\quad \dot{\theta}=-\beta$$

解得

$$r=r_0e^{\alpha t},\quad \theta=-\beta t+\theta_0,\quad 即\quad r=r_0e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\theta-\theta_0)}$$

当 $\alpha=0$ 时(0, 0)点称为中心,见图 1-4.6.

当 $\alpha<0$ ($\alpha>0$) 时(0, 0)点称为稳定（不稳定）焦点. 当 $t\to+\infty$ ($-\infty$) 时 $r(t)\to 0$, $\theta(t)\to-\infty$, 轨线螺旋地趋向原点. β 的符号不同,旋转的方向就不同(图 1-4.7).

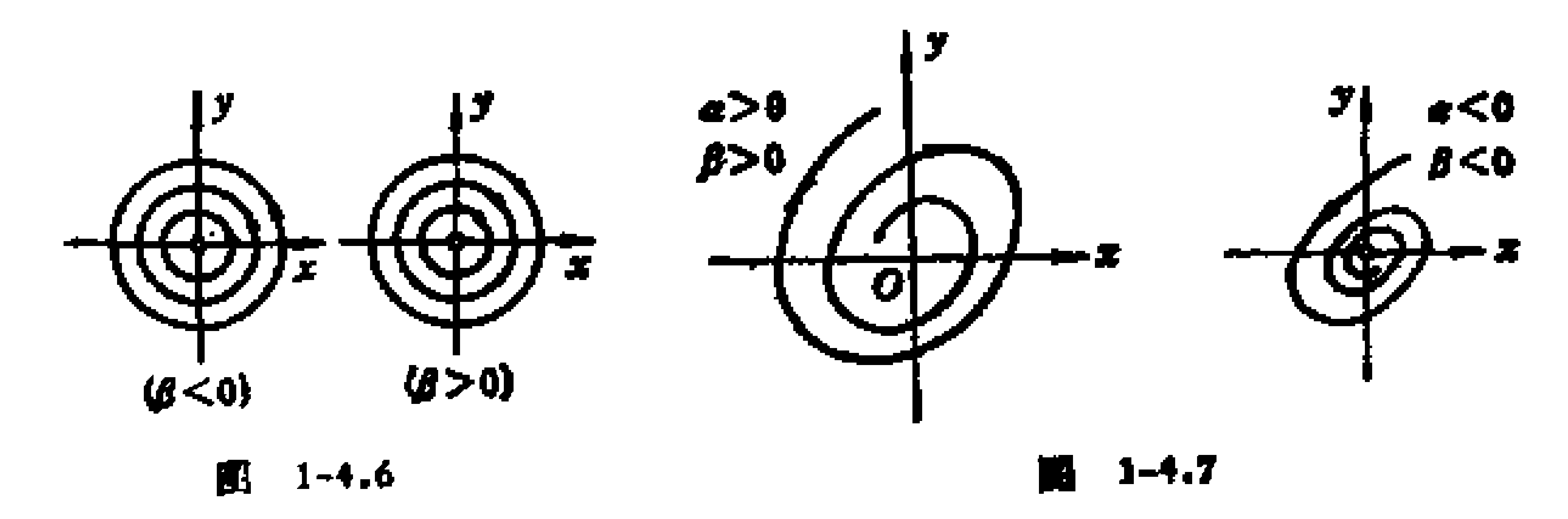


图 1-4.6　　图 1-4.7

对应于两个特征值(不等或相等)的实部均负时,(0, 0) 统称为汇(当 $t\to+\infty$时解曲线都趋于原点).

对应于两个特征值(不等或相等)的实部均正时,(0, 0) 统称为源(当 t 增加时解曲线远离原点).

1.4.4 线性常系数系统的简单平衡点

现考察原系统 (A)，通过非奇异线性变换 (4.6) 将 (A) 化成

标准化系统 ($\tilde{A}$). ($\tilde{A}$) 的轨线结构是清楚的,再通过线性变换 T 就可完全搞清楚 (A) 的轨线结构. 为此要考察非奇异线性变换下,轨线的哪些特性保持不变,哪些特性要起变化.

容易证明下面的引理.

引理 1.4.1 在非奇异线性变换下有以下不变性

1° 坐标原点不变;

2° 直线变为直线,过原点的直线仍变为过原点的直线;

3° 光滑曲线变成光滑曲线,相切的光滑曲线变成相切的光滑曲线;

4° 简单闭曲线变成简单闭曲线;

5° 当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时趋于原点的曲线仍变为趋于原点的曲线. 当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时以螺旋方式环绕原点且趋于原点在变换下仍保持此方式.

引理 1.4.2 在非奇异线性变换 T 下可发生变化的是:

1° 把方向 $l\left(=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}\right)$变为 Tl.

2° 沿某方向 l 趋于原点的曲线经变换后对应的曲线沿另一确定的方向 Tl 趋于原点.

3° 两点的距离,两曲线的夹角一般起变化.

由上述引理知,在 $\xi\eta$ 平面上得到平衡点的相图后,返回到 xy 平面上时奇点的类型是不变的,只是"尺寸"上会有变化.

在确定相图时知道 $\xi\eta$ 平面上的坐标轴经变换 T 后变为 xy 平面上的哪两根直线是重要的.

总结上面的讨论,我们给出平衡点类型的判别准则. 引进参数

$$p=-(a+d),\quad q=ad-bc$$

特征根

$$\lambda,\ \mu=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=p^2-4q$$

按特征根与平衡点类型的对应关系,我们可在 $p-q$ 平面上画出

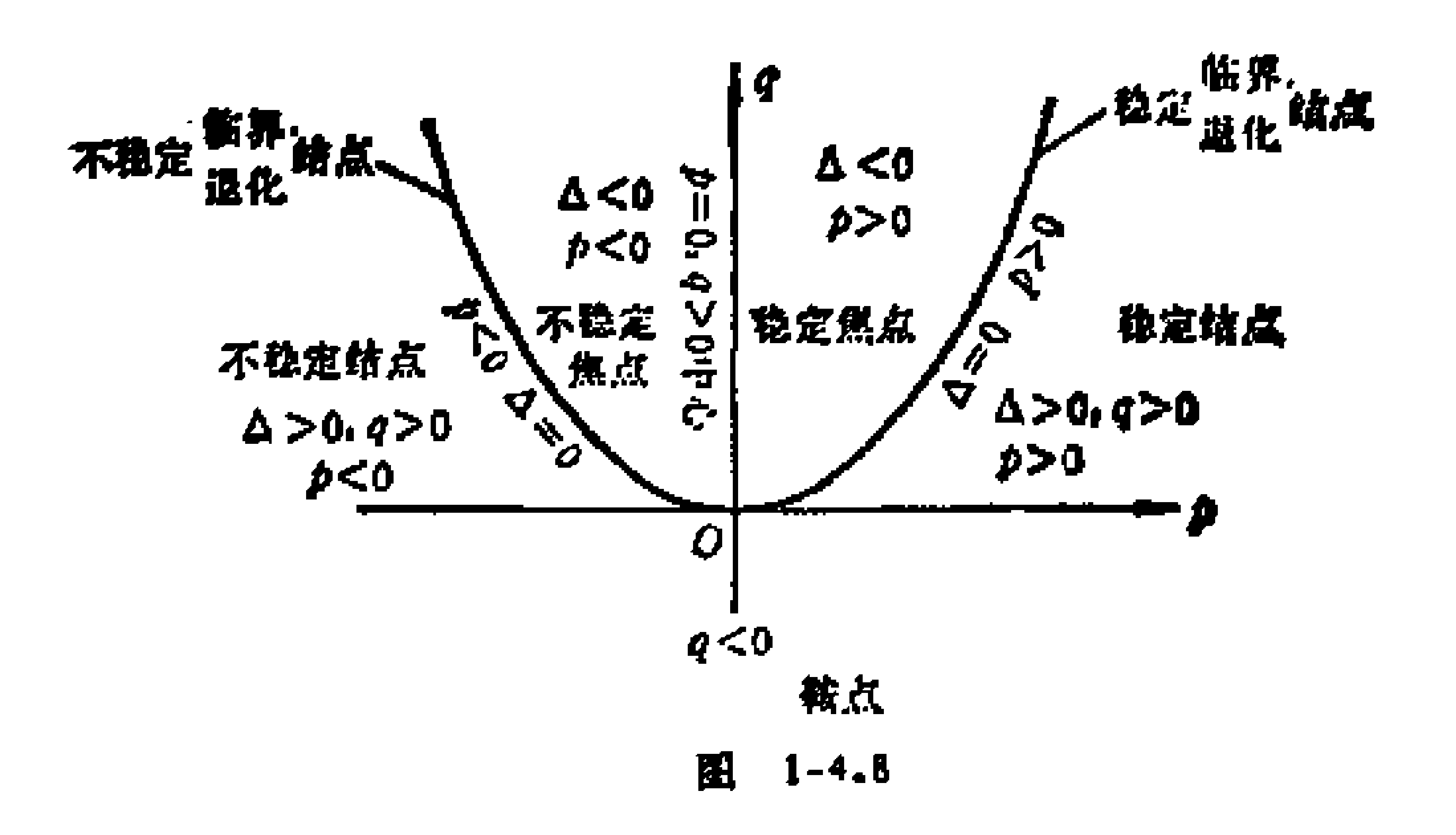


图 1-4.8

以上图形(图 1-4.8),指明参数与平衡点类型的关系。

1.4.5 非线性系统的平衡点

最后我们讨论非线性系统 (4.3). 设 (x_0, y_0) 是平衡点, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 邻域可微,则

$$\begin{cases} P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x, y) \\ Q(x, y) = c(x - x_0) + d(y - y_0) + g(x, y) \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

$$f(x, y) = o(r), \quad g(x, y) = o(r)$$

$$(r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \to 0)$$

这样(4.3)可改写成

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x, y) \\ \dot{y} = c(x - x_0) + d(y - y_0) + g(x, y) \end{cases} \tag{4.7}$$

若略去高阶项得

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ \dot{y} = c(x - x_0) + d(y - y_0) \end{cases} \tag{4.8}$$

我们称(4.8)为(4.7)的线性化系统,(4.7)为(4.8)的扰动系统。 若

$\det A \neq 0$，也称 (x_0, y_0) 是(4.7)的简单平衡点，此时易知 (x_0, y_0) 是 (4.3) 的孤立平衡点(即存在 (x_0, y_0) 的一个邻域，在此邻域内 (4.3) 无异于 (x_0, y_0) 的平衡点)。通过变量的平移总可把平衡点 (x_0, y_0) 移至原点，因此可设 $(x_0, y_0)=(0, 0)$。

下面给定线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by\\ \dot{y}=cx+dy\end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.9}$$

和相应的扰动系统

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by+f(x, y)\\ \dot{y}=cx+dy+g(x, y)\end{cases} \tag{4.10}$$

设 $O(0, 0)$ 是孤立平衡点(当 $f=o(r)$，$g=o(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时，$(0, 0)$ 一定是孤立平衡点)。U_0 是 $(0, 0)$ 的某邻域，通过 U_0 中任意一点的轨线为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，其极坐标方程是 $r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$，根据 U_0 中轨线与平衡点的关系来区分平衡点的类型。

焦点。$\exists U_0$，当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时 U_0 中的所有轨线有 $r(t)\to 0$，$\theta(t)\to+\infty$ 或 $-\infty$——$(0, 0)$ 为稳定(不稳定)焦点。

鞍点。存在 U_0 和不共线的方向 θ_1，θ_2，在 U_0 中恰有两条轨线当 $t\to+\infty$ 时分别沿 $\theta=\theta_1$，$\theta=\theta_1+\pi$ 趋于原点，恰有两条轨线当 $t\to-\infty$ 时分别沿 $\theta=\theta_2$，$\theta=\theta_2+\pi$ 趋于原点。其余轨线将双侧离开 U_0——$(0, 0)$ 为鞍点。当 $t\to+\infty$ 时趋于原点的轨线称为稳定流形，当 $t\to-\infty$ 时趋于原点的轨线称为不稳定流形。

结点(双切结点)。$\exists U_0$ 和不共线的方向 θ_1，θ_2，在 U_0 中当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时沿 $\theta=\theta_1$，$\theta=\theta_1+\pi$ 各只有一条轨线趋于原点，其余轨线都沿 $\theta=\theta_2$ 或 $\theta=\theta_2+\pi$ 趋于原点，而且沿它们的两侧均有轨线趋于原点。——$(0, 0)$ 为稳定(不稳定)结点。

临界结点(星形结点)。$\exists U_0$，当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时 U_0 中每条轨线都沿某确定方向趋于原点，沿任意方向 $\theta=\theta_0$，有且仅有一条轨线趋于原点——$(0, 0)$ 为稳定(不稳定)临界结点。

退化结点（单切结点）。$\exists U_0$ 和两个相反的方向 θ_0，$\theta_0+\pi$ 当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时，在 U_0 中一切轨线都沿 $\theta=\theta_0$，或 $\theta=\theta_0+\pi$ 趋于原点，轨线只能沿 $\theta=\theta_0$ 的某一侧，沿 $\theta=\theta_0+\pi$ 的另一侧趋于原点。——(0，0) 为稳定(不稳定)退化结点。

中心，$\exists U_0$，其中的每一轨线均是包围原点的闭轨。——(0,0) 为中心。

下面给出扰动项 f 和 g 的条件，使得扰动项不改变平衡点的类型。

我们假定

(H₁)　　$f(x,y)=o(r)$，$g(x,y)=o(r)$

$$(r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0)$$

(H₂)　$f(x,y)$，$g(x,y)$ 在原点邻域对 x，y 连续可微。

定理 1.4.3　设条件 (H₁)，(H₂) 成立，若 (0，0) 是 (4.10) 的焦点或鞍点或结点，则扰动项 f，g 不改变平衡点(0，0)的类型。

注　不改变平衡点的类型还包含有不改变稳定性及趋于平衡点的方向。

例 1　考察

$$\dot{x}=-x+\frac{2y}{\ln(x^2+y^2)},$$

$$\dot{y}=-y-\frac{2x}{\ln(x^2+y^2)} \tag{4.11}$$

的平衡点(0，0)。

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，(4.11) 化为

$$\dot{r}=-r,\quad \dot{\theta}=-\frac{1}{\ln r}$$

解得

$$r(t)=r(0)e^{-t},$$

$$\theta(t)=\theta(0)+\ln|t-\ln r(0)|-\ln|\ln r(0)|$$

当 $t\to+\infty$ 时 $r(t)\to 0$，$\theta(t)\to+\infty$。(0，0) 是(4.11)的焦点。

但它是相应的线性化方程的临界结点。

这里 $f(x,y)=\dfrac{2y}{\ln(x^2+y^2)}$，$g(x,y)=-\dfrac{2x}{\ln(x^2+y^2)}$。若令 $f(0,0)=0$，$g(0,0)=0$，则 f，g 满足 (H_1) 和 (H_2)。因此，要使扰动项不改变临界结点的类型，对 f 和 g 还要加条件。我们再假定

(H_3)　　$f(x,y)=o(r^{1+\delta})$，$g(x,y)=o(r^{1+\delta})(r\to 0)$

其中 δ 是某正数。

定理 1.4.4　设条件 (H_2)，(H_3) 成立，若 $(0,0)$ 是(4.10)的临界结点或退化结点，则扰动项 f，g 不改变平衡点$(0,0)$类型。

例 2　考察

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2)^n\cos\dfrac{n\pi}{2}+y(x^2+y^2)^n\sin\dfrac{n\pi}{2}\\[2ex] \dot{y}=x+y(x^2+y^2)^n\cos\dfrac{n\pi}{2}-x(x^2+y^2)^n\sin\dfrac{n\pi}{2}\end{cases}$$

的平衡点$(0,0)$，其中 n 为自然数。

化成极坐标形式

$$\dot{r}=r^{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2},\quad \dot{\theta}=1-r^{2n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

当 n 为奇数 $(n=2k+1)$ 时

$$\dot{r}=0,\quad \dot{\theta}=1-(-1)^k r^{4k+2}$$

于是$(0,0)$是中心。当 n 为偶数时，$(0,0)$是稳定焦点。而$(0,0)$是线性化方程

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x$$

的中心。

例 3　考察

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dot{y}=x+y(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

化成极坐标方程得

$$\dot{r} = r^3 \sin\frac{1}{r}, \quad \dot{\theta} = 1$$

由此得 $\theta = t + \theta_0$,

(1) $r = (k\pi)^{-1}$ $(k = 1, 2, 3\cdots)$ 是解;

(2) 当 $\frac{1}{\pi} < r < +\infty$ 时, $\dot{r} > 0$, $r(t)$ 单调上升;

(3) 当 $\frac{1}{2k\pi} < r < \frac{1}{(2k-1)\pi}$ 时, $\dot{r} < 0$, $r(t)$ 单调下降;

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = \frac{1}{2k\pi}$$

(4) 当 $\frac{1}{(2k+1)\pi} < r < \frac{1}{2k\pi}$ 时, $\dot{r} > 0$, $r(t)$ 单调上升

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = \frac{1}{2k\pi}$$

画出相图如图 1-4.9。这时平衡点(0, 0)是中心焦点。

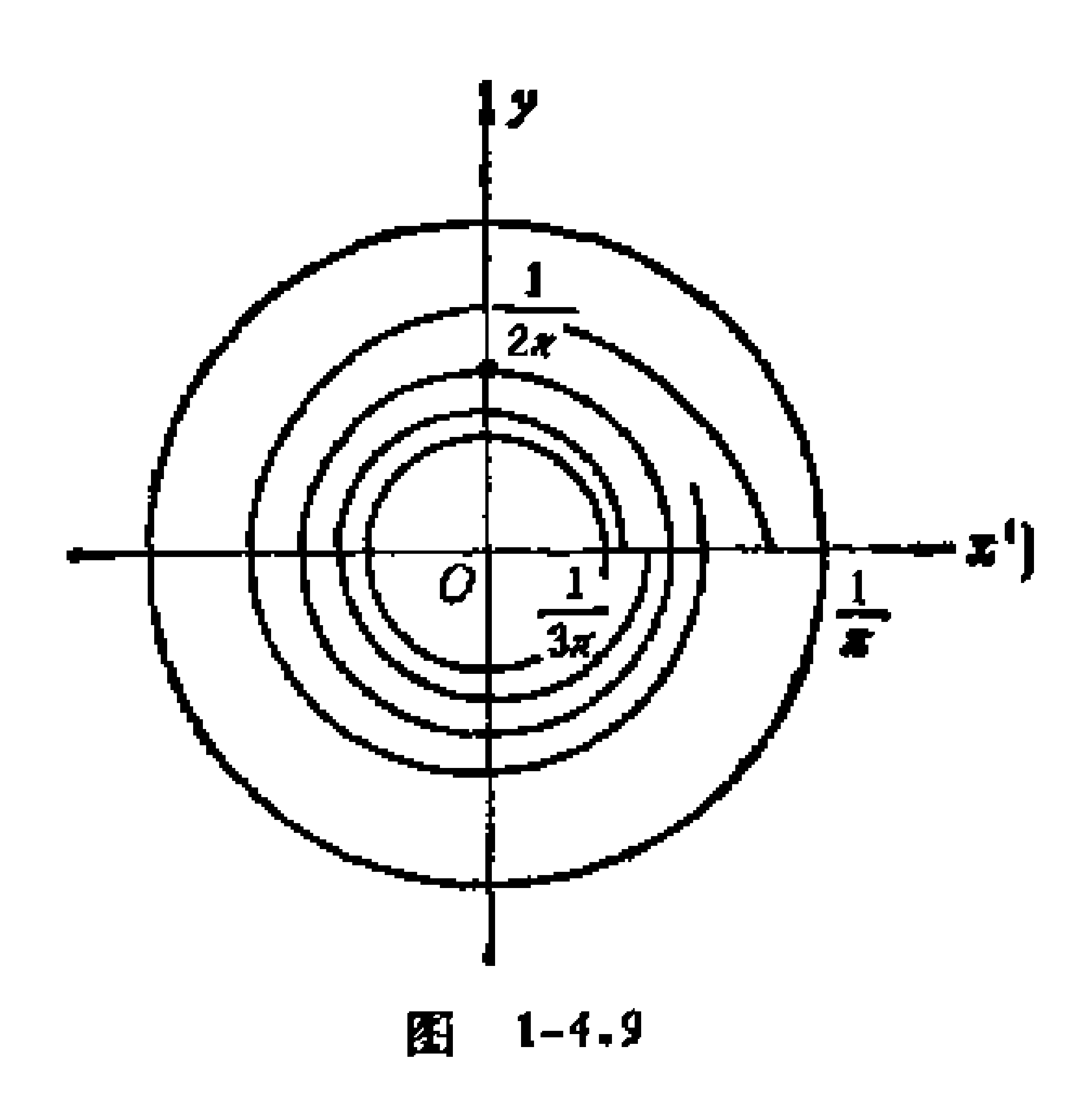


图 1-4.9

定理 1.4.5 设条件 (H_1) 成立，若(0, 0)是(4.9)的中心，则(0, 0)或是(4.10)的中心或是(4.10)的焦点或是中心焦点。若(4.10)右端解析时,则不出现中心焦点。

注 设条件 (H_1) 成立，(4.10)的轨线关于 x 轴(或 y 轴)对

称，若(0，0)是(4.9)的中心，则(0，0)也是(4.10)的中心。

1.5 二阶保守系统及其相图分析

由方程式

$$\ddot{x}+f(x)=0 \tag{5.1}$$

所描述的系统是保守系统，我们也称(5.1)为保守系统，其中 f 是单位质量所受的力，与 t，$\dot{x}$ 无关。设 $f\in C^1(\mathbf{R}^1)$。与(5.1)等价的方程组是

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-f(x)\end{cases} \tag{5.2}$$

(5.2)两式相除得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-f(x)}{y} \tag{5.3}$$

它表示相平面上的一个方向场，也是相轨线的微分方程式。

将(5.3)分离变量并积分一次得

$$\frac{y^2}{2}+u(x)=E \tag{5.4}$$

其中 $\frac{y^2}{2}=\frac{\dot{x}^2}{2}$ 是系统的动能，$u(x)=\int f(x)dx$ 是系统的势能，E 为积分常数，由初始条件确定，故此式表示系统的机械能守恒。

给定 E，(5.4)就是(5.2)的一条相轨线。下面我们讨论相轨线的性质。

1.5.1 相轨线的普遍性质

1° 系统的平衡点(奇点)均在 x 轴上，即满足

$$f(x)=0,\quad y=0$$

的点$(x,0)$为系统的平衡点。

2° 每条相轨线关于 Ox 轴对称。因为若(x,y)满足(5.4)则$(x,-y)$也满足(5.4)。

3° 在相轨线与 x 轴相交的常点处，相轨线的切线垂直于 x 轴。因为在这些点处 $\frac{dy}{dx}=\infty$。

4° 在相轨线与通过奇点且平行于 Oy 轴的直线的交点处，相轨线的切线与 Ox 轴平行． 因为在这些点上 $\frac{dy}{dx}=0$。

5° 当 t 增加时，在上半平面上，相点沿相轨线自左向右运动 $(x>0)$，在下半平面则相反 $(x<0)$。

1.5.2 平衡点邻域的相图

为了进一步讨论(5.2)的相图，先讨论它的平衡点．不妨设(0，0)是(5.2)的简单平衡点，即设 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$。若 $f'(0)<0$，则(0，0)是鞍点，若 $f'(0)>0$，则(0，0)是中心（由于轨线关于 x 轴对称，因而(0，0)不可能是焦点)。这就是说，若令 $u(x)=\int_0^x f(t)dt$，则当 $x=0$ 是 $u=u(x)$ 的极大点时，(0，0)是鞍点，当 $x=0$ 是 $u=u(x)$ 的极小点时(0，0)是中心。相应的轨线方程是(5.4)。最简单的情形是 $u(x)=kx^2$，即轨线方程是

$$kx^2+\frac{1}{2}y^2=E$$

它或是一族双曲线，或是一族椭圆。

引理 1.5.1 设在 $x=0$ 邻域内 $f\in C^2$，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则存在变换

$$\xi=xg(x),\quad \eta=y$$

使得轨线方程(5.4)变成

$$k\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2=E$$

其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 邻域属于 C^1，$k=\operatorname{sgn} f'(0)$

证明

$$u(x)-\int_0^1 \frac{d}{dt}u(tx)dt = x\int_0^1 f(tx)d(t-1)$$

$$= x^2\int_0^1 (1-t)f'(tx)dt = x^2\varphi(x)$$

其中

$$\varphi(x) = \int_0^1 (1-t)f'(tx)dt$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}f'(0) \neq 0$$

令 $g(x)=\sqrt{|\varphi(x)|}$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 邻域属于 C^1，同时

$$u(x) = x^2g^2(x)\cdot \operatorname{sgn}\varphi(x) = kx^2g^2(x)$$

证毕。

定义 1.5.2 设 U, V 分别是 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 中的一个区域，一一映射 $f:U\to V$ 满足 f 和 $f^{-1}:V\to U$ 都是可微的，则称 f 是一个微分同胚。

引理 1.5.1 指出，在微分同胚变换下，(5.2)简单平衡点邻域内的轨线或变成一族双曲线（是鞍点时）或变成一族椭圆（是中心时）。

1.5.3 整个相平面上的轨线

对于保守系统(5.2)，我们还可以通过系统的势能函数来分析全平面的相图。

方程(5.2)的第一积分是

$$\dot{x}^2 = 2[E-u(x)]$$

其中 E 为任意常数。

现给定 E，设当 $a<x<b$ 时 $u(x)<E$，a 可以为 $-\infty$，b 可以为 $+\infty$。给定初值 (x_0, y_0)，$x_0\in(a, b)$。

$$y_0 = \sqrt{2[E-u(x_0)]}$$

则初值问题

$$\begin{cases}\ddot{x}+f(x)=0\\ x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=y_0\end{cases}\tag{5.5}$$

的解 $x=\varphi(t)$ 由

$$t-t_0=\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}\tag{5.6}$$

给出.

由(5.6)确定的解的性质可用下述方法来刻划.

考虑点集 $\{x|u(x)\leqslant E\}$, 它或是空集(不考虑这种情形)或是整个 x 轴,或是不多于可数个两两无公共内点的闭区间的并集,其中可以有一个或两个是伸向无穷的:

$$\{x|u(x)\leqslant E\}=\sum I_i$$

其中每个 I_i 是闭区间, I_i^0 是 I_i 的内部,它们满足:

1° 当 $x\in I_i^0$ 时, $u(x)<E$.

2° 在 I_i 的端点处 $u(x)=E$.

3° 当 $i\neq j$ 时 I_i^0 与 I_j^0 不相交.

在 xu 平面上画出 $u=u(x)$ 的图形,并作直线 $u=E$, 它被能量曲线 $u=u(x)$ 分成许多线段(若不相交则指整条直线).我们考察其中的一些线段,它有如下性质:

1° 除了线段的端点,它严格地位于 $u=u(x)$ 的图形的上方.

2° 每个线段的有限端点必在 $u=u(x)$ 的图形上. 这些线段的集合记为 S.

集合 S 与 $\{I_i\}$ 可建立如下对应: S 中的每个线段在 x 轴上的投影必是某个区间 I_i. 反之亦然,见图 1-5.1.

现在考察每个区间 I_i, 简记为 I, $I^0=(a,b)$. 当 $x\in(a,b)$ 时 $u(x)<E$, 当 a 为有限时 $u(a)=E$, 当 b 为有限时 $u(b)=E$. 不同的区间 I 对应不同类型的解. E 是不是 $u(x)$ 的临界值,对解的类型有很大影响.

定义 1.5.3 若存在 x 使得 $u(x)=E$, $u'(x)=0$, 称 E 为 u 的临界值, x 为临界点.

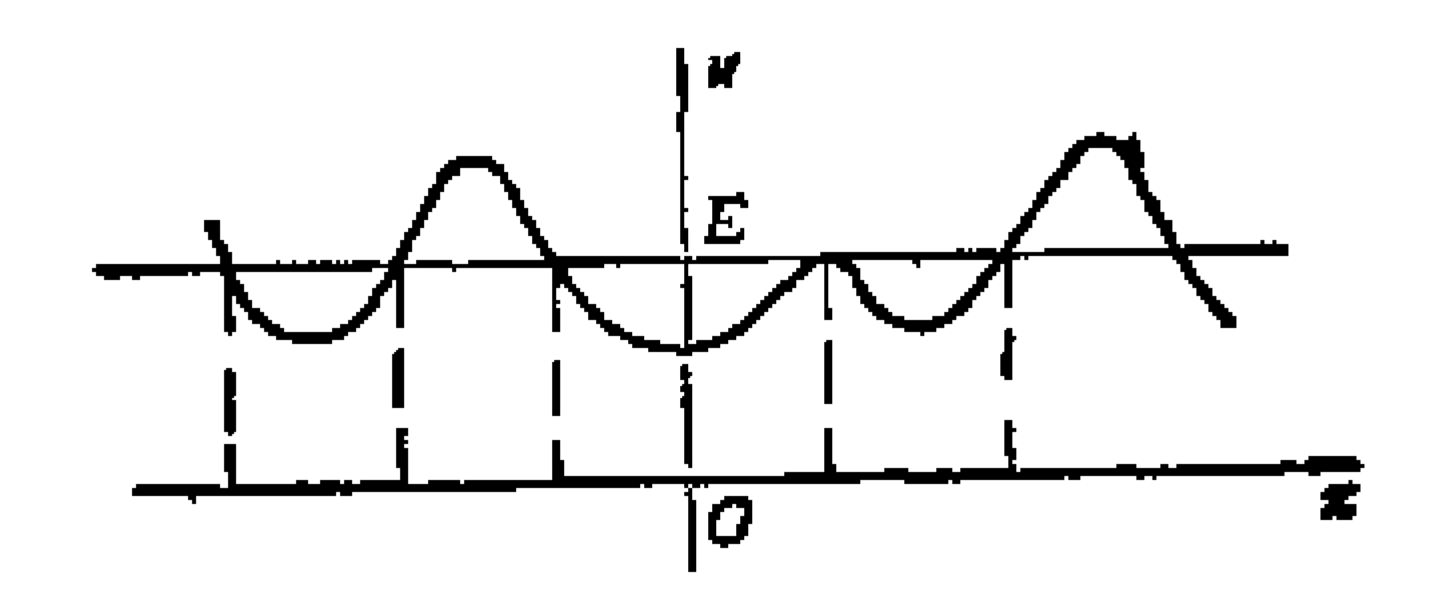


图 1-5.1

（一）E 不是临界值的情形。

1. a，b 为有限值，$u(a)=u(b)=E$，$u'(a)\neq 0$，$u'(b)\neq 0$。

这时，当 $a<x<b$ 时 $u(x)<E$。令

$$t_1=t_0+\int_{x_0}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}} \tag{5.7}$$

$$t_2=t_0+\int_{x_0}^{b}\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}} \tag{5.8}$$

则它们均收敛。于是由(5.6)确定了解

$$x=\varphi(t)(t_1\leqslant t\leqslant t_2),\ \varphi(t_1)=a,\ \varphi(t_2)=b.$$

令 $\frac{T}{2}=t_2-t_1$，则

$$\frac{T}{2}=\int_a^b\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}$$

因为 $\varphi'(t_1)=\varphi'(t_2)=0$，故可作延拓

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (t_1\leqslant t\leqslant t_2)\\ \varphi(2t_2-t) & \left(t_2\leqslant t\leqslant t_2+\frac{T}{2}=t_1+T\right)\end{cases}$$

它是(5.1)的解，满足

$$\Phi(t_1)=\Phi(t_1+T)$$

$$\dot\Phi(t_1)=\dot\Phi(t_1+T)=0$$

因此可延拓成以 T 为周期的周期解。对应的相轨线(5.4)是闭轨，如图 1-5.2 所示。

2. a 为有限，$b=+\infty$，$u(a)=E$，$u'(a)\neq 0$。

这里，当 $a<x<+\infty$ 时 $u(x)<E$，仍由(5.7)定义 t_1，(5.8)定义 t_2，其中 $b=+\infty$。若

$$\tilde{t}_2=\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}$$

为 $+\infty$，则由(5.6)确定的解的定义域是 $[t_1, +\infty)$，若 $\tilde{t}_2$ 收敛，则定义域是 $[t_1, t_2)$，这两种情形都有

$$\varphi(t_1)=a,\quad \varphi'(t_1)=0$$

$$\lim_{t\to t_2(+\infty)}\varphi(t)=+\infty$$

作延拓

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (t_1\leqslant t\leqslant t_2^*)\\ \varphi(2t_1-t) & (2t_1-t_2^*<t<t_1)\end{cases}$$

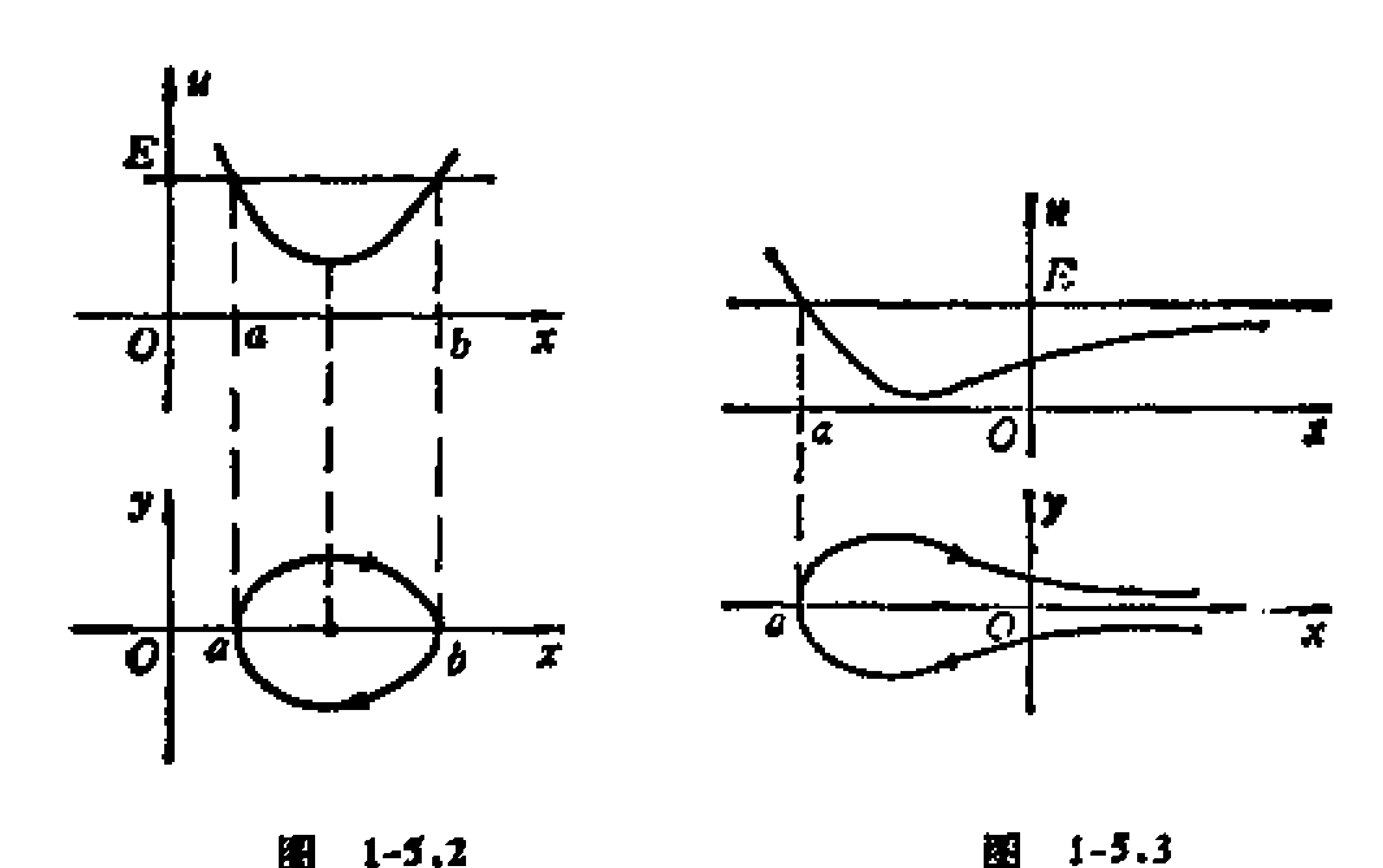


图 1-5.2　　　　图 1-5.3

其中 $t_2^*=t_2$ 或 $+\infty$，则 $\Phi(t)$ 是(5.1)的解，对应的相轨线如图 1-5.3 所示，沿 x 轴正向伸向无穷。

3. $a=-\infty$，b 为有限，$u(b)=E$，$u'(b)\neq 0$。

这里，当 $-\infty<x<b$ 时 $u(x)<E$。同前面类似，我们可得(5.1)满足初条件 $\Phi(t_0)=x_0$，$\Phi'(t_0)=y_0$ 的解 $\Phi(t)$，其定义域是 $(-\infty, t_2)$ 或 $(t_1, 2t_2-t_1)$。对应的相轨线类似于图 1-5.3 所示，但它沿 x 轴负向伸向无穷。

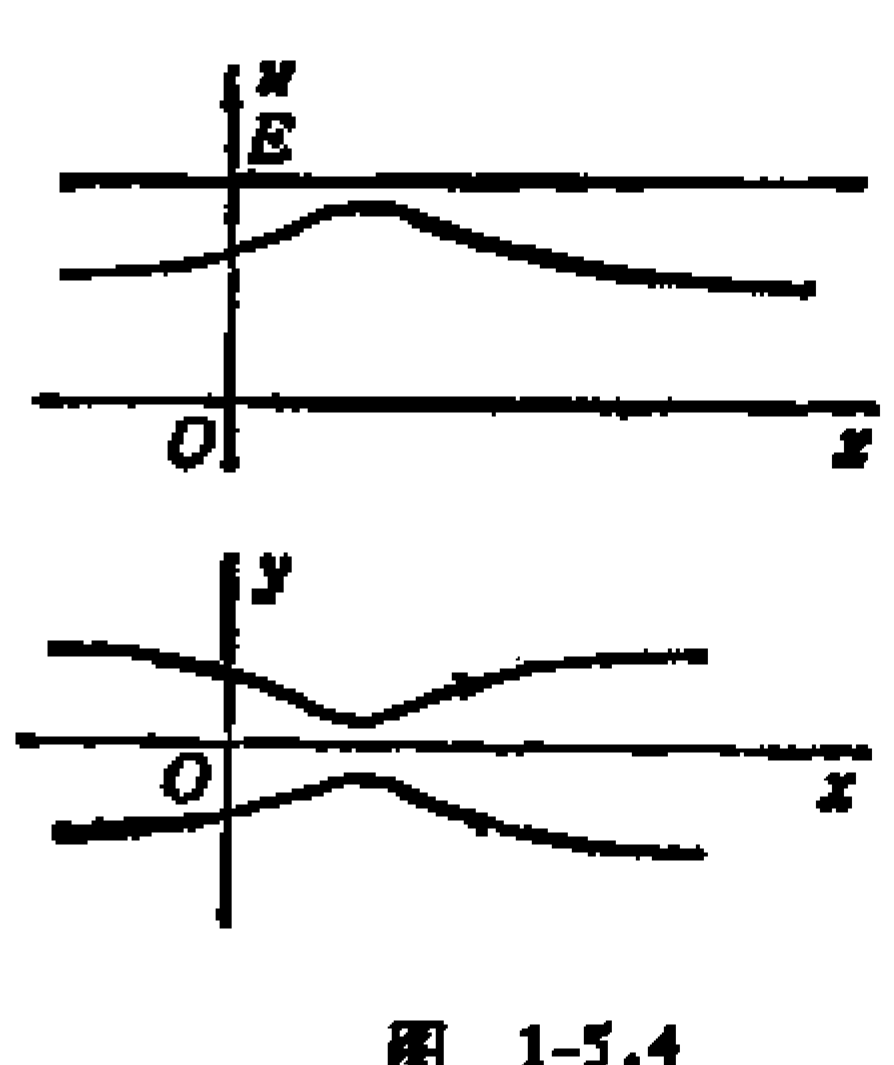


图 1-5.4

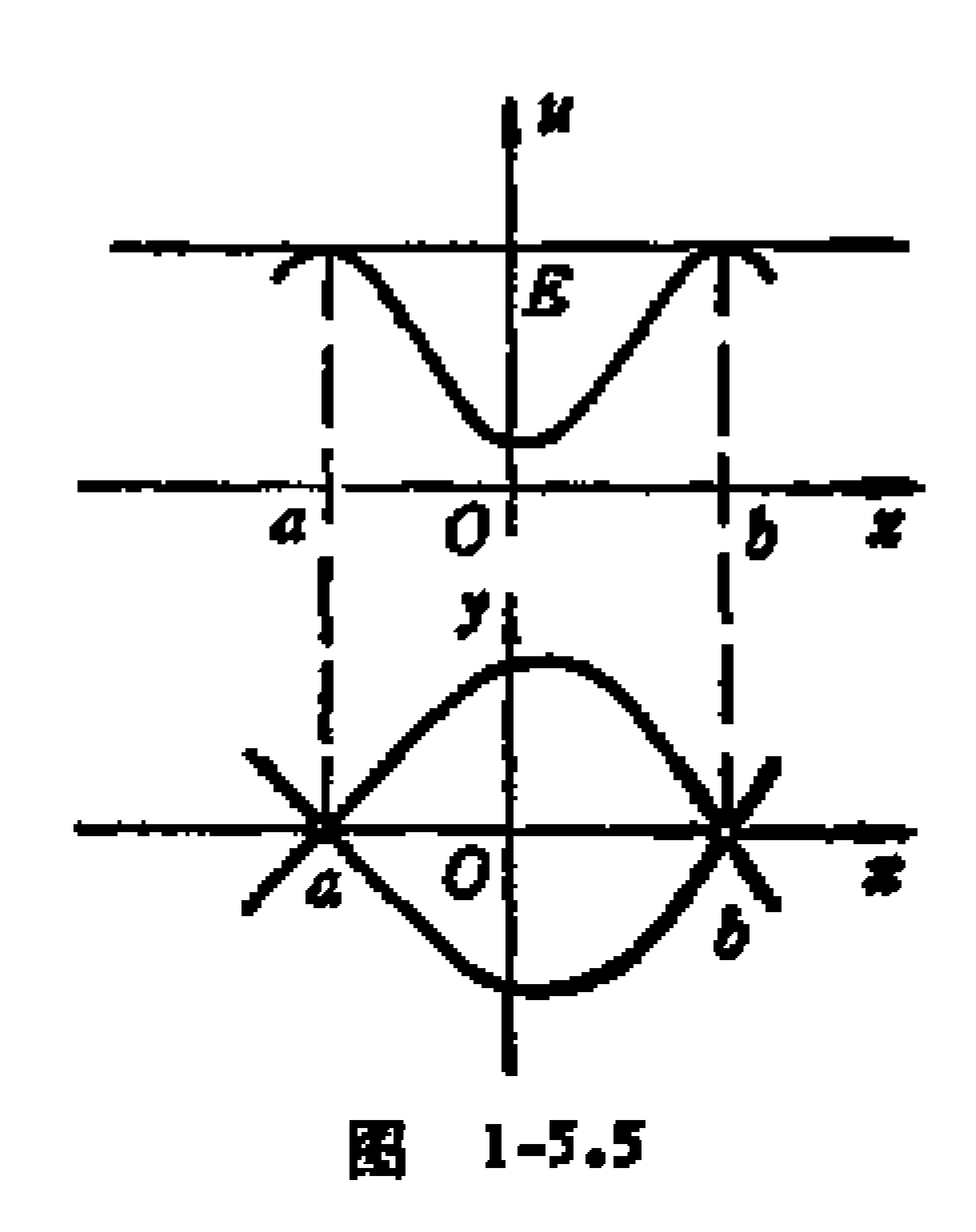


图 1-5.5

4. $a=-\infty$, $b=+\infty$

这里，当$-\infty<x<+\infty$ 时 $u(x)<E$。我们可得 (5.2) 的相轨线如图 1-5.4 所示，沿 x 轴正负向均伸向无穷。

（二） E 是临界值的情形。

1. a, b 均为有限，$u(a)=u(b)=E$。$u'(a)=u'(b)=0$。

这时

$$\int_{x_0}^{b}\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}=+\infty$$

$$\int_{x_0}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}=-\infty$$

于是由(5.6)确定了解 $\varphi(t)$。定义域为$(-\infty,+\infty)$，并且

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)=a,\qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=b$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\varphi'(t)=0$$

因此，(5.2) 有相轨线如图 1-5.5 所示。

2. a, b 均为有限，$u(a)=u(b)=E$，$u'(a)=0$，$u'(b)\neq 0$ 或 $u'(a)\neq 0$，$u'(b)=0$。

它们的相轨线分别见图 1-5.6 与图 1-5.7。

3. a, b 之一为临界点，另一为无穷。

这一情形留给读者自己讨论。

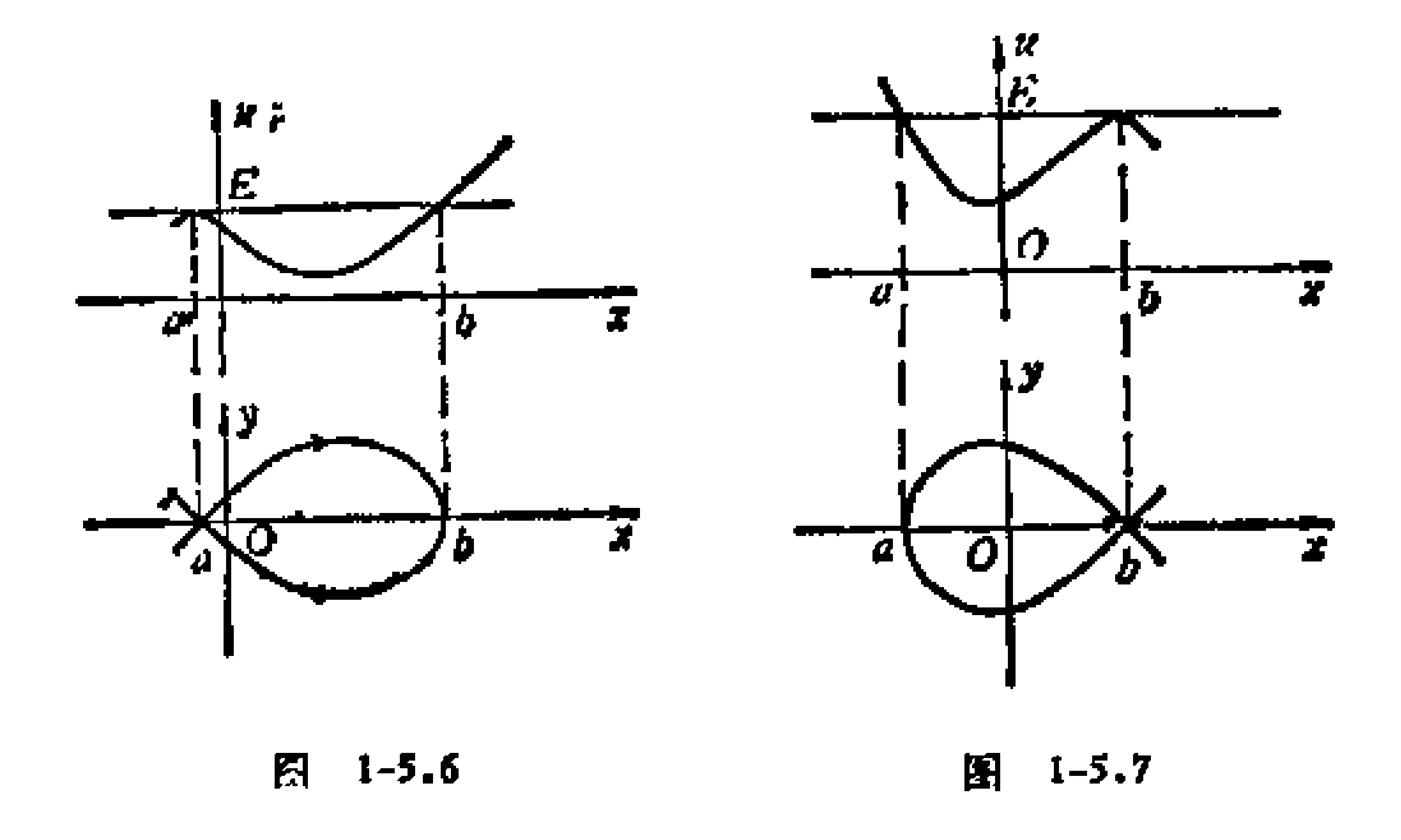


图 1-5.6　　　图 1-5.7

1.6 平面自治系统的周期解与极限集

1.6.1 概述

对于二维非线性自治系统

$$\dot{x}=f(x),x\in \Omega\subset R^2 \tag{6.1}$$

从它的平衡点的性质只能知道平衡点附近解的定性情况. 在许多问题中,考察全平面上解的情况比考察解的局部性质更为重要,但也更困难. 在研究(6.1)解的全局结构时,有两个问题特别重要:

1° (6.1) 任一解或某个解当 $t\to+\infty$时是否趋向于某个平衡点.

2° (6.1)是否存在闭轨.

二维常系数系统具有闭轨当且仅当它的特征方程有纯虚根,并且在这种情况下每一轨线都是闭轨.然而对于非线性系统 (6.1) 有与此截然不同的情况.

例 1 考察非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x[1-(x^2+y^2)]\\ \dot{y}=x+y[1-(x^2+y^2)]\end{cases} \tag{6.2}$$

在极坐标系下(6.2)化为

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}=r^2(1-r^2),\quad \frac{d\theta}{dt}=1$$

由此解得

$$r=[1+ce^{-2(t-t_0)}]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\theta=t-t_0$$

即

$$x=[1+ce^{-2(t-t_0)}]^{-\frac{1}{2}}\cos(t-t_0)$$
$$y=[1+ce^{-2(t-t_0)}]^{-\frac{1}{2}}\sin(t-t_0)$$

(6.2)有唯一闭轨即单位圆 $r=1$. 若 $c>0$, 解在单位圆内,当 $t\to+\infty$ 时绕向单位圆. 若 $-1<c<0$, 解在单位圆外,当 $t\to+\infty$时也绕向单位圆. 因此,(6.2)除唯一闭轨 $r=1$ 外, 其它轨线当 $t\to+\infty$ 时或从圆内或从圆外绕向单位圆(图1-6.1).

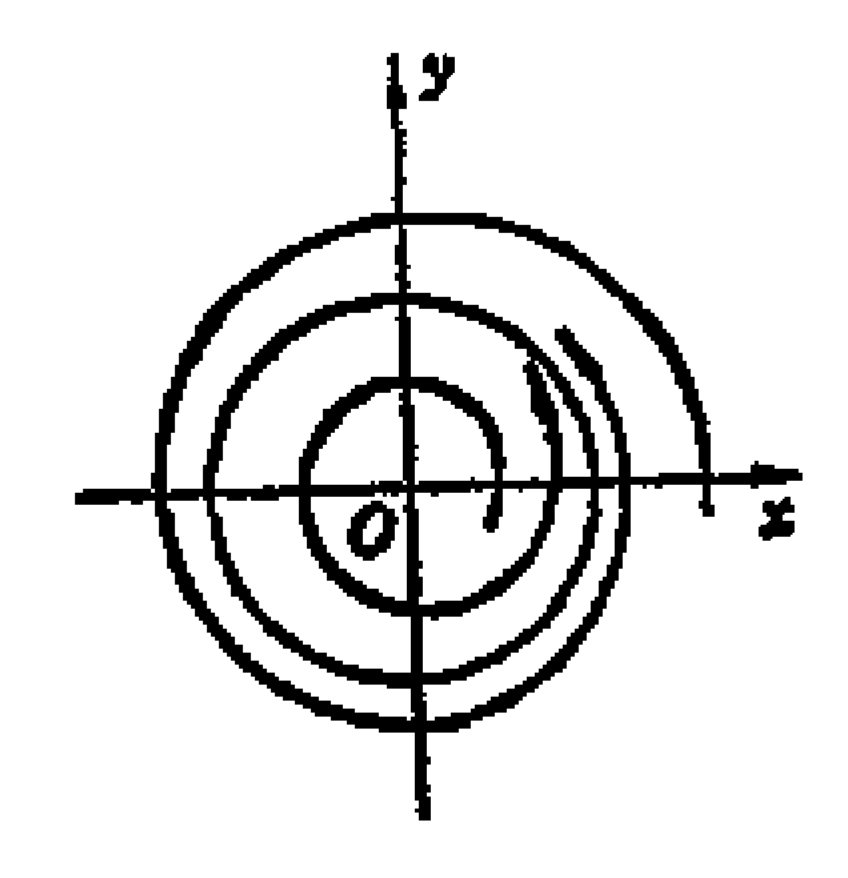


图 1-6.1

定义 1.6.1 设 Γ 是(6.1)的闭轨.

1° 若存在 Γ 的充分小邻域,其中无其它闭轨,则称 Γ 为孤立闭轨,又称为极限环.

2° 若存在包含极限环 Γ 的环形邻域 U, 使得从 U 内出发的轨线当 $t\to+\infty$时都渐近地接近 Γ, 则称极限环为稳定的,否则称为不稳定的.

3° 若极限环在它的邻域内某一侧出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时都渐近接近 Γ, 而另一侧出发的轨线都离开它, 则称 Γ 为半稳定的极限环.

上述稳定性是轨道稳定性,它有以下精确含意.

对定义域内任意包含 Γ 的开集 U, 存在一开集 V, $\Gamma\subset V\subset U$, 使得对任意 $x\in V$ 及 $t>0$, (6.1) 的解 $\varphi(t;x)\subset U$, 称 Γ 是稳定的. 若同时又有 $x\in V$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(\Gamma,\varphi(t;x))=0,$$

则称 Γ 是渐近稳定的,其中 $\rho(\Gamma,\varphi(t;x))$ 是轨线 Γ 与点 $\varphi(t,x)$

的距离.

注 以后我们总用 $\rho(\cdot,\cdot)$ 表示点与点，点与集合或集合与集合的距离.

极限环的稳定性是指轨道的渐近稳定性.

由此可见，上述提到的两个问题都是轨线的极限状态问题.因此本节的中心问题是讨论平面自治系统轨线的极限状态.

1.6.2 判别闭轨不存在的准则

先讨论平面系统

$$\dot{x}=P(x,y),\quad \dot{y}=Q(x,y)\quad ((x,y)\in\Omega\subset R^2)\tag{6.3}$$

在什么条件下一定无闭轨.

我们假定：Ω 是单连通的，$P,\ Q\in C^1(\Omega)$.

定理 1.6.2(Bendixson 法则) 设在 Ω 上 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ 不变号，且在 Ω 内所有子域中不恒为零，则(6.3)在 Ω 内无闭轨.

证明 若在 Ω 内有闭轨 Γ，由格林公式得

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_\Gamma Pdy-Qdx\tag{6.4}$$

D 为 Γ 所围的区域，$D\subset\Omega$. 由假设知，(6.4)左端不为零，但沿闭轨 Γ 有 $Pdy=Qdx$，故右端为零，得矛盾. 因此在 Ω 内无闭轨. 证毕.

定理 1.6.3 (Dulac 法则) 若存在恒正函数 $B(x,y)\in C^1(\Omega)$，使得 $\dfrac{\partial(PB)}{\partial x}+\dfrac{\partial(QB)}{\partial y}$ 在 Ω 上不变号且在 Ω 内所有子域上不恒为零，则(6.3)在 Ω 内无闭轨.

证明 只须注意

$$\dot{x}=PB,\quad \dot{y}=QB$$

与(6.3)有相同的相轨线.

例 2 设 $f(x)\in C^1$，常数 $c\neq 0$，则

$$\ddot{x}+c\dot{x}+f(x)=0$$

无非平凡周期解.（证明留作练习.）

例 3 设 $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，$a_{22}b_1(a_{21} - a_{11}) + a_{11}b_2(a_{12} - a_{22}) \neq 0$，则

$$\begin{cases} \dot{x} = [a_{11}x + a_{12}y + b_1]x \equiv P(x, y) \\ \dot{y} = [a_{21}x + a_{22}y + b_2]y \equiv Q(x, y) \end{cases}$$

在第一象限无闭轨.

证明

取 $B(x, y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$，可算得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(PB)}{\partial x} + \frac{\partial(QB)}{\partial y} \\ &= x^{\alpha-1}y^{\beta-1}[(\alpha a_{11} + \beta a_{21} + a_{11})x \\ &+ (\alpha a_{12} + \beta a_{22} + a_{22})y + \alpha b_1 + \beta b_2] \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{11} = 0 \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{22} = 0 \end{cases}$$

解得

$$\alpha = \frac{1}{\delta} a_{22}(a_{21} - a_{11})$$

$$\beta = \frac{1}{\delta} a_{11}(a_{12} - a_{22})$$

于是

$$\begin{aligned} \alpha b_1 + \beta b_2 = \frac{1}{\delta} [&a_{22}b_1(a_{21} - a_{11}) \\ &+ a_{11}b_2(a_{12} - a_{22})] \neq 0 \end{aligned}$$

因此证得结论.

定理 1.6.4 设 Ω 是单连通区域，P，$Q \in C^1(\Omega)$，在 Ω 内(6.3)无平衡点，则(6.3)在 Ω 内无闭轨.

证明　设 Ω 内(6.3)有闭轨 Γ，因为闭轨上任一点处向量 (P, Q) 都与闭轨的切线同方向，故点 M 沿 Γ 逆时针方向运动一周回到原处，点 M 的向量 (P, Q) 转过一圈（图 1-6.2）. 这个圈数又可用

积分表为

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} d\operatorname{arctg}\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2}$$

因为Ω内无平衡点，所以 $P^2+Q^2\neq 0$，右端积分为零，得矛盾．因此Ω内无闭轨．证毕．

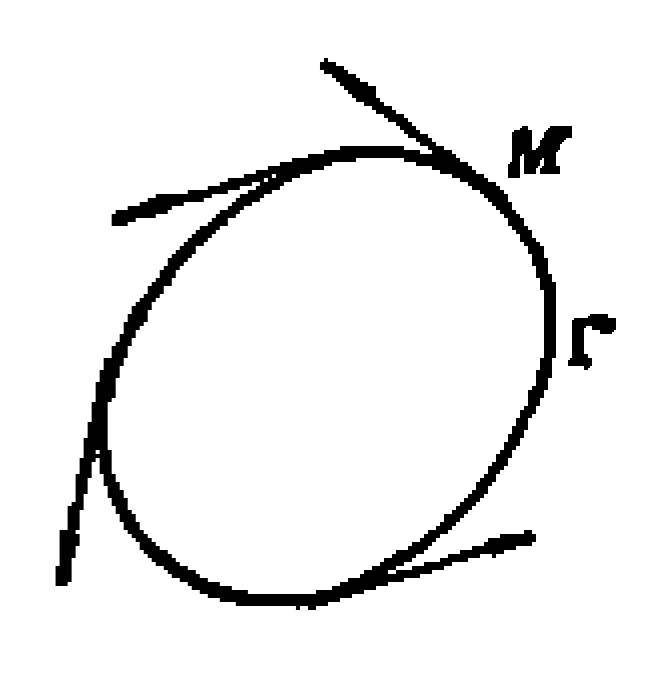


图 1-6.2

1.6.3 极限集的一般性质

现在研究平面系统 (6.1) 的轨线的极限点的集合．设 $f(x)\in C^1(\Omega)$，(6.1) 的解 $\varphi(t, x_0)(\varphi(0, x_0)=x_0)$ 定义在 $[0, +\infty)$或 $(-\infty, 0]$ 上．

定义 1.6.5 若存在序列 $t_n\to+\infty(-\infty)$，使得 $\varphi(t_n, x_0)\to\bar{x}$，则称 $\bar{x}$ 为 $\varphi(t, x_0)$ 的ω极限点 (α 极限点)，称 $\varphi(t, x_0)$ 的所有ω极限点 (α 极限点)的集合为 $\varphi(t,x_0)$的ω极限集 (α 极限集)，记为 $L_\omega(x_0)(L_\alpha(x_0))$．

定理 1.6.6 在有界闭区域内的正半轨 (负半轨)的 $\omega(\alpha)$ 极限集是非空的紧不变集而且是(区域)连通的．

证明　对正半轨给出证明．设 $\varphi(t, p)$ 属于Ω中某个有界闭区域 G，其中 $t\geqslant 0$．显然 $L_\omega(p)$ 是非空的，$L_\omega(p)\subset G$．

(1) $L_\omega(p)$ 是紧的．设 x 是 $L_\omega(p)$ 的极限点，于是$\exists\, x_n\in L_\omega(p)$，$|x_n-x|<\frac{1}{n}$．从而 $\exists t_n>n$，使得$|x_n-\varphi(t_n, p)|<\frac{1}{n}$，因此 $|x-\varphi(t_n, p)|<\frac{2}{n}$，即 $x\in L_\omega(p)$，$L_\omega(p)$ 是闭的．它显然又是有界的，因而是紧集．

(2) $L_\omega(p)$ 是不变集．设 $x\in L_\omega(p)$ 则存在 $t_n\to+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(t_n, p)=x\in G\subset\Omega$．于是存在解 $\varphi(t, x)$，设最大存在区间是 (a, b)，于是对 $\forall t\in(a, b)$，

$$\begin{aligned}\varphi(t, \varphi(t_n, p)) &= \varphi(t+t_n, p)\\ &\to\varphi(t, x)\in L_\omega(p)(n\to+\infty)\end{aligned}$$

因为 $L_\omega(p)\subsetneq G$，所以 $\varphi(t,x)\in G$，于是 $a=-\infty$，$b=+\infty$，对 $\forall t\in(-\infty,+\infty)$，$\varphi(t,x)\in L_\omega(p)$，即 $L_\omega(p)$ 是不变集.

(3) $L_\omega(p)$ 是连通的. 若它不连通，则存在 Ω_1，Ω_2 是闭集，$L_\omega(p)=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\rho(\Omega_1,\Omega_2)=\rho_0>0$. 分别作 Ω_1，Ω_2 的 $\frac{\rho_0}{3}$ 邻域 K_1，K_2，$K_1\cap K_2=\phi$，因为 Ω_1、Ω_2 的点是 $\varphi(t,p)$ 的 ω 极限点，所以 $\exists t_n'\to+\infty$，$t_n''\to+\infty$，使得 $\varphi(t_n',p)\in K_1$，$\varphi(t_n'',p)\in K_2$，可选择 t_n'，t_n'' 满足，$t_n'<t_n''<t_{n+1}'$ $(n=1,2,\cdots)$. 因为 $\rho(\varphi(t,p),\Omega_1)$ 是 t 的连续函数，同时又有

$$\rho(\varphi(t_n',p),\Omega_1)<\frac{\rho_0}{3}$$

$$\rho(\varphi(t_n'',p),\Omega_1)>\frac{2}{3}\rho_0$$

所以 $\exists t_n$，$t_n'<t_n<t_n''$，使得

$$\rho(\varphi(t_n,p),\Omega_1)=\frac{1}{2}\rho_0$$

点列 $p_n=\varphi(t_n,p)$ 存在收敛子列，不妨仍记为 p_n. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(t_n,p)=p_0\in L_\omega(p)$$

$$\rho(p_0,\Omega_1)=\frac{\rho_0}{2}$$

又 $\rho(p_0,\Omega_2)\geqslant\frac{\rho_0}{2}$，即 $p_0\bar\in\Omega_1$，$p_0\bar\in\Omega_2$，与 $L_\omega(p)=\Omega_1\cup\Omega_2$ 矛盾，因此 $L_\omega(p)$ 连通. 证毕.

定理 1.6.7 $L_\omega(x_0)$ $(L_\alpha(x_0))$ 只有唯一的一个点 $\bar{x}$ 的充要条件是:

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,x_0)=\bar{x}\left(\lim_{t\to-\infty}\varphi(t,x_0)=\bar{x}\right)$$

证明 充分性显然，只须证必要性.

设 $L_\omega(x_0)=\{\bar{x}\}$. 若结论不对，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$t_n'\to\infty$ 使得 $|\varphi(t_n';x_0)-\bar{x}|\geqslant\varepsilon_0$. 但 $\bar{x}$ 是 ω 极限点，所以 $\exists t_n''>t_n'$，使得

$$|\varphi(t_n'', x_0) - \bar{x}| < \varepsilon_0.$$

由于 $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}|$ 对 t 连续,故 $\exists\, t_n,\ t_n' \leqslant t_n < t_n''$ 使得 $|\varphi(t_n, x_0) - \bar{x}| = \varepsilon_0$. 因为 $\varphi(t_n, x_0)$ 有界,必 $\exists$ 收敛子列,不妨设

$$\varphi(t_n, x_0) \to x^*,$$

于是 $|\bar{x} - x^*| = \varepsilon_0$, $x^* \in L_\omega(x_0)$ 与 $L_\omega(x_0) = \{\bar{x}\}$ 矛盾. 因此 $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}$.

如果(6.1)是 n 维自治系统,定理1.6.6,定理1.6.7仍然是对的.

1.6.4 无切线段及其性质

为了研究平面自治系统的极限集的特殊性质,我们引进无切线段并研究它的性质.

定义 1.6.8 S 是包含点 x 的闭线段,S 不含(6.1)的平衡点,在 S 上的每一点处,(6.1)的轨线不与之相切,称此线段为 f 或(6.1)(在点 x)的无切线段.

由于 f 是连续的. 对于所有常点 ξ 和所有不平行于 $f(\xi)$ 的方向 η,存在通过 ξ 以 η 为方向的无切线段 S;(6.1)与 S 相交的轨线都在 t 增加时按同一方向由 S 之一侧穿到另一侧.

下面进一步研究轨线与无切线段相交时的一些性质.

引理 1.6.9 设 S 是 f 在点 $\bar{x}$ 的无切线段,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $\bar{x}$ 的 δ 邻域 $U_\delta(\bar{x})$ 及 $U_\delta(\bar{x})$ 上的 C^1 函数 $T(x)$,满足

$$T(\bar{x}) = 0,\quad |T(x)| < \varepsilon \text{ 且 } \varphi(T(x), x) \in S.$$

证明 设 S 的方程是 $a \cdot (x - \bar{x}) = 0$,$a$ 是 S 的法向量. 令

$$G(x, t) = a \cdot (\varphi(t, x) - \bar{x})$$

则

$$G(\bar{x}, 0) = 0,\ \frac{\partial G(\bar{x}, 0)}{\partial t} = a \cdot f(\bar{x}) \neq 0$$

(因 S 是无切线段). 在 $(\bar{x}, 0)$ 邻域 $G \in C^1$,由隐函数定理知,$\exists T(x) \in C^1(U_\delta(\bar{x}))$, $T(\bar{x}) = 0$, $G(x, T(x)) = 0$,即 $\varphi(T(x), x) \in S$,再由连续性,只要 δ 充分小,当 $x \in U_\delta(\bar{x})$ 时 $|T(x)| < \varepsilon$. 证毕.

定义 1.6.10 设 $x_n=\varphi(t_n,\xi)$，若 t_n 单调，则称 $\{x_n\}$ 在解曲线 $\varphi(t,\xi)$ 上单调．设 $\{x_n\}$ 在直线段 l 上，直线方程是

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1),\quad x_n=x_1+\lambda_n(x_2-x_1)$$

若 λ_n 单调，则称 $\{x_n\}$ 沿线段 l 单调．

引理 1.6.11 设 S 是 f 的无切线段．则轨线 C 的有限弧段只能与 S 交于有限个点．若轨线 C 与 S 的交点 x_1，x_2，x_3，$\cdots$ 沿轨线单调，则在 S 上也单调．

证明　先证前半部分．设轨线 C 的有限弧段 $A:x=\varphi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，若 A 与 S 交于无穷多个点 $p_n=\varphi(t_n)\quad(\alpha\leqslant t_n\leqslant\beta)$，$t_n$ 中存在收敛子列，不妨设 $t_n\to t^*\in[\alpha,\beta]$，$t_n\neq t^*$．于是

$$\varphi(t_n)\to\varphi(t^*)=p^*\in S,p^*\in A,$$

同时

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi(t_n)-\varphi(t^*)}{t_n-t^*}=\varphi'(t^*)$$

$$=f(\varphi(t^*))=f(p^*)$$

而右端与 S 平行，故 $f(p^*)$ 与 S 平行，与 S 是无切线段矛盾．

为证后半部分，只须考虑 x_1，x_2，x_3 三点就行了．记Σ为简单闭曲线：$\Sigma=S_{12}\cup C_{12}$．其中 S_{12} 是无切线段 S 在 x_1，x_2 之间的部分，C_{12} 是轨线 C 在 x_1，x_2 之间的部分．Σ 把平面分成两部分，它围成的有界闭区域记为 D，它只有两种情形，或在 x_2 处轨线离开 D 或在 x_2 处进入 D，如图 1-6.3 所示．现设轨线在

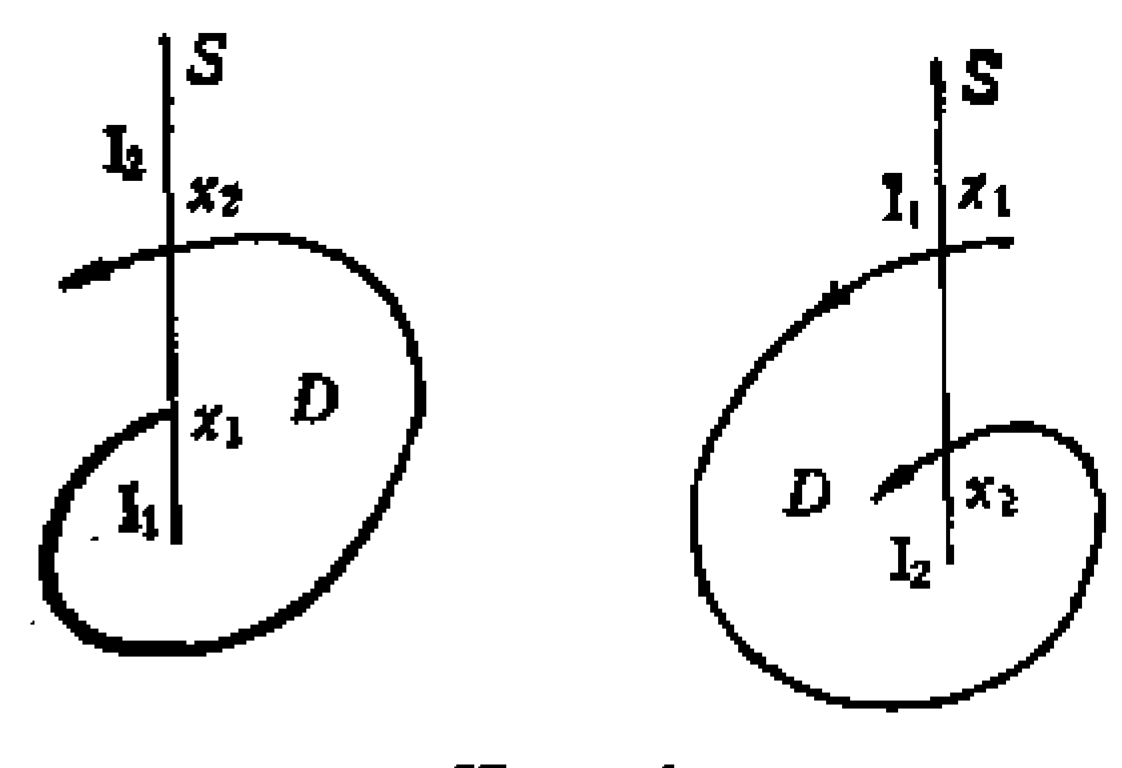


图 1-6.3

x_2 处离开 D（相反的情形可类似讨论）．因轨线经过无切线段时都由同一侧向着另一侧，于是轨线不可能经 S_{12} 进入 D．而 C_{12}

是轨线，轨线不能相交，所以轨线不能经 C_{12} 进入 D. 因此，对一切 $t>0$, $\varphi(t, x_2)\in R^2\backslash D$, 而 $x_3=\varphi(\alpha, x_2)$, $\alpha>0$. 故 $x_3\in R^2\backslash D$, $S\backslash S_{12}$ 由两个线段 I_1, I_2 组成，它们分别以 x_1, x_2 为端点. 因 I_2 在D外，而 I_1 在D内，所以 $x_3\in I_2$. 证毕.

下面考察极限轨线与无切线段相交时的性质.

引理 1.6.12 设 $y\in L_\omega(x)\cup L_\alpha(x)$, 则过 y 的轨线与任意无切线段最多交于一点.

证明 不妨设 $y\in L_\omega(x)$. 记 S 为无切线段. 设 $y_1, y_2\in\varphi(t, y)$, $y_1\neq y_2$, $y_1, y_2\in S$. 又令 U_k 是 y_k 的邻域，如引理 1.6.9 所指出的，其中取 $\varepsilon=1$, 可取 U_1 与 U_2 不相交. 再令线段 $J_k=U_k\cap S$, 则 J_1 与 J_2 也不交.

因为 $L_\omega(x)$ 是不变集，所以 $\varphi(t, y)\in L_\omega(x)$, 特别有 y_1, $y_2\in L_\omega(x)$, $\exists t_n$, $t'_n\to+\infty$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(t_n, x)=y_1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(t'_n, x)=y_2$$

即过 x 的轨线无穷多次进入 $U_k(k=1, 2)$, 由引理 1.6.9, 轨线上有无穷多个点在 J_k 中，我们可取

$$t_n+2<t'_n<t_{n+1}+2<t'_{n+1}$$

于是存在一个点列

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$$

在从 x 出发的轨线上单调，但 $a_n\in J_1$, $b_n\in J_2$, 因 J_1, J_2 不交，这个点列在 S 上不单调，故得矛盾. 证毕.

1.6.5 Poincaré-Bendixson 定理

我们的最终目的要指出极限轨线与平衡点和闭轨的关系.

引理 1.6.13 设 $L_\omega(x)(L_\alpha(x))$ 有界，不包含平衡点. 若 $y\in L_\omega(x)$ $(y\in L_\alpha(x))$, 则过 y 的轨线是闭轨 γ, 且 $\gamma\in L_\omega(x)$ $(\gamma\in L_\alpha(x))$.

证明 由极限集的性质可得 $L_\omega(y)$ 是 $L_\omega(x)$ 的非空子集.

取 $z\in L_\omega(y)$，则 z 不是平衡点. 过 z 存在无切线段 S. 令 U 是由引理 1.6.9 所给出的邻域(取 $\varepsilon=1$)，$U\cap S=J$，因为 $z\in L_\omega(y)$，所以 $\exists\ t_n\to+\infty$，$\varphi(t_n,\ y)\in U$. 由引理 1.6.9 知，可找到 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}^1$，$\alpha<\beta$，使得 $\varphi(\alpha,y)$，$\varphi(\beta,y)\in J$. 由引理 1.6.12，$\varphi(\alpha,y)=\varphi(\beta,y)$，因为 y 不是平衡点，所以 $\varphi(t,y)$ 是非平凡周期解，其轨线 γ 是闭轨. 显然 $\gamma\subset L_\omega(x)$.

引理 1.6.14 设 γ 为闭轨，$\gamma\subset L_\omega(x)$ ($\gamma\subset L_\alpha(x)$)，则

$$\gamma=L_\omega(x)\ \ (\gamma=L_\alpha(x))$$

证明 设 $\gamma\subset L_\omega(x)$ 而 $\gamma\neq L_\omega(x)$，则 $\exists\xi_0\in\gamma$，$x_n\in L_\omega(x)\setminus\gamma$，$x_n\to\xi_0$. 若不然，对 $\forall\xi\in\gamma$，存在 ξ 的邻域 $U(\xi)$ 除 γ 外不含 $L_\omega(x)$ 中的点. 由有限覆盖定理，存在 γ 的邻域，其中不含除 γ 外 $L_\omega(x)$ 中的点，这与 $L_\omega(x)$ 是连通的矛盾了.

存在过 ξ_0 的无切线段 S，由引理 1.6.9 知，当 n 充分大后，$\exists\tau_n$，使 $\varphi(\tau_n,\ x_n)=x_n'\in S$. 因为 $x_n\in L_\omega(x)$，所以 $x_n'\in L_\omega(x)$. 由引理 1.6.12，当 n 充分大后，$x_n'=\xi_0$，由此得

$$x_n=\varphi(-\tau_n,\ x_n')=\varphi(-\tau_n,\ \xi_0)\in\gamma,$$

与 $x_n\bar{\in}\gamma$ 矛盾了. 这就证明了 $\gamma=L_\omega(x)$. 证毕.

引理 1.6.15 设 $L_\omega(x)=\gamma(L_\alpha(x)=\gamma)$ 为闭轨，则

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(\varphi(t,\ x),\ \gamma)=0$$

$$(\lim_{t\to-\infty}\rho(\varphi(t,\ x),\ \gamma)=0)$$

证明 取 $z\in\gamma$，令 S 是 z 处的无切线段. 由引理 1.6.9，存在 z 的邻域 $U_\delta(z)$，当 $x\in U_\delta(z)$ 时 $|T(x)|<\sigma$，$\varphi(T(x),\ x)\in S$，又由于 z 是极限点，所以存在一串 $t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$，使得

$$x_n=\varphi(t_n,\ x)\in S$$

而当 $t\in(t_n,\ t_{n+1})$ 时 $\varphi(u;\ x)\bar{\in}S$. 由引理 1.6.11，x_n 在 S 上单调有界，所以存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(t_n,\ x)=\bar{z}\in L_\omega(x)$ 因为 $L_\omega(x)=\gamma$，所以 $\bar{z}\in\gamma\cap S$，$\bar{z}=z$，即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n,\ x)=z$$

正数集合 $\{t_{n+1}-t_n\}$ 是有上界的。因为 $x\in\gamma$，$\exists\lambda>0$，$\varphi(\lambda,x)=x$。由解对初值的连续性，当 n 充分大后，$\varphi(\lambda,x_n)\in U_\delta(x)$，于是 $\exists t$，$\varphi(\lambda+t,x_n)\in S$，其中 $|t|<\sigma$。因此对充分大的 n

$$t_{n+1}-t_n<\lambda+\sigma$$

不妨认为上式对一切 n 成立。

由解对初值的连续依赖性，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $|x_n-x|<\eta$，且当 $0\leqslant t\leqslant\lambda+\sigma$ 时，有

$$|\varphi(t,x_n)-\varphi(t,x)|<\varepsilon \tag{6.5}$$

对此 $\eta>0$，$\exists n_0$，当 $n\geqslant n_0$ 时 $|x_n-x|<\eta$，所以当 $n\geqslant n_0$，$0\leqslant t\leqslant\lambda+\sigma$ 时(6.5)成立。

令 $T=t_{n_0}$，对一切 $t\geqslant T$，必有 $t\in[t_n,t_{n+1})(n\geqslant n_0)$。此时

$$\begin{aligned}&\rho(\varphi(t,x),\gamma)\\&\leqslant|\varphi(t,x)-\varphi(t-t_n,x)|\\&=|\varphi(t-t_n,x_n)-\varphi(t-t_n,x)|\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant t-t_n\leqslant t_{n+1}-t_n\leqslant\lambda+\sigma$，$n\geqslant n_0$。因此当 $t\geqslant T$ 时

$$\rho(\varphi(t,x),\gamma)<\varepsilon$$

证毕。

由前面三个引理立即可得

定理 1.6.16 (Poincaré-Bendixson) 设正半轨（负半轨）Γ：$\varphi(t,x)$ 有界，$L_\omega(x)(L_\alpha(x))$ 不含平衡点，则或者 Γ 本身是闭轨，或者 $L_\omega(x)(L_\alpha(x))$ 是一个闭轨 γ，当 $t\to+\infty$ ($t\to-\infty$) 时 Γ 趋于 γ。

1.6.6 Poincaré-Bendixson 定理的应用

(一) 有界半轨极限集的结构.

由 P-B 定理(定理 1.6.16) 知，在有界区域内，所有轨线的极限集或是闭轨或包含平衡点。含平衡点时则不可能再含闭轨。因为闭轨与其它轨线不连通。这就是说，若极限集含平衡点又含极限轨线，则极限轨线一定是非闭轨。进一步可证：

引理 1.6.17 设非闭轨 $\Gamma \subset L_\omega(x)$，则 Γ 的极限集只含平衡点.

证明 设 x_0 是 Γ 的极限点. 若 x_0 不是平衡点,则令 S 是 x_0 处的无切线段，由极限点的定义及引理 1.6.9 知，Γ 与 S 交于一串点,因为 Γ 非闭,所以这些点是不同的,与引理 1.6.12 矛盾. 证毕.

此引理表明：有界极限集中有非闭轨时也必有平衡点，这些平衡点同时是这些极限轨线的极限点.

总结上述讨论得

定理 1.6.18 (有界半轨极限集的结构) 有界区域内半轨线的极限集只可能是以下三类型之一：(1) 平衡点，(2) 闭轨线,(3) 平衡点与当 $t\to+\infty$，$t\to-\infty$ 时趋于这些平衡点的轨线.

还可进一步指出,类型(3)的极限集中的平衡点不可能是焦点或结点. 因为所有轨线只要进入这种平衡点的充分小邻域之内，它就趋于这个平衡点,而不可能有其它极限点了,所以如果平衡点是简单平衡点,它必是鞍点,而极限集中那些非闭轨线是鞍点的分界线.

(二) 极限环的存在性与稳定性.

引理 1.6.19 设 γ 是闭轨,点 $x\bar{\in}\gamma$ 使 $\gamma=L_\omega(x)$ (或 $L_\alpha(x)$). 则 γ 的一侧(点 x 所在的一侧)附近的轨线当 $t\to+\infty$ (或 $t\to-\infty$) 时都趋于 γ.

证明 按引理 1.6.15 的证明,若 $z\in\gamma$，S 是 z 处的无切线段，则取 S 上点 x_n 与 x_{n+1} 之间的一段与轨线 $\varphi(t, x)$ 在 x_n 与 x_{n+1} 之间的一段，它们与 γ 一起围成正不变集 D. 因非平衡点是开集 (即平衡点是闭集)，故取 n 充分大，D 内无平衡点 (图 1-6.5).

从 D 内任一点 y 出发的轨线有界，$L_\omega(y)$ 不含平衡点，由 Poincar-Bendixson 定理知，$L_\omega(y)$ 是闭轨. 因为 $\rho(\varphi(t, x), \gamma)\to 0$, 所以 D 内无闭轨. 于是 $\gamma=L_\omega(y)$. 证毕.

引理 1.6.19 中的闭轨 γ 是否为极限环(孤立闭轨)呢? 事实上当平面系统右端解析时，所有闭轨或为极限环或在它的充分小邻

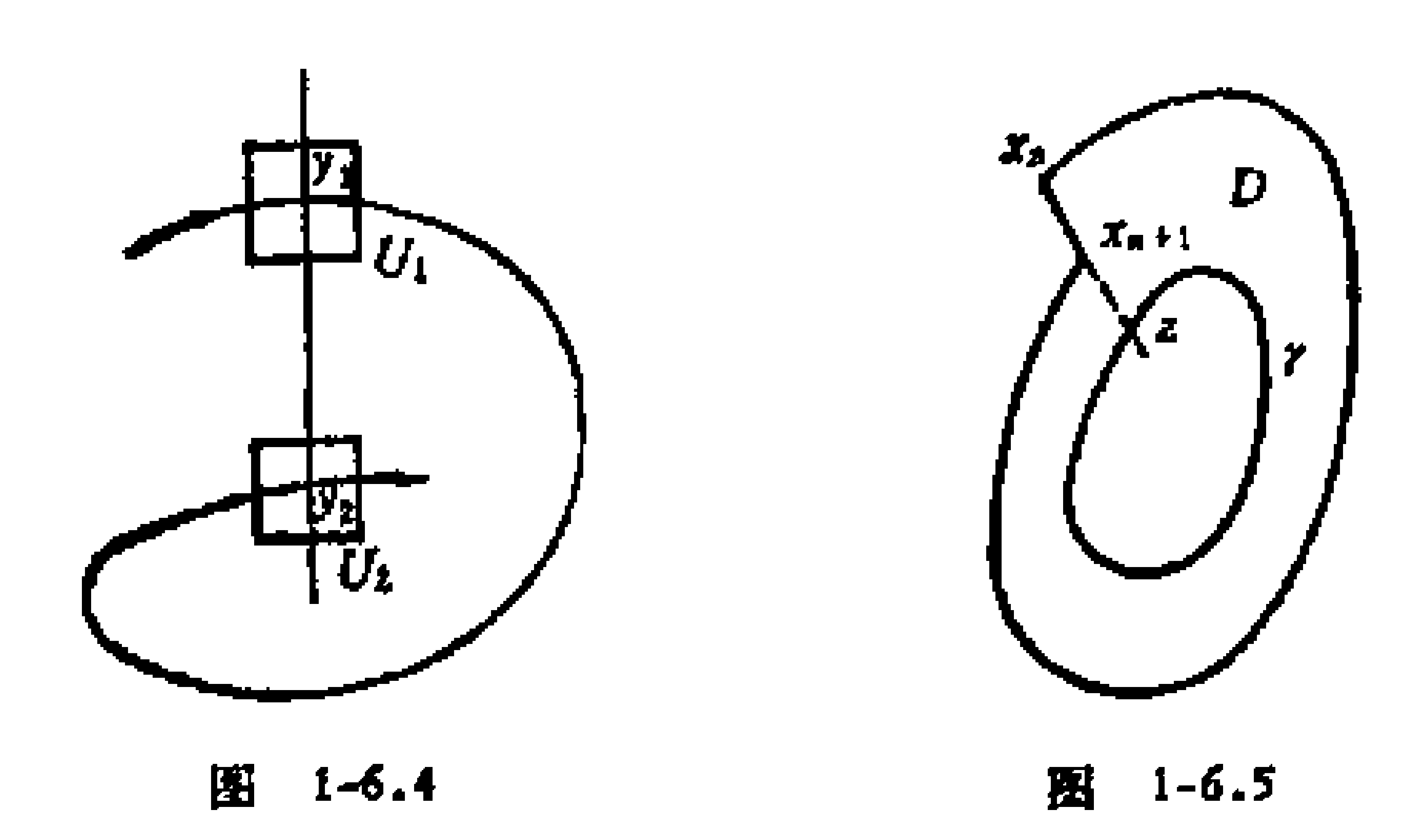


图 1-6.4　　　　图 1-6.5

域内全是闭轨(不证明). 因此，若 $\gamma = L_\omega(x)$ (或 $L_\alpha(x)$)，且 $x \in \gamma$，则 γ 是极限环，且有一侧是稳定的(不稳定的).

定理 1.6.20 (Poincaré-Bendixson 环域原理)　设(6.1)的右端是解析的. 若区域 Ω 内存在由两条简单闭曲线 Γ_1, Γ_2 围成的环形闭区域 G 满足：Γ_1 在 Γ_2 的内域，G 上无平衡点，所有与 G 的边界相交的轨线都在 t 增加时从 G 的外部进入 G 的内部，则 G 内至少存在一个稳定的极限环，它包含 G 的内边界 Γ_1 于其内域.

证明留给读者.

(三) 趋于平衡点的轨线.

定理 1.6.21　设 D 是有界正不变闭集，只包含有限个平衡点(一个平衡点)，它或是结点或是焦点，并且不包含闭轨，则对 $\forall x \in D$，当 $t \to +\infty$ 时解 $\varphi(t, x)$ 趋于某平衡点. (都趋于这个唯一的平衡点.)

证明　由定理 1.6.17，$L_\omega(x)$ 仅由平衡点构成. 因 $L_\omega(x)$ 连通，故只由唯一平衡点构成，那么当 $t \to +\infty$ 时，$\varphi(t, x)$ 趋于这个平衡点.

1.7 生 态 方 程

现在我们来讨论一类生态方程.

先介绍几个基本概念.

出生率(死亡率)：单位时间内每 N 个成员中出生(死亡)的成

员数与N之比。

增长率：单位时间内每N个成员中增长的成员数与N之比，

显然，增长率＝出生率－死亡率。

设t时刻某物种的成员数为 $y=y(t)$，则t到$t+\Delta t$的平均增长率为$\frac{\Delta y}{\Delta t\cdot y}$。若把成员数连续化并使之有连续的导数，则得

$$t\text{ 时刻的增长率}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t\cdot y}=\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}$$

设有两个物种，t时刻的成员数分别为 $x(t)$，$y(t)$，其增长率分别为

$$\frac{\dot{x}}{x}=M(x,y),\quad \frac{\dot{y}}{y}=N(x,y)$$

改写成

$$\dot{x}=xM(x,y),\quad \dot{y}=yN(x,y) \tag{7.1}$$

其中增长率M，N是定义于第一象限 $\bar{\mathbb{R}}_+^2$ 的C^1函数，常有以下几种情形：

1° $\frac{\partial M}{\partial y}<0$，$\frac{\partial N}{\partial x}>0$ 称(7.1)为捕食型的。

2° $\frac{\partial M}{\partial y}<0$，$\frac{\partial N}{\partial x}<0$，称(7.1)为竞争型的。

3° $\frac{\partial M}{\partial y}>0$，$\frac{\partial N}{\partial x}>0$，称(7.1)为互助型的。

1.7.1 捕食方程

两个物种，一个为捕者，其成员数为 y，另一个是食物，其成员数为 x。设y的最低食物供给量为σ_0，y的增长率与$x-\sigma_0$成正比，则

$$\frac{\dot{y}}{y}=a(x-\sigma_0)$$

改写成

$$\dot{y}=(Cx-D)y \quad (C>0, D>0) \tag{7.2}$$

设食 x 的食物供给是充分的，有一个稳定的出生率，它单位时间的死亡数与 x 及 y 成正比即 Bxy. 这是因为两倍的猫将吃掉两倍的鼠；鼠有两倍就使猫有两倍的机会遇到鼠. 于是

$$\frac{\dot{x}}{x}=A-\frac{Bxy}{x}=A-By$$

改写成

$$\dot{x}=(A-By)x \quad (A>0, B>0) \tag{7.3}$$

联立 (7.2), (7.3) 得 Volterra-Lotka 的捕食方程

$$\begin{cases}\dot{x}=(A-By)x\\ \dot{y}=(Cx-D)y\end{cases} \quad (A, B, C, D>0) \tag{7.4}$$

将(7.4)两式相除得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(Cx-D)y}{(A-By)x}$$

分离变量后求出解，得

$$H(x,y)\equiv Cx-D\ln x+By-A\ln y=k \tag{7.5}$$

易证 $H(x, y)$ 在 $\mathbf{R}_+^2$ 内有唯一的极值是 $z=\left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$，且是最小值点. 因而对一切 $k>H\left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$ 的任意常数，由(7.5)确定的 $H(x, y)$ 的等高线是闭曲线，它就是(7.4)在第一象限的相轨线 (x, y 轴也是)(图 1-7.1).

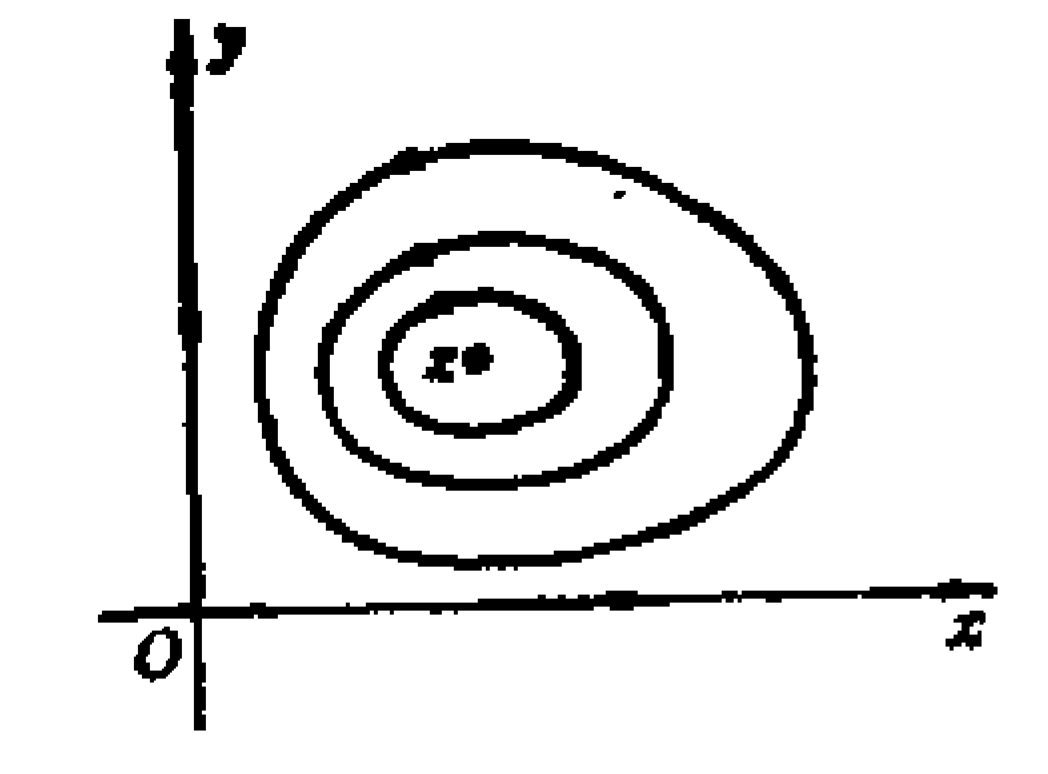


图 1-7.1

由相图可见，若开始只有捕者而无食，结果是捕者死尽；若一开始就没有捕者，那么食会无限增长；若开始捕者成员数为 A/B，食的成员数为 D/C，则将永远维持这个平衡态；若开始两物种的成员数 $(x(0), y(0))>(0, 0)$，但不是 $(A/B, D/C)$，则捕者与食的成员数将循环振荡，没有一种会死尽，也没

有一种会无限增长.

假设某物种成员数 $x(t)$ 有一个极限值 η，其增长率与$(\eta-x)$成正比，即有

$$\dot{x}=c(\eta-x)x$$

右端的非线性项 $-cx^2$，它反映了"社会摩擦"即物种的成员数对该物种增长率的影响.

如果考虑社会摩擦，要增加非线性项，得到极限增长的捕食方程

$$\begin{cases}\dot{x}=(A-By-\lambda x)x\\ \dot{y}=(Cx-D-\mu y)y\end{cases}\quad (A,B,C,D,\lambda,\mu\text{皆正})\qquad (7.6)$$

此时 $\mathbf{R}_+^2$ 被铅直等倾线

$$L: A-By-\lambda x=0$$

与水平等倾线

$$M: Cx-D-\mu y=0$$

分成几块，每块内 $(\dot{x},\dot{y})$ 不变号. 下面分两种情形讨论.

1. L 与 M 在 $\mathbf{R}_+^2$ 不交. 此时 $\frac{A}{\lambda}<\frac{D}{C}$. 平衡点有两个，(0, 0)是鞍点；$\left(\frac{A}{\lambda},0\right)$是稳定结点. 因为 $\mathbf{R}_+^2$ 内无平衡点，所以 $\mathbf{R}_+^2$ 内无闭轨. 相图如图 1-7.2. 初值在 $\mathbf{R}_+^2$ 内或 x 轴上，轨线都趋于$\left(\frac{A}{\lambda},0\right)$，初值在 y 轴上的轨线趋于原点. 这表明，不论开始时捕者与食的成员各多少将以捕者死亡而告终. 若开始时有食，则食的最终成员将稳定于 $\frac{A}{\lambda}$.

2. L 与 M 在 $\mathbf{R}_+^2$ 内相交. 此时 $\frac{A}{\lambda}>\frac{D}{C}$. 平衡点有三个：(0, 0)与$\left(\frac{A}{\lambda},0\right)$是鞍点，$z=(\bar{x},\bar{y})$ 是 $\mathbf{R}_+^2$ 内的唯一平衡点. 由§1.6.2 的例 3 知，在 $\mathbf{R}_+^2$ 内无闭轨. 方向场(即每一点相轨线的方向)如图 1-7.3 所示. 因此从 $\mathbf{R}_+^2$ 内任一点出发的解都趋于平衡点

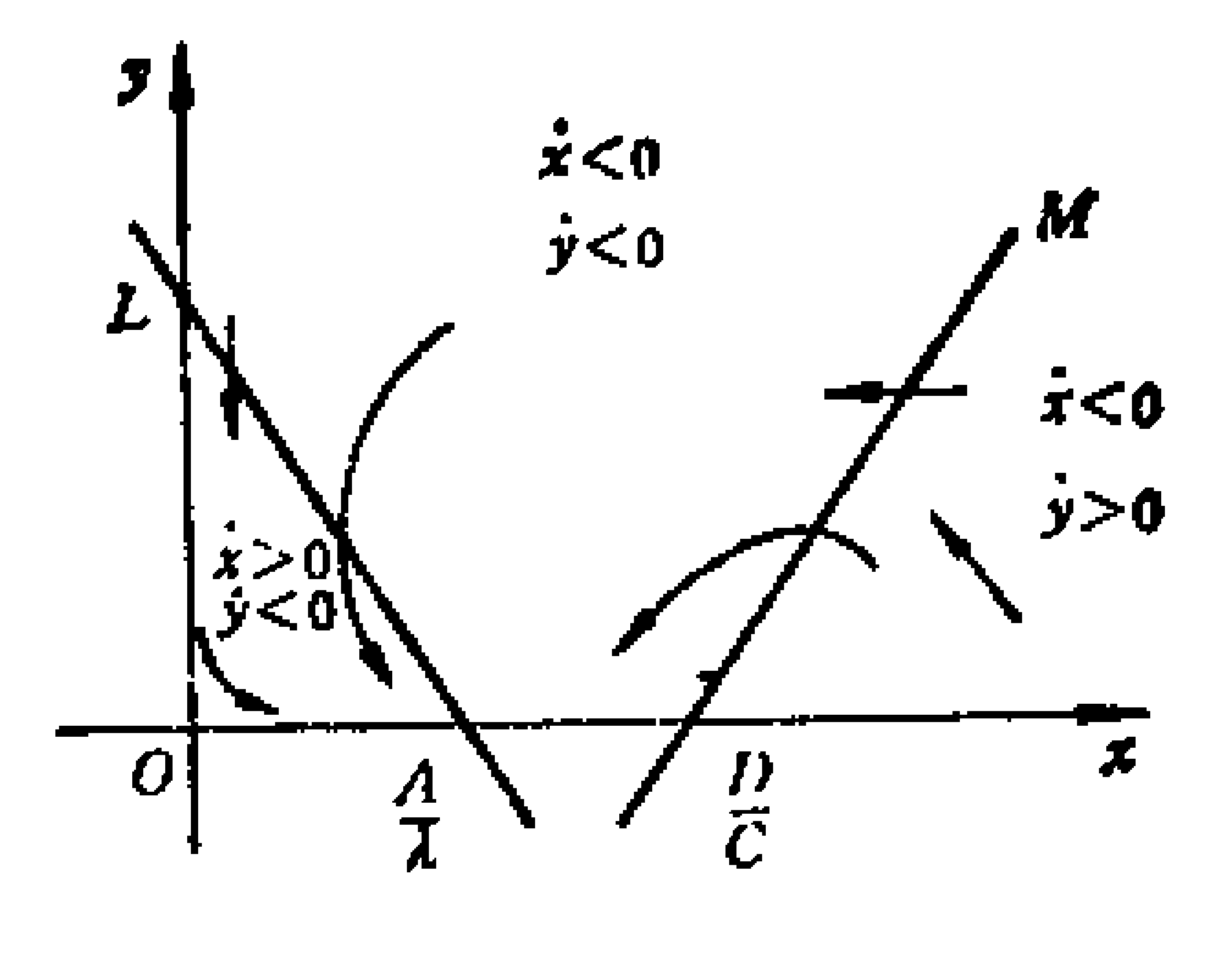


图 1-7.2

z. 这就是说，只要开始时捕者与食的成员数都不是零，那么它们的成员数将最终稳定于一个常态，即共同存在下去.

1.7.2 竞争方程

设方程(7.1)在 $\mathbf{R}^2_+$ 上满足如下条件:

1° $\frac{\partial M}{\partial y}<0$, $\frac{\partial N}{\partial x}<0$. (一物种增多，另一物种增长率减少.)

2° $\exists k>0$, 当 $x\geqslant k$ 或 $y\geqslant k$ 时 $M<0$, $N<0$. (只要一物种很多时，则两个物种都不能增加.)

3° $\exists$ 常数 $a>0$, $b>0$, 当 $x<a$ 时 $M(x,0)>0$, 当

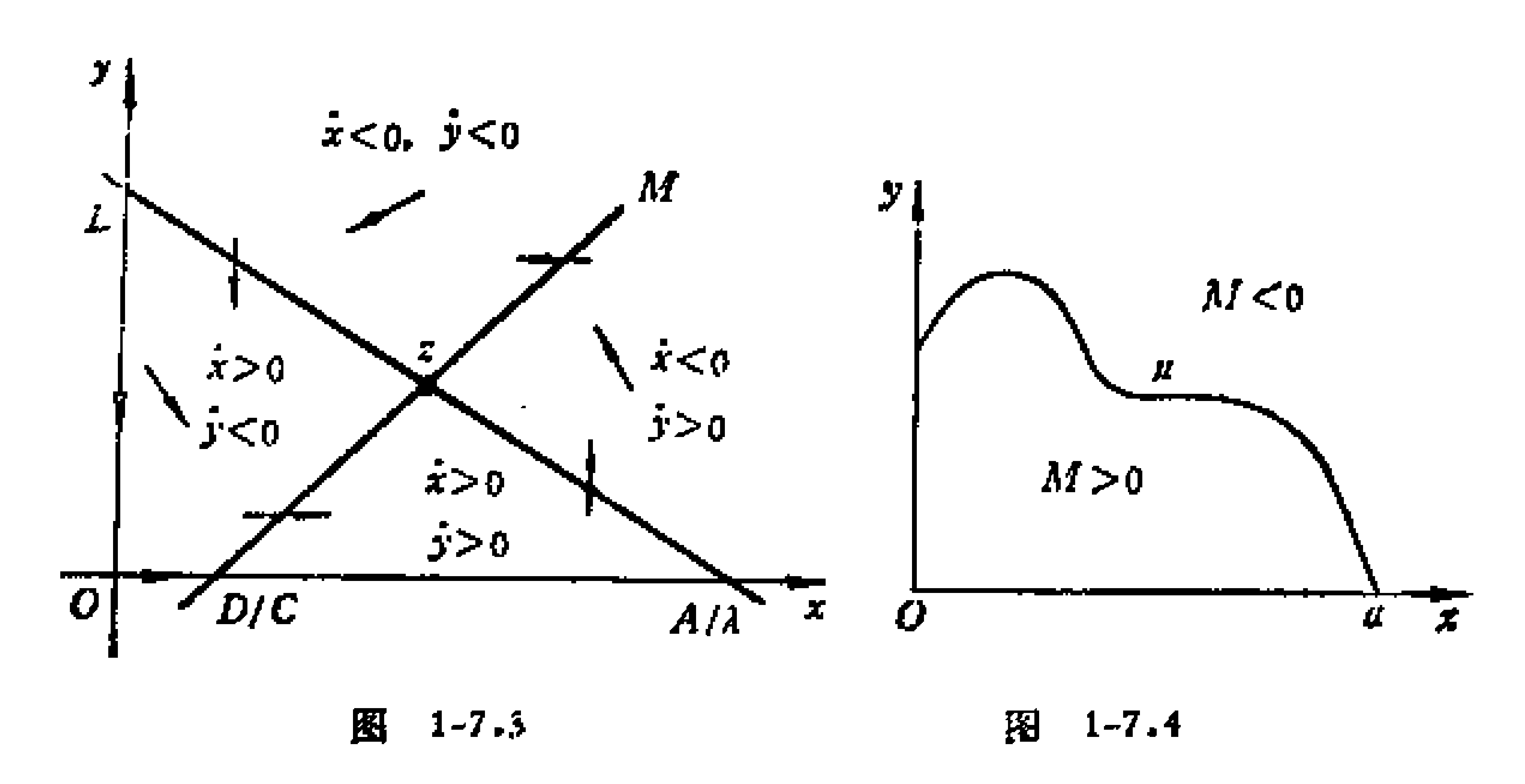


图 1-7.3

图 1-7.4

$x > a$ 时 $M(x, 0) < 0$,当 $y < b$ 时 $N(0, y) > 0$,当 $y > b$ 时 $N(0, y) < 0$. (一物种没有的时候，另一物种有正的增长率，当该物种超过某限度时，增长率为负.)

4° $M'_x(a, 0) \neq 0$, $N'_y(0, b) \neq 0$.

由假设知，当 $0 \leqslant x < a$ 时 $M(x, 0) > 0$,$M(x, k) < 0$, 于是存在 $y = y(x)$, 使$M(x, y(x)) = 0$. 由$M(x, y)$ 对 y 的单调性，这 y 是唯一的. 由 $M(a, 0) = 0$, 得 $y(a) = 0$. 记曲线 $y = y(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ 或 $M(x, y) = 0$ 为 μ. 它有以下性质(图 1-7.4):

(1) 每铅直线 $x = l$ $(0 \leqslant l \leqslant a)$ 与 μ 恰交于一点，当 $l > a$ 时与 μ 不交.

(2) $0 \leqslant y(x) \leqslant k(x \in [0, a])$, $y(x) \in C^1[0, a]$.

(3) 第一象限中，在 μ 下方 $M > 0$, 在 μ 上方 $M < 0$.

(4) $y'(a) \neq 0$, 因而 $y'(a) > 0$, $M_x(a, 0) > 0$. 同理可证存在 ν 曲线: $x = x(y)(0 \leqslant y \leqslant b)$ 或 $N(x, y) = 0(0 \leqslant y \leqslant b)$. 它有类似的性质(图 1-7.5).

以下分两种情况进行讨论.

(一) 设 μ 与 ν 不相交.

仅有平衡点 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$. 因而在 $\mathbf{R}^2_+$ 无闭轨.

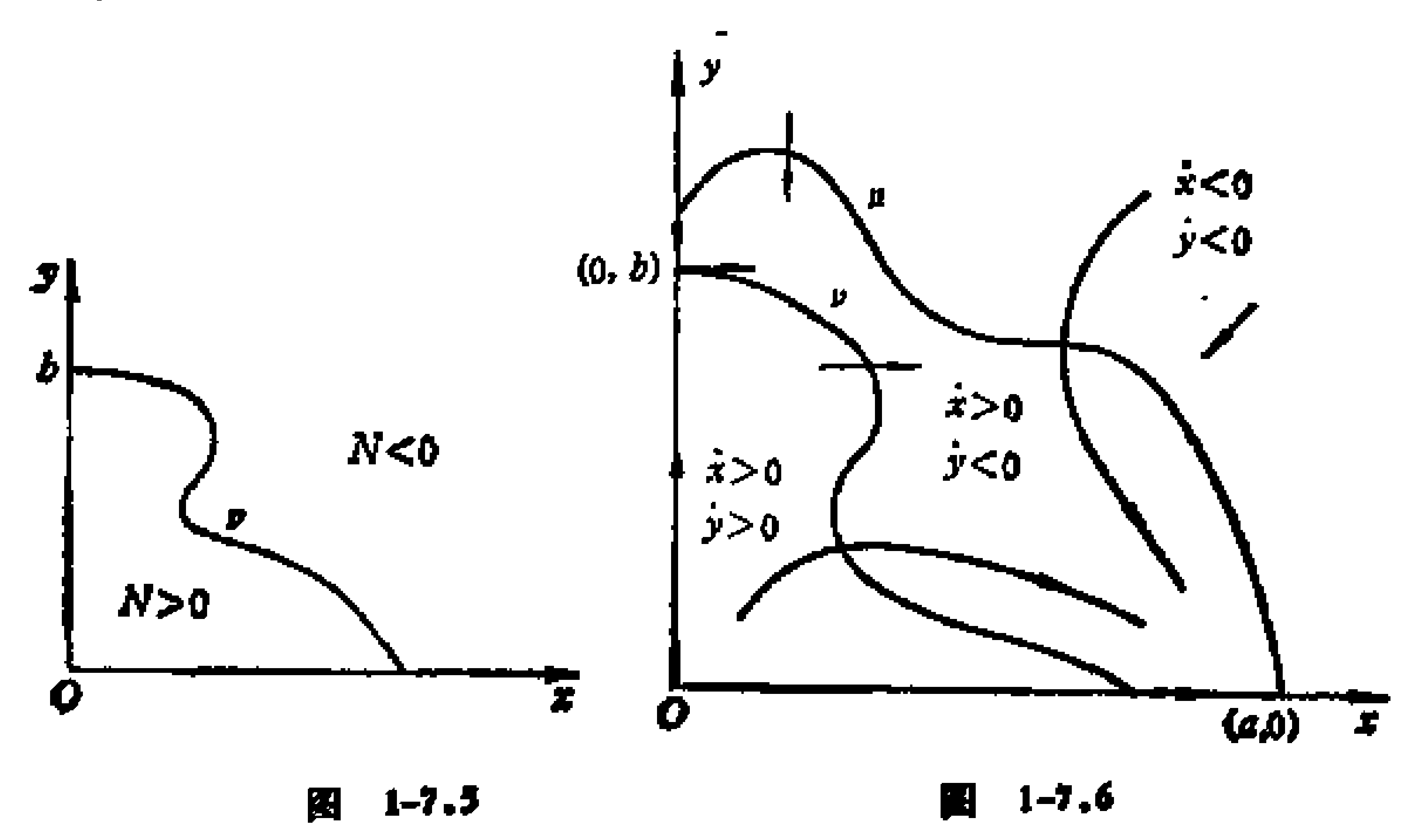


图 1-7.5　　图 1-7.6

若μ在ν的上边，则$(0,0)$是源，$(0,b)$是鞍点，$(a,0)$是汇。在R_+^2画出方向场(图1-7.6)。R_+^2内一切轨线都趋于$(a,0)$。

若μ在ν的下边，则$(0,0)$是源，$(a,0)$是鞍点，$(0,b)$是汇，R_+^2内一切轨线趋于$(0,b)$(图1-7.7)。

(二) 设μ与ν相交。

又设它们只有有限个交点。于是曲线μ，ν与坐标轴将R_+^2分成有限个单连通区域，在每个这种区域内部$\dot{x}$不变号，$\dot{y}$不变号，称之为基本区域。若基本区域中$\dot{x}\cdot\dot{y}>0$，称之为第一类基本区域。若基本区域中$\dot{x}\cdot\dot{y}<0$，称之为第二类基本区域。第一类基本区域为负不变集，第二类基本区域为正不变集。首先轨线是不能从坐标轴上某点进入或离开基本区域的，只能从μ或ν上某点离开或进入这个区域。例如某基本区域Ω内$\dot{x}<0$，$\dot{y}>0$，由于Ω在μ的上方，ν也在μ的上方，因而在ν上有$M(x,y)<0$，$N(x,y)=0$，从ν上出发的轨线水平指向左方。又由Ω在ν的左方，所以μ也在ν的左方，因而在μ上有$M(x,y)=0$，$N(x,y)>0$，从μ上出发的轨线必垂直指向上方。由此可见轨线通过此区域的边界时由外向内，所以Ω是正不变集(图1-7.8)。

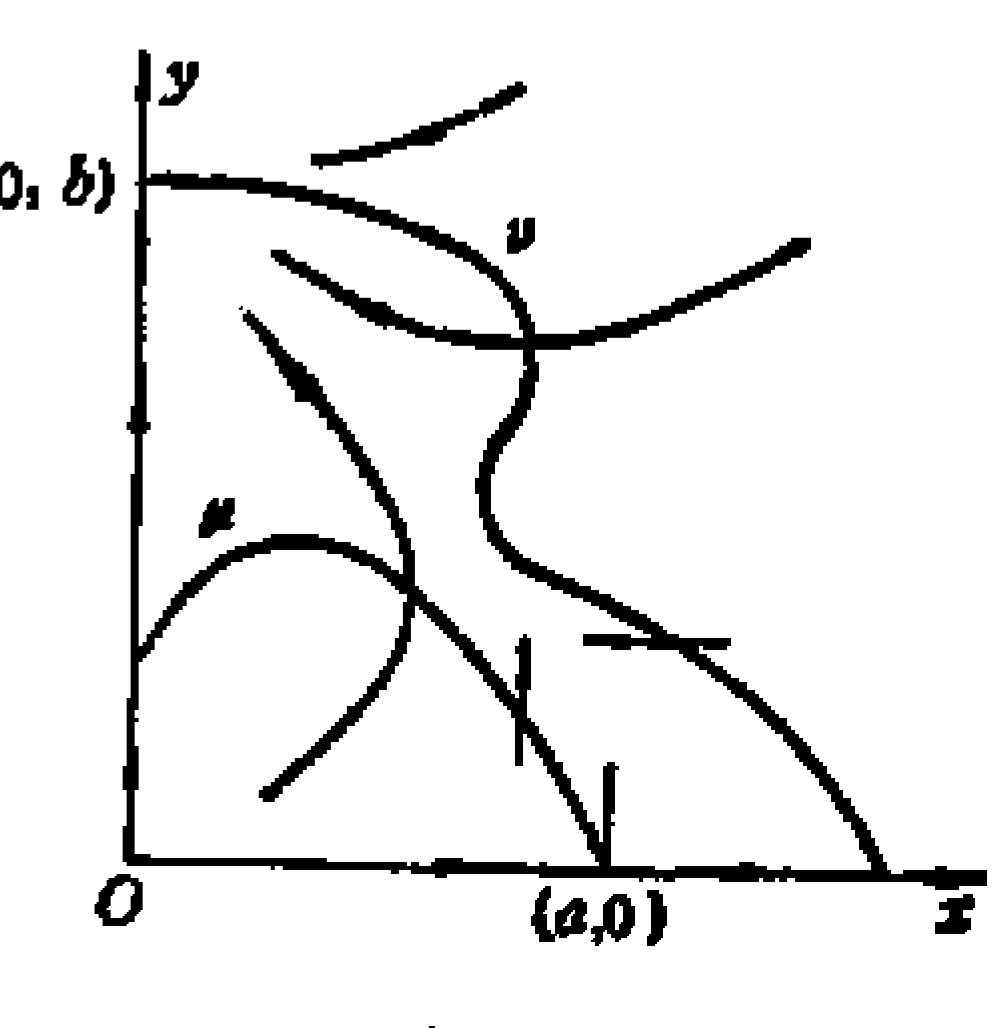


图 1-7.7

定理 1.7.1 方程(7.1)的每条轨线当$t\to+\infty$时趋于有限个平衡点之一。

证明 (7.1)从R_+^2内某点出发的轨线记为$x=x(t)$，$y=y(t)$。若此轨线当$t\to+\infty$时总保持在某基本区域Ω内而不离开，由于$x(t)$，$y(t)$的单调性与有界性，当$t\to+\infty$时$(x(t),y(t))$必趋于某个平衡点。

若此轨线要从一个基本区域进入另一基本区域，则后者必是正不变集，于是当$t\to+\infty$时轨线总保持在这个基本区域内，从

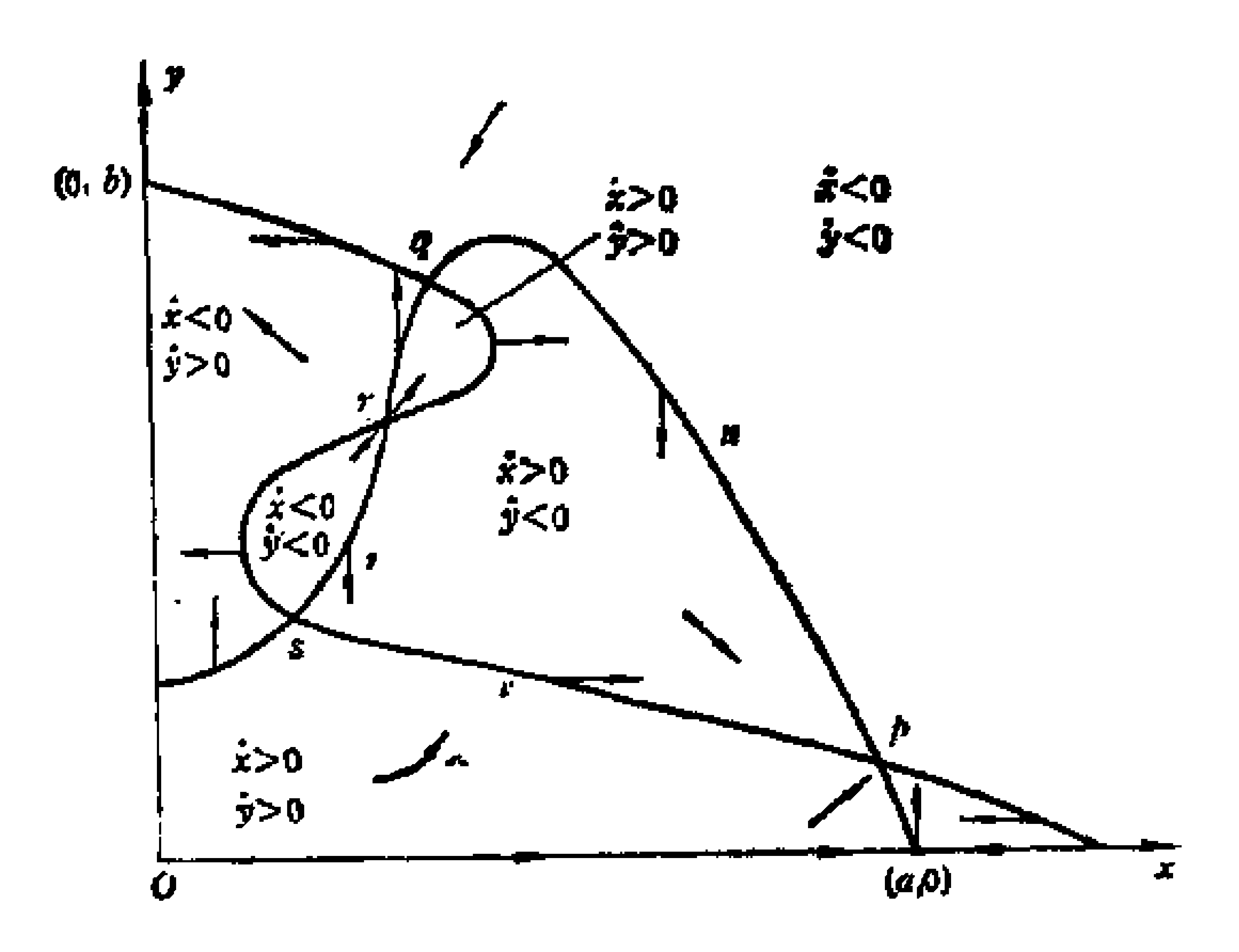


图 1-7.8

而轨线趋于某个平衡点．证毕．

1.7.3 一个互助型方程

现考虑最简单的一个互助型方程

$$\begin{cases}\dot{x} = (-a_{11}x + a_{12}y + b_1)x \\ \dot{y} = (a_{21}x - a_{22}y + b_2)y\end{cases} \tag{7.7}$$

其中 $a_{ij} > 0(i,\ j = 1,2)$，$b_1, b_2 > 0$．

我们假设

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22}\end{vmatrix} > 0$$

并且方程

$$\begin{cases}-a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \\ a_{21}x - a_{22}y + b_2 = 0\end{cases}$$

在 R^2_+ 有唯一解 $(\bar{x}, \bar{y})$（即 $(\bar{x}, \bar{y}) > (0,0)$）．

定理 1.7.2 设 $(x(t),\ y(t))$ 是 (7.7) 的解，$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) > (0, 0)$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$．

证明　显然当 $t \geqslant 0$ 时 $(x(t), y(t)) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2$.

令

$$w = (a_{21} + a_{22}) \ln x + (a_{11} + a_{12}) \ln y$$

则沿(7.7)的轨线有

$$\begin{cases} \dot{w} = -\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} [(x+y) - (x_0 + y_0)] < 0 \\ \qquad\qquad (\text{当 } x + y > x_0 + y_0 \text{ 时}) \\ \dot{x} > 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ 0 < x \leqslant r,\ r \text{ 充分小}) \\ \dot{y} > 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ 0 < y \leqslant r,\ r \text{ 充分小}) \end{cases} \tag{7.8}$$

对 $\forall (x_0, y_0) > \theta$，总可取 r 充分小，R 充分大，使得曲线 $w = R$ 与直线 $x = r$，$y = r$ 所围的开区域 D 满足：$(x_0, y_0) \in D$，$(\bar{x}, \bar{y}) \in D$，且(7.8)成立．于是解 $(x(t), y(t))$ 的存在域是 $[0, +\infty)$ 且当 $t \geqslant 0$ 时 $(x(t), y(t)) \in D$，D 有唯一平衡点 $(\bar{x}, \bar{y})$．又由 § 1.6.2 的例 3 知，(7.7)在 $\mathbf{R}_+^2$ 无闭轨．因此，

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$$

1.8　n 维非线性系统平衡点的稳定性

1.8.1　稳定性概念

我们曾指出，一个系统的最重要的状态之一是它的平衡态，然而若一个平衡态没有持久性，它就没有多大意义．例如，单摆运动有两个平衡态，即单摆处于最低点或最高点时，前者是稳定的，后者是不稳定的(图 1-8.1)．在不稳定平衡点处，小扰动能使系统越来越偏离这个点，对于稳定平衡点则相反．下面给出稳定性的定义

我们考虑 n 维非自治系统

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{8.1}$$

图 1-8.1

也包含了它的特殊情形即 n 维自治系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{8.2}$$

称 x_0 是(8.1)的平衡点，若 $t \geqslant 0$ 时 $f(x_0, t) \equiv \theta$．显然只须考

虑 $x_0=\theta$ 的情形。

以下假设在 $(x,t)\in \Omega\times[0,+\infty)$ 或在 $\mathbf{R}^n\times[0,+\infty)$ 上 f 连续，对 x 属于 C^1. $x=\theta$ 是(8.1)的平衡点。(8.1) 满足初值 $x|_{t=t_0}=x_0$ 的解记为 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$。

定义 1.8.1 设 $x=\theta$ 是(8.1)的平衡点。

1° 若 $\forall \varepsilon>0$ 和 $t_0\geqslant 0$, $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$, 使得当 $|x_0|<\delta$ 时对一切 $t\geqslant t_0$ 有

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon \tag{8.3}$$

则称 $x=\theta$ 是(局部)稳定的。

2° 若 $x=\theta$ 是(局部)稳定的，此外对每个 $t_0\geqslant 0$, $\exists\ \delta_1=\delta_1(t_0)>0$, 当 $|x_0|<\delta_1$ 时有

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t;t_0,x_0)=\theta \tag{8.4}$$

则称 $x=\theta$ 是(局部)渐近稳定的。

3° 若 $x=\theta$ 是(局部)稳定的，此外对每个 $t_0\geqslant 0$, 及 $\forall x_0\in \mathbf{R}^n(x_0\in\Omega)$, (8.4) 成立，则称 $x=\theta$ 是全局渐近稳定的（在区域 Ω 中是渐近稳定的）。

定义 1.8.2 集合 $\{\xi|\xi\in\mathbf{R}^n$, 使得对某

$$t_0\geqslant 0,\ \lim_{t\to+\infty}\varphi(t;t_0,\xi)=\theta\}$$

称为(8.1)的平衡点 θ 的吸引区域。

稳定性的几何意义是：用 U_a 表示相空间 $\mathbf{R}^n$ 中原点的邻域，下标是邻域的半径。若任给一个邻域 U_ε, 则总存在一个邻域 U_δ, 使得由 U_δ 出发的轨线都离不开 U_ε (图 1-8.2)。

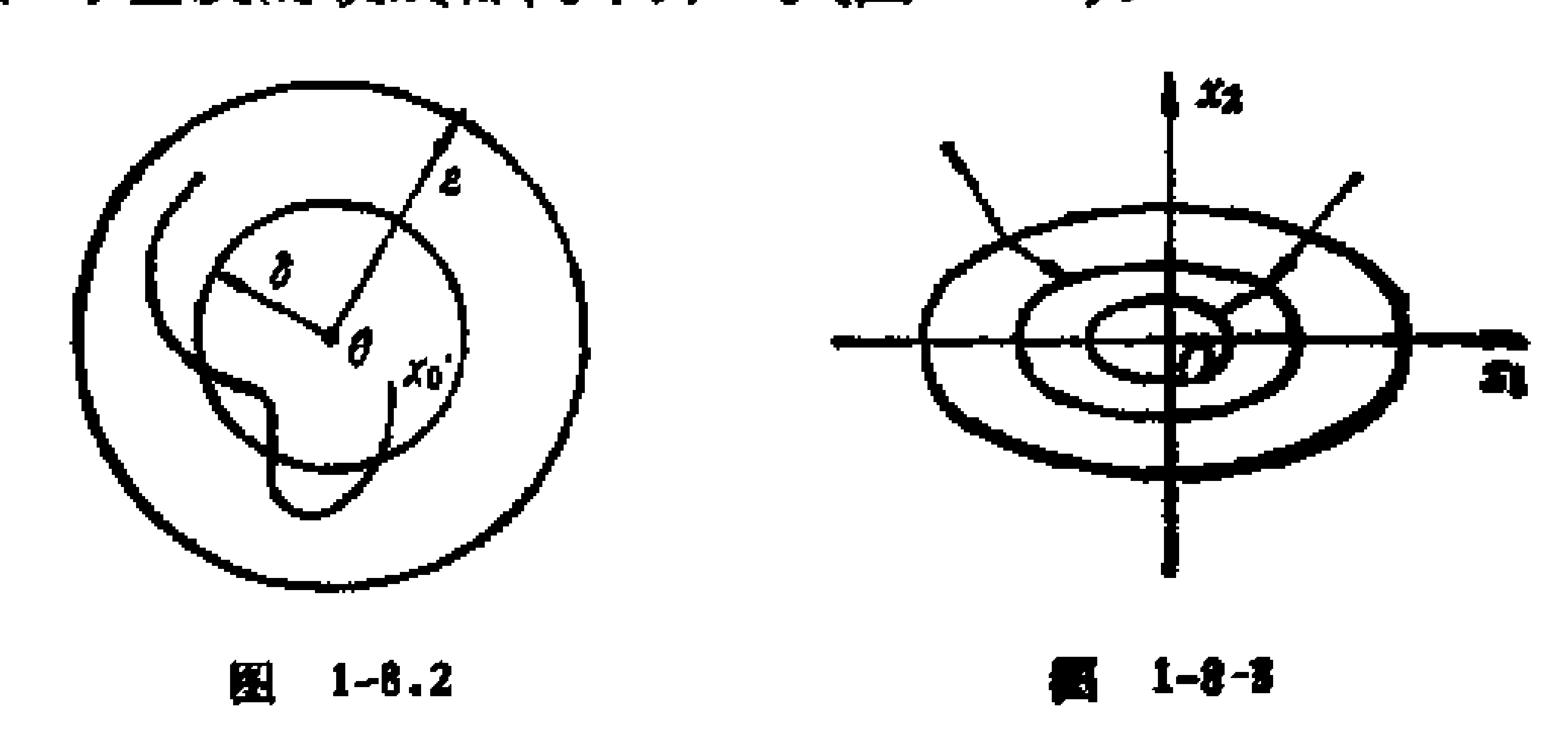


图 1-8.2　　图 1-8-3

定义 1.8.3 设 $x=\theta$ 是 (8.1) 的平衡点.

1° 若定义 1.8.1 的 1° 中的 δ 与 t_0 无关，则称 $x=\theta$ 是一致(局部)稳定的.

2° 若 $x=\theta$ 是一致稳定的，此外，$\exists\ \delta>0$，对 $\forall \varepsilon>0$ 和 $t_0\in[0,+\infty)$，$\exists T(\varepsilon)>0$，使得当 $t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$，$|x_0|<\delta$ 时有(8.3)成立，则称 $x=\theta$ 是一致(局部)渐近稳定的.

3° 若 $x=\theta$ 是一致稳定的又对 $\forall r>0$，$\varepsilon>0$ 和 $t_0\geqslant 0$，存在与 t_0 无关的 $T(r,\varepsilon)>0$，使得当 $t\geqslant t_0+T(r,\varepsilon)$，$|x_0|<r$（或 $|x_0|<r, x_0\in\Omega$）时有(8.3)成立，则称 $x=\theta$ 是全局一致渐近稳定的.

定义 1.8.4 设 $x=\theta$ 是(8.1)的平衡点.

1° 若 $\exists \alpha>0$，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|x_0|<\delta(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0$ 时有

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|\leqslant \varepsilon\cdot e^{-\alpha(t-t_0)}$$

其中 $t_0\geqslant 0$. 则称 $x=\theta$ 是指数(渐近)稳定的.

2° 若 $\exists \alpha>0$，对 $\forall r>0$，$\exists\ K(r)>0$，使得当 $|x_0|<r$（或 $|x_0|<r$，$x_0\in\Omega$），$t\geqslant t_0$ 时有

$$|\varphi(t;t_0;x_0)|\leqslant K(r)|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)}$$

其中 $t_0\geqslant 0$. 则称 $x=\theta$ 是全局指数(渐近)稳定的.

定义 1.8.5 (8.1)的平衡点 $x=\theta$ 称为不稳定的，若它不是稳定的.

1.8.2 Liapunov 函数

装在弹簧上质量为 m 的质点的运动方程是

$$m\ddot{x}+\mu\dot{x}+kx=0 \tag{8.5}$$

其中 $\mu\geqslant 0$ 为阻尼系数，$k>0$ 为弹性系数. (8.5)等价于

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\frac{k}{m}x-\frac{\mu}{m}y$$

它有唯一平衡点 (0, 0). 从直观上看(0, 0)应是稳定的. 该系统

的动能是 $\frac{1}{2}my^2$，势能是 $\int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2$。总能量是

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

它在平衡点(0, 0)取最小值，因而应该是稳定的。沿着轨线 $x = x(t)$，$y = y(t)$，考察能量的变化：

$$\frac{dE(x(t), y(t))}{dt} = my\dot{y} + kx\dot{x} = -\mu y^2 \leqslant 0$$

即 t 增加时能量是不增的。

对于(8.1)我们引进一个函数 $V(x, t)$，它类似于能量函数。

定义 1.8.6 设在 U_h（或 R^n）上 $V(x)$ 是实连续的且

1° $V(\theta) = 0$，2° $V(x) > 0 (\geqslant 0)$ $(x \neq \theta)$，则称 $V(x)$ 是正定的(半正定的)。若 $-V(x)$ 是正定的(半正定的)，则称 $V(x)$ 是负定的(半负定的)。

定义 1.8.7 设在某区间 $[0, h]$（或 $[0, +\infty)$）上 $a(r)$ 是实值连续严格上升的函数且 $a(0) = 0$，则称 $a(r)$ 属于 K 类，记为 $a(r) \in K[0, h]$（或 $a(r) \in K[0, +\infty)$）。若 $a(r) \in K[0, +\infty)$ 且 $\lim\limits_{r \to +\infty} a(r) = +\infty$，则称 $a(r)$ 属于 KR 类，记为 $a(r) \in KR$。

定义 1.8.8 设 $V(x, t)$ 在 $U_h \times [0, +\infty)$ 或 $R^n \times [0, +\infty)$ 上连续且满足：

1° $V(\theta, t) = 0$，2° $V(x, t) \geqslant a(|x|)$，$a(r) \in K[0, h]$ 或 $K[0, +\infty)$ $(V(x, t) \geqslant 0)$，则称 $V(x, t)$ 是正定的（半正定的）。

若 $-V(x, t)$ 是正定的(半正定的)，则称 $V(x, t)$ 是负定的(半负定的)。

注 设 $V(x)$ 在 U_h 上是正定的，则易证 $\exists\, a(r) \in K[0, h]$，使得 $V(x) \geqslant a(|x|)$，$x \in U_h$。因此定义 1.8.6 是定义 1.8.8 的特例。

定义 1.8.9 设 $V(x, t)$ 定义在 $U_h \times [0, +\infty)$（或 $R^n \times [0, +\infty)$）上，满足：

1° $V(x, t)$ 是正定的，

2° $V(x, t)$ 在 $(U_h\setminus\{\theta\}) \times [0, +\infty)$（或 $(R^n\setminus\{\theta\}) \times [0, +\infty)$）连续可微，

$$3^\circ \quad \dot{V} \equiv \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leqslant 0.$$

则称 $V(x, t)$ 是(8.1)的 Liapunov 函数。

若把条件 3° 改为

$$\dot{V}(x, t) \leqslant -\omega(|x|)$$

其中 $\omega(r) \in K[0, h]$（或 $K[0, +\infty)$），则称 $V(x, t)$ 是 (8.1) 的严格 Liapunov 函数。

类似可定义自治系统(8.2)的 Liapunov 函数 $V(x)$。这时

$$\dot{V}(x) \equiv \nabla V(x) \cdot f(x)$$

若(8.1)在 $U_h \times [0, +\infty)$ 上存在 Liapunov 函数 $V(x, t)$，$\varphi(t; t_0, x)$ 是(8.1)的解，在解的存在区间上 $\varphi(t; t_0, x) \in U_h$，按定义则有

$$\begin{aligned}
&\frac{dV(\varphi(t; t_0, x_0), t)}{dt} \\
&= \frac{\partial V(\varphi(t; t_0, x_0), t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\varphi(t; t_0, x_0), t)}{\partial x} \\
&\quad \cdot f(\varphi(t; t_0, x_0), t) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

于是 $V(\varphi(t; t_0, x_0), t)$ 对 t 单调不增。

下面考察严格 Liapunov 函数的几何意义。

设有二维自治系统 $\dot{x} = f(x)$，$x = \theta$ 是平衡点，对每一 $(x_0, t_0)(t_0 \geqslant 0)$，方程有唯一解 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$。设当 $|x| < h$ 时 $V(x)$ 是该系统的 Liapunov 函数，则 $z = V(x) = V(x_1, x_2)$ 是开口向上的曲面。对充分小的 $c > 0$，$V(x) = c$ 是一族闭曲线，当 $0 < c_1 < c_2$ 时，$V(x) = c_1$ 是在 $V(x) = c_2$ 所围区域内，当 $c \to 0$ 时 $V(x) = c$ 缩成一点即原点。闭曲线 $V(x) = c$ 的外法向是 $\nabla V(x)$，解曲线 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ 指向 t 增加方向的切

向量是 $\dot{x}=\dot{\varphi}(t;t_0,x_0)=f(\varphi(t;t_0,x_0),t)$，于是

$$\dot{V}(\varphi(t;t_0,x_0),t)=\nabla V(\varphi(t;t_0,x_0))\cdot f(\varphi(t;t_0,x_0))<0$$

即解曲线指向 t 增加方向的切向量与曲线 $V(x)=C$ 的外法向在交点处的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$，曲线进入闭曲线 $V(x)=c$ 所围区域的内部. 由此可知 $x=\theta$ 是渐近稳定的.

1.8.3 判别稳定性的 Liapunov 方法

现在利用 Liapunov 函数给出各种稳定性的判别准则.

定理 1.8.10 若存在原点邻域 U_h，在 $U_h\times[0,+\infty)$ 上 (8.1) 存在 Liapunov 函数 $V(x,t)$，则 $x=\theta$ 是稳定的. 若 $V(x,t)$ 又满足

$$V(x,t)\leqslant b(|x|)\quad(|x|\leqslant h,\ t\geqslant 0)$$

其中 $b(r)\in K[0,h]$，则 $x=\theta$ 是一致稳定的.

证明 先证前半部分. 由假定知，存在 $a(r)\in K[0,h]$，使得

$$V(x,t)\geqslant a(|x|)\quad(|x|\leqslant h,\ t\geqslant 0)$$

$\forall\varepsilon$，$0<\varepsilon<h$，$\exists\delta$ 充分小，$0<\delta<h$，使得当 $|x_0|<\delta$ 时

$$V(x_0,t_0)<a(\varepsilon)\tag{8.6}$$

当 $t\geqslant t_0$ 使 $|\varphi(t;t_0,x_0)|\leqslant h$ 时

$$\begin{aligned}a(|\varphi(t;t_0,x_0)|)&\leqslant V(\varphi(t;t_0,x_0),t)\\&\leqslant V(x_0,t_0)<a(\varepsilon)\end{aligned}\tag{8.7}$$

即

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$$

因此上式对一切 $t\geqslant t_0$ 成立.

再证后半部分. 任给 $0<\varepsilon<h$，存在 $0<\delta_1<h$，δ_1 充分小与 t_0 无关，使得当 $|x_0|<\delta_1$ 时

$$b(|x_0|)<a(\varepsilon)$$

由假设知

$$V(x_0,t_0)\leqslant b(|x_0|)<a(\varepsilon)$$

其余同前面一样可证. 当 $|x_0|<\delta_1$，$t\geqslant t_0$ 时

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$$

即 $x=\theta$ 是一致稳定的。证毕。

定理 1.8.11 若存在原点邻域 U_h，在 $U_h\times[0,+\infty)$ 上(8.1)有严格 Liapunov 函数 $V(x,t)$，而且还存在 $b(r)\in K[0,h]$，使得

$$V(x,t)\leqslant b(|x|)\quad(|x|\leqslant h,\ t\geqslant 0)$$

则 $x=\theta$ 是一致渐近稳定的。

证明　已证 $x=\theta$ 是一致稳定的，于是 $\exists\,\delta_0$，$0<\delta_0<h$，对 $\forall t_0\geqslant 0$，当 $|x_0|\leqslant\delta_0$，$t\geqslant t_0$ 时

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|<h$$

由假设条件知，$\exists\,a(r)$，$b(r)$，$\omega(r)\in K[0,h]$，使得

$$a(|x|)\leqslant V(x,t)\leqslant b(|x|)$$
$$\dot V(x,t)\leqslant -\omega(|x|)$$

其中 $x\in U_h$。

对 $\forall\varepsilon$，$0<\varepsilon<h$，$\exists\,\delta_1$，$0<\delta_1<\delta_0$，使得

$$b(\delta_1)<a(\varepsilon)$$

令 $T=\dfrac{b(h)}{\omega(\delta_1)}$，$\forall$ 固定 $t_0\geqslant 0$，$|x_0|<\delta_0$，可证存在某 $t^*\in[t_0,t_0+T]$，使得 $|\varphi(t^*;t_0,x_0)|<\delta_1$。若不然，则对一切 $t\in[t_0,t_0+T]$，$|\varphi(t;t_0,x_0)|\geqslant\delta_1$。于是当 $t=t_0+T$ 时，

$$\begin{aligned}0<a(\delta_1)&\leqslant V(\varphi(t;t_0,x_0),t)\leqslant V(x_0,t_0)\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\dot V(\varphi(s;t_0,x_0),s)ds\leqslant b(\delta_0)-T\omega(\delta_1)\\&=b(\delta_0)-b(h)<0\end{aligned}$$

这是不可能的，故 t^* 存在。因此，当 $t\geqslant t^*$ 时有

$$\begin{aligned}a(|\varphi(t;t_0,x_0)|)&\leqslant V(\varphi(t;t_0,x_0),t)\\&\leqslant V(\varphi(t^*;t_0,x_0),t^*)\leqslant b(|\varphi(t^*;t_0,x_0)|)\\&\leqslant b(\delta_1)<a(\varepsilon)\end{aligned}$$

即当 $t\geqslant t^*$ 时 $|\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$。这就证明了，当 $t\geqslant t_0+T$，$|x_0|<\delta_0$ 时 $|\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$。证毕。

定理 1.8.12 若在 $R^n\times[0,+\infty)$ 上(8.1)存在严格的 Lia-

punov 函数 $V(x,t)$，而且存在 $a(r),b(r)\in KR$，使得

$$a(|x|)\leqslant V(x,t)\leqslant b(|x|)\quad(x\in \mathbf{R}^n,t\geqslant 0)$$

则 $x=\theta$ 是全局一致渐近稳定的。

证明　因为 $\lim\limits_{r\to\infty}a(r)=+\infty$，所以 a^{-1} 的定义域是 $[0,+\infty)$，对 $\forall t_0\geqslant 0,r>0$，令 $M(r)=a^{-1}(b(r))$。只要 $|x_0|<r$，就有

$$a(|\varphi(t;t_0,x_0)|)\leqslant V(\varphi(t;t_0,x_0),t)$$
$$\leqslant V(x_0,t_0)\leqslant b(|x_0|)<b(r)$$

即

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|<M(r)$$

且解的存在区间是 $[t_0,+\infty)$。按假设，存在 $\omega\in K[0,M(r)]$ 使得

$$\dot V(\varphi(t;t_0,x_0),t)\leqslant -\omega(|\varphi(t;t_0,x_0)|)$$

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$，使得 $b(\delta_1)<a(\varepsilon)$。令 $T=\dfrac{b(r)}{\omega(\delta_1)}$。象证明定理 1.8.11 那样可证：当 $t\geqslant t_0+T$，$|x_0|<r$ 时 $|\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$。证毕。

定理 1.8.13　若存在原点邻域 U_h，在 $U_h\times[0,+\infty)$ 上(8.1)存在严格的 Liapunov 函数 $V(x,t)$ 满足：

$$k_1|x|^2\leqslant V(x,t)\leqslant k_2|x|^2\quad(|x|<h,t\geqslant 0)$$
$$\dot V(x,t)\leqslant -k_3|x|^2\tag{8.8}$$

其中 $k_i(i=1,2,3)$ 为正的常数。则 $x=\theta$ 是指数渐近稳定的。若(8.8)当 $x\in R^n$，$t\geqslant 0$ 时成立，则 $x=\theta$ 是全局指数渐近稳定的。

证明留做练习。

对于自治系统，我们也有相应的定理，它是上述定理的特殊情形。这时只须注意，若 $V(x)$ 是正定的，则存在 $b(r)\in K$，使得 $V(x)\leqslant b(|x|)$。因此可得

推论 1.8.14　若在某 U_h 上(8.2)存在 Liapunov 函数(严格的 Liapunov 函数)，则 $x=\theta$ 是一致稳定的(一致渐近稳定的)。

推论 1.8.15 若在 R^n 上(8.2)存在严格的 Liapunov 函数 $V(x)$，且有 $a(r)\in KR$ 使得

$$a(|x|)\leqslant V(x)\quad (x\in R^n)$$

则 $x=\theta$ 是全局一致渐近稳定的.

定理 1.8.16 设对于系统(8.1)，存在函数 $V(x,t)$ 在 $U_h\times[0,+\infty)$ 上连续，在 $(U_h/\{\theta\})\times[0,+\infty)$ 上连续可微且满足:

1° $\exists T>0$，对 $\forall\delta>0$，$\delta\leqslant h$，$\exists$ 区域

$$D=\{(x,t)|(x,t)\in U_\delta\times[T,+\infty),\\ V(x,t)>0\}$$

在 D 上函数 V 有界;

2° 在 D 内 $\dot V>0$，对 $\forall$ 正数 α，$\exists\ l=l(\alpha)>0$，当 $(x,t)\in D$，$V(x,t)\geqslant\alpha$ 时 $\dot V\geqslant l$.

则 $x=\theta$ 是不稳定的.

证明 令 $D_h=\{(x,t)|(x,t)\in U_h\times[T,+\infty),V(x,t)>0]$，$\exists M>0$，当 $(x,t)\in D_h$ 时 $V<M$.

对 $\forall$ 小的正数 δ，$\delta<h$，$\exists x_0$ 满足

$$|x_0|\leqslant\delta,\ V(x_0,T)=V_0>0$$

取(8.1)的解 $\varphi(t;T,x_0)$，得 $V(t)=V(\varphi(t;T,x_0),t)$，因为在 $V>0$ 的区域内 $\dot V>0$ 且 $V(T)=V(x_0,T)=V_0>0$，故 $V(t)$ 随 t 增加. 从而解将停留在区域 $V>0$ 内. 因此. 只要 $t\geqslant T$，使 $|\varphi(t;T,x_0)|\leqslant h$，则 $\varphi(t;T,x_0)$ 停留在区域 $V>0$ 内.

另一方面. 当 t 大到某个时刻，必须 $|\varphi(t;T,x_0)|>h$. 若不然. 对一切 $t\geqslant T$，有 $|\varphi(t;T,x_0)|\leqslant h$，于是

$$V(\varphi(t;T,x_0),t)\geqslant V_0>0$$

根据条件 2° 得 $\dot V\geqslant l>0$，从而得

$$V-V_0=\int_T^t\dot V dt\geqslant l(t-T)\quad(t\geqslant T),$$

这与 V 有界矛盾. 这就证明了当 t 增到某时刻 t_1 时必有 $|\varphi(t_1,T,x_0)|>h$，而 x_0 可取得使 $|x_0|$ 任意小，因此 $x=\theta$ 是不稳定

的。

1.8.4 常系数线性系统的稳定性

为了通过线性化方程来判断非线性方程零解的稳定性，先研究常系数线性系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{8.9}$$

其中A是$n\times n$常数矩阵。

定理 1.8.17 对于(8.9)，$x=\theta$稳定(一致稳定)的充要条件是：存在常数M_0使得

$$\|e^{A(t-t_0)}\|\leqslant M_0 \quad (t\geqslant t_0)$$

其中$\|\cdot\|$为矩阵的范数。

证明 (8.9)的任一解 $\varphi(t;t_0,x_0)=e^{A(t-t_0)}x_0$，因而充分性显然成立。现设$x=\theta$是稳定的。给定 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x_0|\leqslant\delta$ 时，

$$|\varphi(t;0,x_0)|=|e^{At}x_0|<\varepsilon$$

于是

$$\|e^{At}\|=\sup_{|x_0|=\delta}|e^{At}\delta^{-1}x_0|<\delta^{-1}\varepsilon=k \quad (t\geqslant 0)$$

证毕。

定理 1.8.18 对于(8.9)，$x=\theta$渐近稳定(一致渐近稳定)与下列任一条件等价：

1° 存在常数 $\alpha>0$，$M_1>0$，使得

$$\|e^{A(t-t_0)}\|\leqslant M_1e^{-\alpha(t-t_0)}(t\geqslant t_0) \tag{8.10}$$

2° $x=\theta$ 是指数稳定的(全局指数稳定的)。

3° 系数矩阵A的所有特征根具有负的实部。这时称矩阵A为稳定的。

证明 设$x=\theta$渐近稳定，则存在 $\delta>0$，对给定 $0<\varepsilon<\delta$ 存在 $T=T(\varepsilon)>0$，当 $|x_0|\leqslant\delta$，$t\geqslant T$ 时

$$|e^{At}x_0|<\varepsilon$$

于是 $\|e^{At}\|\leqslant\delta^{-1}\varepsilon(t\geqslant T)$。特别有

$$\|e^{AT}\| \leqslant \delta^{-1}\varepsilon < 1$$

对任意 $t \geqslant 0$，存在非负整数 k，使得 $kT \leqslant t \leqslant (k+1)T$，于是

$$\|e^{At}\| = \|e^{A(t-kT)} \cdot e^{AkT}\| \leqslant M_0\|e^{AkT}\|$$
$$\leqslant M_0(\delta^{-1}\varepsilon)^k$$

取 $(\delta^{-1}\varepsilon)^k = e^{-\alpha kT}$ 即取 $\alpha = -T^{-1}\ln(\delta^{-1}\varepsilon)$，得

$$\|e^{At}\| \leqslant M_0 e^{-\alpha kT} = M_0 e^{\alpha T} e^{-\alpha(k+1)T}$$
$$\leqslant M_1 e^{-\alpha t}$$

其中 $M_1 = M_0 e^{\alpha T}$。即由 $x = \theta$ 渐近稳定推出 1° 成立。

现设(8.10)成立。显然 $x = \theta$ 是全局指数稳定的。即由 1° 推出 2° 成立。

若 $x = \theta$ 是指数稳定的。显然(8.10)成立，于是对于 $\mathrm{Re}\lambda + \alpha > 0$，当 t 充分大时

$$|e^{At}x - e^{\lambda t}x| \geqslant e^{t\mathrm{Re}\lambda}[1 - M_1 e^{-(\alpha+\mathrm{Re}\lambda)t}]|x|$$
$$\geqslant c_0|x|$$

其中 c_0 为某正数。若 λ 是 A 的特征值，则 $e^{\lambda t}$ 是 e^{At} 的特征值，因此 $\mathrm{Re}\lambda + \alpha \leqslant 0$，即 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant -\alpha < 0$。即由 2° 推出 3° 成立。

最后由 3° 显然有(8.10)成立。由此易知 $x = \theta$ 稳定。证毕。

若 A 是稳定的，我们还可构造(8.9)的严格 Liapunov 函数。令

$$V(x) = x^T B x$$

其中 B 是正定矩阵，则

$$\dot{V} = x^T(A^T B + BA)x$$

若可取 B 使得

$$A^T B + BA = -I \tag{8.11}$$

其中 I 是单位矩阵，则

$$\dot{V} = -|x|^2$$

注意到

$$\frac{d}{dt}(e^{tA^T}e^{tA}) = A^T e^{tA^T}e^{tA} + e^{tA^T}e^{tA}A \tag{8.12}$$

由于 A 是稳定的，故 $\int_0^{+\infty} e^{tA^T}e^{tA}$ 收敛。将(8.12)积分得(8.11)，其

中

$$B = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} e^{tA} dt \tag{8.13}$$

显然B对称且

$$\begin{aligned} x^T B x &= \int_0^{+\infty} x^T e^{tA^T} e^{tA} x dt \\ &= \int_0^{+\infty} |e^{tA} x|^2 dt \end{aligned}$$

即B是正定的.

1.8.5 判别稳定性的线性化方法

现在考虑非线性系统

$$\dot{x} = Ax + g(x, t) \tag{8.14}$$

其中A是$n \times n$常数矩阵，Ax是(8.14)右端的线性部分，$g(x, t)$是x的高阶项.

定理 1.8.19 设A是$n \times n$稳定的常数矩阵,又$g: U_h \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}^n$是连续的并满足

$$g(x, t) = o(|x|) \quad (|x| \to 0) \tag{8.15}$$

对$t \in [0, +\infty)$一致成立. 则对于(8.14), $x = \theta$是指数稳定的.

证明 B由(8.13)给出. 令$V(x) = x^T B x$, 则

$$\dot{V} = -|x|^2 + 2x^T B g$$

由g的假定. 存在$h > 0$, 当$|x| \leqslant h$, $t \geqslant 0$时

$$\dot{V} \leqslant -\frac{1}{2}|x|^2$$

因此, $x = \theta$是指数稳定的. 证毕.

注 1 若(8.15)成立. 但A至少有一个特征值的实部是正的. 则对于(8.14), $x = \theta$是不稳定的. (证明可参见 [MM, 第六章,定理 2.3]

注 2 若(8.15)成立. A的特征值中没有实部为正的. 但却有实部为零的,这种情形称为临界情形. 这时可以有g,使得$x = \theta$是稳定的,也可以有g使得$x = \theta$是不稳定的.

习 题 一

1.1 设 $f\in C([0,b];\mathbf{R})$，$f(v)>0(v\in(0,b))$，$f(0)=0$，$v_0\in[0,b)$。证明：初值问题

$$\begin{cases}\dot{v}+f(v)=0\\ v(0)=v_0\end{cases}$$

的最大解 $v_M(t)$ 的存在区间是$[0,+\infty)$且

$$\lim_{t\to+\infty}v_M(t)=0$$

1.2 设 $f\in C(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1;\mathbf{R}^n)$ 且

$$|f(x,t)|\leqslant K_1|x|+K_2\quad(x\in R^n,\ t\in R^1)$$

其中 K_1，K_2 为正的常数。证明初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

解的存在区间是$(-\infty,+\infty)$，其中 $x_0\in\mathbf{R}^n$，$t_0\in\mathbf{R}^1$ 是任意的。

1.3 设 $\bar{G}$ 是 (x,t) 空间中的有界闭区域，$f\in C(\bar{G};R^n)$，Ω是 $\bar{G}$ 中的闭子域。若对 $\forall(\xi,\tau)\in\Omega$，初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,t)\\ x(\tau)=\xi\end{cases}$$

在 $[a,b]$ 上有唯一解 $x=\varphi(t;\xi,\tau)$，证明 $\varphi\in C([a,b]\times\Omega)$。

1.4 证明引理 1.3.1 与引理 1.3.2。

1.5 证明引理 1.3.8。

1.6 证明定理 1.3.12。

1.7 确定下列系统的平衡点及其类型：

(1) $\dot{x}=y$，$\dot{y}=a(1-x^2)y-bx(a\geqslant0,\ b>0)$

(2) $\dot{x}=y$，$\dot{y}=-ay-b\sin x(a\geqslant0,b>0)$

(3) $\dot{x}=my+\alpha x(x^2+y^2)$，$\dot{y}=-mx+\alpha y(x^2+y^2)$ $(m^2+\alpha^2\neq0)$

1.8 证明(0，0)是系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=exy-x\end{cases}$$

的中心。

1.9 设 $f\in C^1$，$f(a)=0$，$f'(a)<0$。证明 $(a,0)$ 是

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-cy-f(x)$$

的鞍点，并求 $(a,0)$ 处稳定流形与不稳定流形的方向。

1.10 在平衡点附近利用线性化方程画出平衡点附近的草图：

(1) $\dot{x}=x-y,\ \dot{y}=x^2-1$

(2) $\dot{x}=-x+e^{-y}-1,\ \dot{y}=1-e^{x+y}$

1.11 画出下列方程的相图

(1) $\ddot{x}+a\sin x=0$; (2) $\ddot{x}=x^3-x$

1.12 检验三维系统

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x,\ \dot{z}=1-(x^2+y^2)$$

无平衡点，但有闭轨。

1.13 证明下列系统无闭轨：

(1) $\ddot{x}+c\dot{x}+f(x)=0$，其中常数 $c\neq 0$，$f\in C^1$

(2) $\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=1+x+y^2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}=x(y-1)\\ \dot{y}=x+y-2y^2\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dot{x}=1-x^3+y^2\\ \dot{y}=2xy\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dot{x}=2x(1+x^2-2y^2)\\ \dot{y}=-y(1-4x^2+3y^2)\end{cases}$

1.14 若 p，q 在同一条轨线上。证明：$L_\omega(p)=L_\omega(q)$，$L_\alpha(p)=L_\alpha(q)$。

注：$\varphi(t,p)$ 的 ω（或 α）极限集 $L_\omega(p)$（$L_\alpha(p)$）又称为轨线 $\Gamma(p)$ 的 ω（或 α）极限集 $L_\omega(\Gamma(p))(L_\alpha(\Gamma(p)))$。

1.15 设一个三维系统在球坐标系下为

$$\dot{\theta}=1,\ \dot{\varphi}=\pi,\ \dot{\rho}=\rho(\sin\theta+\pi\sin\varphi)$$

若 $\theta(0)=0$，$\varphi(0)=0$，$\rho(0)=1$ 对应的轨线为 Γ，证明：

(1) Γ 有界，不是闭轨。

(2) $L_\omega(\Gamma)$ 与 $L_\alpha(\Gamma)$ 均存在，它既不是闭轨也不含平衡点。

1.16 证明定理 1.6.20。

1.17 设 $x=\theta$ 是 n 维系统

$$\dot{x}=f(x)$$

的平衡点。若解 $x=\varphi(t,x_0)$，满足：$x_0\neq\theta$，$\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t,x_0)=\theta$，证明：$x=\theta$ 是不稳定的。

1.18 证明定理 1.8.13。

1.19 利用 Liapunov 方法判断下列系统零解的稳定性：

(1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3y^2 - \dfrac{1}{4}x^3 \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}y - 2y^3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4 \\ \dot{y} = x^4y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^4 \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}x^2y - \dfrac{1}{4}y^3 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4 \\ \dot{y} = y - x^2y^3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}xy^2 \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{4}y + 3xz^2 \\ \dot{z} = -\dfrac{2}{3}z - 2xyz^2 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y + 2z + yz \\ \dot{y} = 3x - y - z + xz \\ \dot{z} = -2x + y - z + xy \end{cases}$

1.20 讨论下列系统平衡点的稳定性

(1) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-2y} - 1 \\ \dot{y} = -x(1 - y^2) \end{cases}$

第二章　行波解的存在唯一性

在研究形为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u)$$

的反应扩散方程时，其中 $x \in \mathbf{R}^n$，$u(x, t) = (u_1(x, t), \cdots, u_m(x, t))$，$f(u) = (f_1(u), \cdots, f_m(u))$，$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m)$ 为正对角矩阵．我们常常要考虑所谓的"永久型"（"permanent type"）解(即对一切 t，$-\infty < t < \infty$，存在的解 $u(x, t)$)．这种解的一些常见的类型有：

1．关于 t 是周期的解，其中有

（1）与 x 无关的振动解，

（2）靶形图案解（target patterns），即 $u(x, t) = U(|x|, t)$，U 关于 t 是周期的；

（3）旋转螺线图案（rotating spiral patterns），即 $n = 2$，$x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$，$u(x, t) = U(r, \theta - ct)$，$U$ 关于 $\xi = \theta - ct$ 是周期的．

2．行波解（traveling waves），即形为 $u(x, t) = u(x - ct)$ 的解，c 为速度向量 $c = (c_1, \cdots, c_n)$，特别有

（1）定常解（stationary solutions），即 $c = 0$，u 与时间 t 无关，定常解又叫平衡解或稳态解．

（2）平面波解（plane waves），即 $u(x, t) = U((x - ct)\cdot\nu) = U(x\cdot\nu - |c|t)$，其中 $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 是 c 方向的单位向量，其中又有

（a）波串解（waves trains），U 是周期的；

（b）波前解（waves fronts），U 是单调有界的且不恒为常数；

（c）脉冲解（pulses），$U(-\infty) = U(+\infty)$，U 不是常数．

本章中我们讨论行波解的存在性和唯一性.我们只讨论 $n=1$, $m=1$ 的情形,即空间变量是一维的方程式的行波解. 充分利用平面自治系统的已有成果,用相平面的方法来研究方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u) \tag{I}$$

的行波解. 这里 $x\in\mathbf{R}^1$, $u\in\mathbf{R}^1$. 我们认为这种方法有基本的重要性,所以相当详细地加以叙述.

2.1 行波解的基本性质

方程 (I) 的形为 $u(x,t)=q(x-ct)$ 的解叫行波解,其中 c 为实常数,称为传播速度. 记 $\xi=x-ct$, 令

$$q'=\frac{dq}{d\xi}$$

易知 $q(\xi)$ 是 (I) 的行波解的充要条件是:

$$q''+cq'+f(q)=0 \tag{II}$$

若 $q(\xi)$ 是单调有界且不恒为常数,则 $q(\xi)$ 叫做 (I) 的波前解. 这时必存在极限 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}q(\xi)=q_\pm$ 且 $q_+\neq q_-$. 可通过变换

$$\bar{q}=\frac{q-q_-}{q_+-q_-}$$

规范化为

$$\lim_{\xi\to-\infty}q(\xi)=0,\quad \lim_{\xi\to+\infty}q(\xi)=1$$

我们总是假定 $f(u)$ 至少是连续的.

引理 2.1.1 设 $q(\xi)$ 是 (II) 的解且 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}q(\xi)=q_\pm$, 则

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}q'(\xi)=0,\ 且\ f(q_\pm)=0$$

证明 若 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}q'(\xi)=0$, 则由 (II) 得知极限 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}q''(\xi)$ 存在,于是 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}q''(\xi)=0$. 再由 (II) 得 $f(q_\pm)=0$.

现设 $\limsup\limits_{\xi\to+\infty}q'(\xi)=a$, $\liminf\limits_{\xi\to+\infty}q'(\xi)=b$, 则 $a\geqslant b$. 若

$a > b$，则存在 $\xi_n, \eta_n \to +\infty$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} q'(\xi_n) = a, \quad \lim_{n\to+\infty} q''(\xi_n) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} q'(\eta_n) = b, \quad \lim_{n\to+\infty} q''(\eta_n) = 0$$

由 (II) 得

$$ca = f(q_+), \quad cb = f(q_+)$$

当 $c \neq 0$ 时得 $a = b$，与 $a > b$ 矛盾. 因此只能有 $a = b$. 由 $q(\xi)$ 的有界性必有 $a = b = 0$，即 $\lim\limits_{\xi\to+\infty} q'(\xi) = 0$。当 $c = 0$ 时，直接由 (II) 得

$$\frac{1}{2} q'^2(\xi) + \int_0^{q(\xi)} f(\tau)d\tau = \text{常数}$$

因此存在极限 $\lim\limits_{\xi\to+\infty} q'(\xi) = l$，必有 $l = 0$。

类似可证 $\lim\limits_{\xi\to-\infty} q'(\xi) = 0$。证毕.

注 这里用到一个结论：设 $u(\xi)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导，
$\limsup\limits_{\xi\to+\infty} u(\xi) = a > \liminf\limits_{\xi\to+\infty} u(\xi) = b$，
则存在 $\xi_n, \eta_n \to +\infty$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} u(\xi_n) = a, \quad \lim_{n\to+\infty} u'(\xi_n) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u(\eta_n) = b, \quad \lim_{n\to+\infty} u'(\eta_n) = 0$$

证明留给读者.

引理 2.1.2 设 $q(\xi)$ 是 (II) 的非常数解，$q(\pm\infty) = q_\pm$，$f(q_\pm) = 0$。

1° 若 $q_+ = q_-$，则 $c = 0$;

2° 若 $q_+ \neq q_-$，则

$$\int_{q_-}^{q_+} f(\tau)d\tau \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \text{时，} \quad c \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

证明 由 (II) 得

$$\frac{1}{2}(q'^2)' + cq'^2 + f(q)q' = 0$$

对 ξ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分即得结论．证毕．

定理 2.1.3 设 $f(0)=f(1)=0$，$f\in C^1[0,1]$，$q(\xi)$ 是 (II) 的解，$q(-\infty)=0$，$q(+\infty)=1$．

1° $q(\xi)$ 是 (I) 的波前解的充要条件是：当 $\xi\in(-\infty,\infty)$ 时 $q(\xi)\in[0,1]$．这时 $q'(\xi)>0$ $(\xi\in(-\infty,+\infty))$．

2° 若 $q(\xi)$ 是 (I) 的波前解，则 $q(\xi)$ 是严格单调上升的且值域为 $(0,1)$．

证明　显然，只须证明若 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 时 $q(\xi)\in[0,1]$，则 $q'(\xi)>0$．

令

$$\frac{dq}{d\xi}=p \tag{1.1}$$

由 q 的方程得

$$\frac{dp}{d\xi}=-cp-f(q) \tag{1.2}$$

解 $q(\xi)$ 对应于 qp 平面上联结(1.1),(1.2)的平衡点(0,0)和(1,0)的一条轨线，它位于带形区域 $0\leq q\leqslant 1$ 中．由(1.1)知，$p>0$ 时 $\frac{dq}{d\xi}>0$，即 ξ 增加时轨线向右，$p<0$ 时轨线向左，所以这种轨线(自身不交，是一条简单曲线)不能穿过 q 轴即永远有 $p\geqslant 0$（图 2-1.1）．进一步证明轨线不能在 (0，1) 中与 q 轴相碰．若不然，则有一点 $(q_0,0)$ 在轨线上，$q_0\in(0,1)$．于是存在 $\xi_0\in(-\infty,+\infty)$使得

$$q(\xi_0)=q_0,\quad q'(\xi_0)=0$$

若 $q''(\xi_0)=0$，则 $f(q_0)=0$，由初值问题解的唯一性得 $q(\xi)\equiv q_0$，这便矛盾了．因此 $q''(\xi_0)\neq 0$．这意味着当轨线通过 $(q_0,0)$ 点时 $p=q'$ 必须变号，与 $p\geqslant 0$ 矛盾．因此

$$p=\frac{dq}{d\xi}>0\quad(\xi\in(-\infty,+\infty))$$

从而 $q(\xi)$ 严格单调上升．证毕．

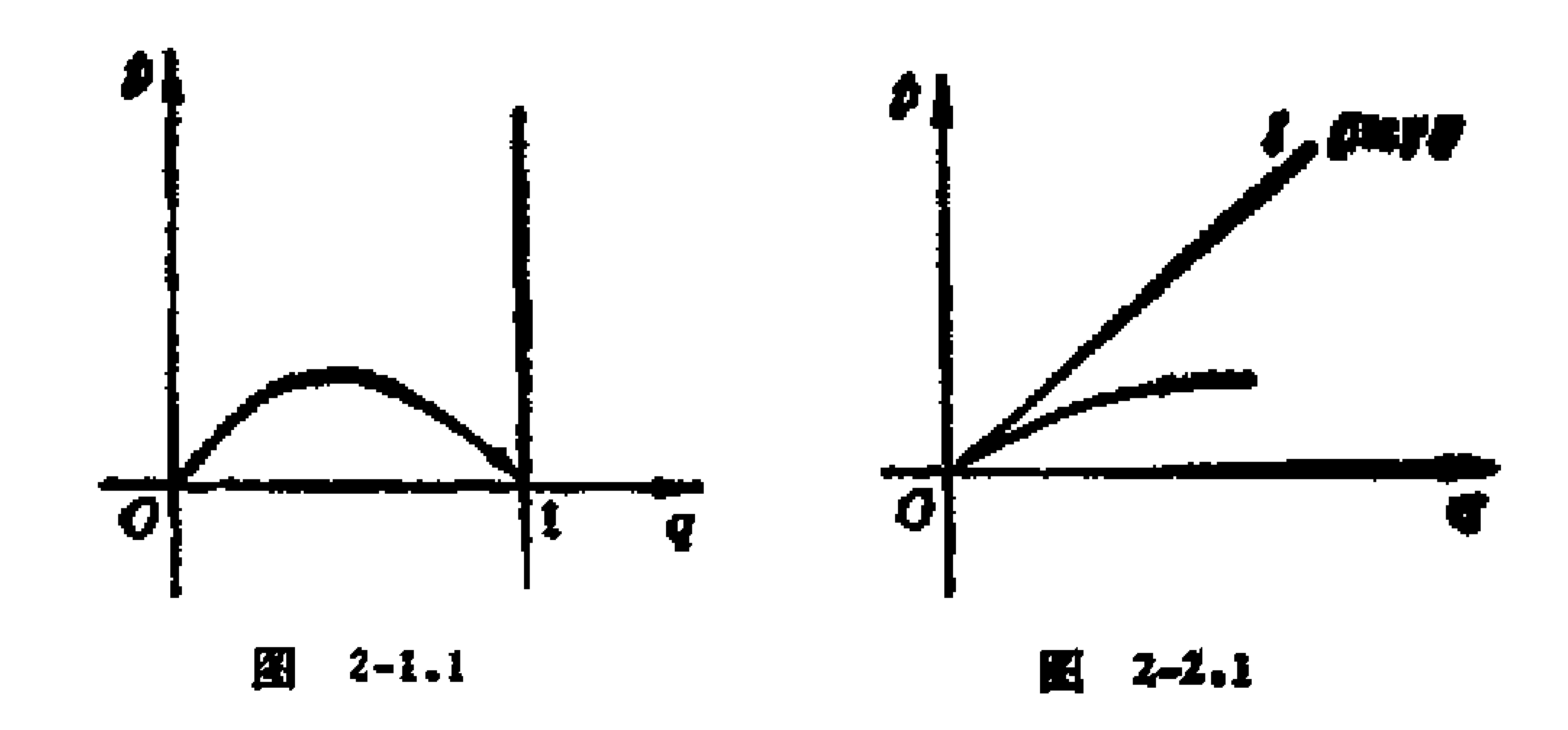


图 2-1.1　　　图 2-2.1

2.2 波前解的存在性和唯一性

现在我们在 $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$ 的前提下求

$$\begin{cases}q''+cq'+f(q)=0\\ q(-\infty)=0,q(+\infty)=1\end{cases}\tag{2.1}$$

的严格单调解. 它等价于求解

$$\begin{cases}\dfrac{dq}{d\xi}=p\\ \dfrac{dp}{d\xi}=-cp-f(q)\\ q(-\infty)=0,\ q(+\infty)=1,\ p(\pm\infty)=0\\ p>0,\ \xi\in(-\infty,+\infty)\end{cases}\tag{2.2}$$

2.2.1 问题的转化

由前面的结果立即可得

引理 2.2.1 若(2.1)有解 $q(\xi)$, $q\in(0,1)$, 则

$$p(\xi)=\frac{dq}{d\xi}$$

可表为 $p=p(q)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ 并满足

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dq}=-c-\dfrac{f(q)}{p}\\ p(0)=p(1)=0\\ p(q)>0,\quad q\in(0,1)\end{cases}\tag{2.3}$$

反之，我们还有：

引理 2.2.2 设 $p(q)\in C[0, 1]\cap C^2(0, 1)$ 满足(2.3)，则初值问题

$$\begin{cases} q = p(q) \quad (-\infty < \xi < +\infty) \\ q(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.4}$$

存在解 $q(\xi)\in C^2(-\infty, +\infty)$，且 $q(\xi)$ 是(2.1)的严格单调解，$q(-\infty) = 0$，$q(+\infty) = 1$.

证明 设 (2.4) 的解 $q(\xi)$ 最大存在区间是 (ξ_0, ξ_1)，显然 $q(\xi)\in(0, 1)$ $(\xi\in(\xi_0, \xi_1))$，从而严格单调上升. 当 $\xi\in(\xi_0, \xi_1)$ 时，由(2.3)的方程得

$$\frac{d^2q}{d\xi^2} = \frac{dp}{dq}\cdot\frac{dq}{d\xi} = \frac{dp}{dq}p = -cp - f(q)$$

即

$$q'' + cq' + f(q) = 0$$

现在证明：$\xi_0 = -\infty$，$\xi_1 = +\infty$.

因为 $f(0) = 0$，$f\in C^1[0, 1]$，所以存在某 $\beta > 0$，使得

$$|f(q)| < \beta q.$$

对于给定的 c，存在 $\gamma > 0$ 使 $\dfrac{\beta}{\gamma} - c < \gamma$. 设 l 是 qp 平面上的直线 $p = \gamma q$（图 2-2.1）. 若给定的解 $p = p(q)$ 在除原点外的第一象限的某点处与 l 相碰，则在该点处

$$\frac{dp}{dq} = -c - \frac{f(q)}{p} \leqslant -c + \frac{|f(q)|}{p} \leqslant -c + \frac{\beta}{\gamma} < \gamma$$

所以轨线进入 l 的下方. 这蕴含着对某个 $\delta > 0$，当 $q\in(0, \delta)$ 时，或者

(i) $p(q) > \gamma q$

或者

(ii) $p(q) < \gamma q$

若是第一种情形，则由 (2.3) 的方程得 $\dfrac{dp}{dq} < \gamma$，积分之得，

$p(q) \leqslant \gamma q$，这就矛盾了．因此，(ii) 必须成立．这也就证明了

$$p(q) < \gamma q, \quad q \in (0, 1)$$

于是积分(2.4)得

$$-\xi_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dq}{p(q)} > \frac{1}{\gamma} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dq}{q} = +\infty$$

即 $\xi_0 = -\infty$。

因为 $q(\xi) \in (0, 1)$，$q(\xi)$ 严格单调上升，所以 $\lim\limits_{\xi \to -\infty} q(\xi) = q_- \geqslant 0$．若 $q_- > 0$，则 $\lim\limits_{\xi \to -\infty} q'(\xi) > 0$ 与 $q(\xi)$ 有界矛盾了，故 $q_- = 0$。

类似可证 $\xi_1 = +\infty$，$q(+\infty) = 1$。

由引理 2.2.1 和 2.2.2 可得

引理 2.2.3 值域为(0. 1)的波前解 $u(x, t) = q(x - ct)$ 与(2.3)的解 $p(q)$ 可按如下法则建立一一对应:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\xi} = p(q) \\ q(0) = a, \quad a \in (0, 1) \end{cases} \tag{2.5}$$

$q(\xi)$ 对 ξ 的平移认为是一个解.

把以上结果总结成下面的定理:

定理 2.2.4 设 $f(u) \in C^1[0, 1]$，$f(0) = f(1) = 0$，则方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

存在值域为 (0,1) 的波前解的充要条件是: 存在 $p = p(q) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dq} = -c - \dfrac{f(q)}{p} \\ p(0) = p(1) = 0 \\ p(q) > 0, \quad q \in (0, 1) \end{cases}$$

或者方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{dq}{d\xi} = p \\
\dfrac{dp}{d\xi} = -cp - f(q)
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

存在联结(0，0)和(1，0)且属于 $\{(q, p) | 0 < q < 1, p > 0\}$ 的轨线。

2.2.2 存在波前解的必要条件

求波前解即找出所有 c 值使(2.2)有解。(2.2) 解的存在性强烈地依赖于(0,0)和(1，0)平衡点的类型。

在(0，0)点与(1，0)点的线性化方程的系数矩阵分别为

$$
A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -c \end{pmatrix}
$$

$$
A(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & -c \end{pmatrix}
$$

它们的特征值分别是

$$
\lambda = \frac{1}{2}\left[-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}\right]
$$

$$
\lambda = \frac{1}{2}\left[-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(1)}\right]
$$

我们假定 $f'(0) \neq 0$，$f'(1) \neq 0$，即平衡点是简单的。

先考虑(0，0)点。它有以下情形：

1° $f'(0) > 0$，$c^2 \geq 4f'(0)$——两个同号的实特征值。(0，0)点是稳定结点 ($c > 0$) 或不稳定结点 ($c < 0$)。要使(2.2)有解，必须要求 $c < 0$。

2° $f'(0) < 0$——两个异号的实特征值。(0，0)是鞍点。

3° $c^2 < 4f'(0)$——两个共轭复特征值，(0，0) 是焦点或中心。这时(2.2)不可能有解。

同样的情况发生在(1，0)点。

当(0，0)和(1，0)都是结点时，为使(2.2)有解，必须要求(0，

0)是不稳定的（$c<0$），(1，0)是稳定的（$c>0$），而这是不可能的．因此，仅当是以下情形才可能有波前解：

(0，0)　(1，0)

(1) 结点-鞍点（$f'(0)>0$，$f'(1)<0$，$c<0$，$c^2\geqslant 4f'(0)$）．

(2) 鞍点-结点（$f'(0)<0$，$f'(1)>0$，$c>0$，$c^2\geqslant 4f'(1)$）．

(3) 鞍点-鞍点（$f'(0)<0$，$f'(1)<0$）．

方程(2.1)的单调解，给出单调上升的波前解．若考虑

$$\begin{cases} q''+cq'+f(q)=0 \\ q(-\infty)=1,\ q(+\infty)=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

的单调解可得单调下降的波前解． 作自变量替换可将(2.7)化成(2.1)，因此我们就不必考虑它了．

对于鞍-结情形又可归结为结-鞍情形．作变换 $\tilde{q}=1-q$，又令 $\tilde{f}(\tilde{q})=-f(1-\tilde{q})$，则(2.1)化成

$$\begin{cases} \tilde{q}''+c\tilde{q}'+\tilde{f}(\tilde{q})=0 \\ \tilde{q}(-\infty)=1,\tilde{q}(+\infty)=0 \end{cases}$$

因为 $\tilde{f}'(0)=f'(1)$，$\tilde{f}'(1)=f'(0)$，所以鞍-结情形转化为结-鞍情形．因此我们只考虑结-鞍与鞍-鞍两种情形．

2.2.3　初值问题的正解对参数的单调性

在讨论波前解的存在唯一性时需要先讨论初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dq}+\dfrac{f(q)}{p}=-c \\ p(0)=0 \\ p(q)>0\quad (0<q<q_0,\ q_0\in(0,1]) \end{cases} \tag{2.8}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dq}+\dfrac{f(q)}{p}=-c \\ p(1)=0 \\ p(q)>0\quad (q_1<q<1,\ q_1\in[0,1)) \end{cases} \tag{2.9}$$

的解对参数 c 的依赖性.

为了后面的需要，我们讨论更一般的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dp_i}{dq}+\dfrac{f(q)}{p_i}=-c_i & (q\in(\alpha,\beta))\\ p_i(\alpha)=\alpha_i\\ (i=1,2)\end{cases}\tag{2.10}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{dp_i}{dq}+\dfrac{f(q)}{p_i}=-c_i & (q\in(\alpha,\beta))\\ p_i(\beta)=\beta_i\\ (i=1,2)\end{cases}\tag{2.11}$$

其中 $0\leq\alpha<\beta\leqslant 1$.

引理 2.2.5 设 $\exists\,\delta>0$，当 $\alpha<q<\alpha+\delta$ 时 $f(q)\leqslant 0$，又设 $\alpha<q<\beta$ 时 $p_i(q)$ 满足(2.10)且 $p_i(q)$ 均正（或均负）.

1° 当 $c_1=c_2$，$\alpha_1=\alpha_2$ 时 $p_1(q)=p_2(q)$ $(q\in(\alpha,\beta))$；

2° 当 $c_1<c_2$，$\alpha_1\geqslant\alpha_2$ 时 $p_1(q)>p_2(q)$ $(q\in(\alpha,\beta))$.

证明

$$(p_1-p_2)'-\frac{f(q)}{p_1p_2}(p_1-p_2)=-(c_1-c_2)$$

两边乘以

$$\exp\left[\int_{\alpha+\frac{\delta}{2}}^{q}-\frac{f(t)}{p_1(t)p_2(t)}\,dt\right]\equiv h(q)$$

令

$$G(q)=(p_1(q)-p_2(q))h(q)$$

得

$$\frac{dG}{dq}=-(c_1-c_2)h(q),\quad q\in(\alpha,\beta)$$

若 $K=\displaystyle\int_{\alpha+\frac{\delta}{2}}^{\alpha}-\frac{f(t)}{p_1(t)p_2(t)}\,dt$ 发散，则 $\lim\limits_{q\to\alpha+0}G(q)=0$.

若 K 收敛，则

$$\lim_{q\to\alpha+0}G(q)\geqslant 0\quad(\text{当 }\alpha_1=\alpha_2\text{ 时为 }0)$$

若 $c_1=c_2$, $\alpha_1=\alpha_2$, 则

$$\lim_{q\to\alpha+0} G(q)=0$$

$$\frac{dG}{dq}=0,\quad q\in(\alpha,\beta)$$

故 $G(q)\equiv 0$, 即 $p_1(q)=p_2(q)$.

若 $c_1<c_2$, $\alpha_1\geqslant\alpha_2$, 则

$$\lim_{q\to\alpha+0} G(q)\geqslant 0$$

$$\frac{dG}{dq}>0,\quad q\in(\alpha,\ \beta)$$

故 $G(q)>0$, 即 $p_1(q)>p_2(q)$, $q\in(\alpha,\beta)$. 证毕.

类似可证

引理 2.2.6 设 $\exists\delta>0$, 当 $\beta-\delta<q<\beta$ 时 $f(q)\geqslant 0$, 又设 $\alpha<q<\beta$ 时 $p_i(q)$ 满足(2.11)且 $p_i(q)$ 均正(或均负).

1° 当 $c_1=c_2$, $\beta_1=\beta_2$ 时 $p_1(q)=p_2(q)$ $(q\in(\alpha,\beta))$;

2° 当 $c_1<c_2$, $\beta_1\leqslant\beta_2$ 时 $p_1(q)<p_2(q)$ $(q\in(\alpha,\ \beta))$.

由上述两个引理立即得到如下推论:

推论 2.2.7 设 $f\in C^1[0,1]$. 若 $f(0)=0$, $f'(0)<0$, 则(2.8)的解对参数 c 是严格下降的; 若 $f(1)=0$, $f'(1)<0$, 则(2.9)的解对参数 c 是严格上升的.

推论 2.2.8 若 $q_0\in(0,1)$, 当 $q\in(0,q_0)$ 时 $f(q)\leqslant 0$ 或当 $q\in(q_0,1)$ 时 $f(q)\geqslant 0$, 则对每个 c, (2.3)至多有一个解.

推论 2.2.9 对于鞍-鞍情形, 若对某个 $c=c_0$, (2.3) 有解 $p=p_{c_0}(q)$, 则对 $\forall c\neq c_0$, (2.3) 一定无解.

推论 2.2.10 对于结-鞍情形, 若对某两个 $c=c_i$ $(i=1,2)$, (2.3)有解 $p=p_{c_i}(q)$, $c_1<c_2$, 则对 $\forall c_1<c<c_2$, (2.3) 必有解 $p=p_c(q)$.

引理 2.2.11 设 $f\in C^1[0,1]$, $f(1)=0$, $f'(1)<0$, 又设 c_n 单调上升, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=c^*$. 若 $c=c_n$ 时(2.3)有解 $p_n(q)$, 则存在极限

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(q) = p^*(q)$$

且 $p^*(q)$ 是(2.3)当 $c = c^*$ 时的解.

证明　由(2.3)得

$$p_n(q)dp_n = -c_n p_n dq - f(q)dq$$

$$\frac{1}{2} p_n^2(q) = -c_n \int_0^q p_n(q)dq - \int_0^q f(s)ds$$

令

$$M_n = \max_{[0,1]} p_n(q)$$

于是存在正的常数 a 与 b, 使得

$$\frac{1}{2} M_n^2 \leqslant aM_n + b$$

因此存在常数 $M > 0$, 对一切 n 有

$$M_n \leqslant M$$

$p_n(q)$ 单调上升且一致有界,因此存在极限

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(q) = p^*(q)$$

再由控制收敛定理得

$$\begin{cases} \frac{1}{2} p^{*2}(q) = -c^* \int_0^q p^*(s)ds - \int_0^q f(s)ds \\ p^*(0) = p^*(1) = 0 \\ p^*(q) > 0, \quad q \in (0, 1) \end{cases}$$

因此,当 $c = c^*$ 时, $p^*(q)$ 是(2.3)的解. 证毕.

2.2.4　结-鞍情形的波前解

先在结-鞍情形下考察方程(2.6).

对 $\forall c \neq 0$, (2.6)无周期解($c = 0$ 时(2.6)在第一象限也无周期解). 由于(1, 0)是鞍点, 根据扰动理论知在第一象限存在唯一轨线 Γ, 当 $\xi \to +\infty$ 时它从左上方趋向(1, 0). 若能在 qp 平面的第一象限构造一个区域, q 轴上的 [0, 1] 区间是它的一部分边界, 使得 Γ 始终在该区域内, 则必有 $\xi \to -\infty$ 时 Γ 趋向于(0, 0)点. 我们将用这种方法证明结-鞍情形波前解的存在性.

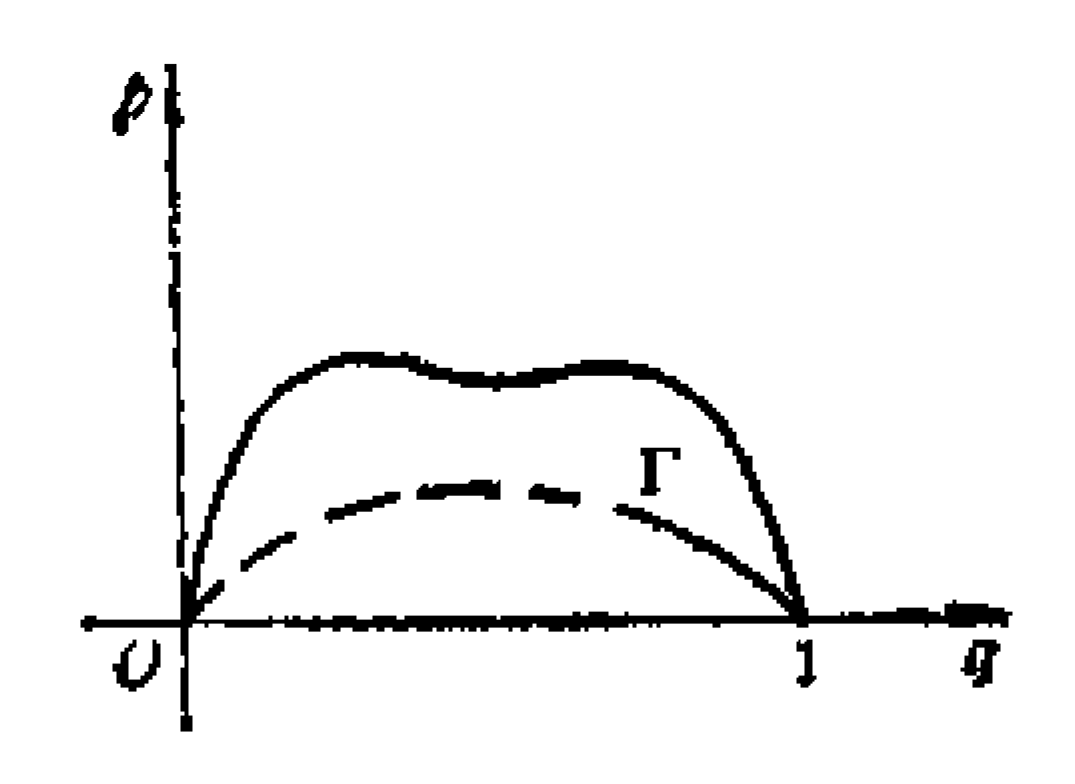


图 2-2.2

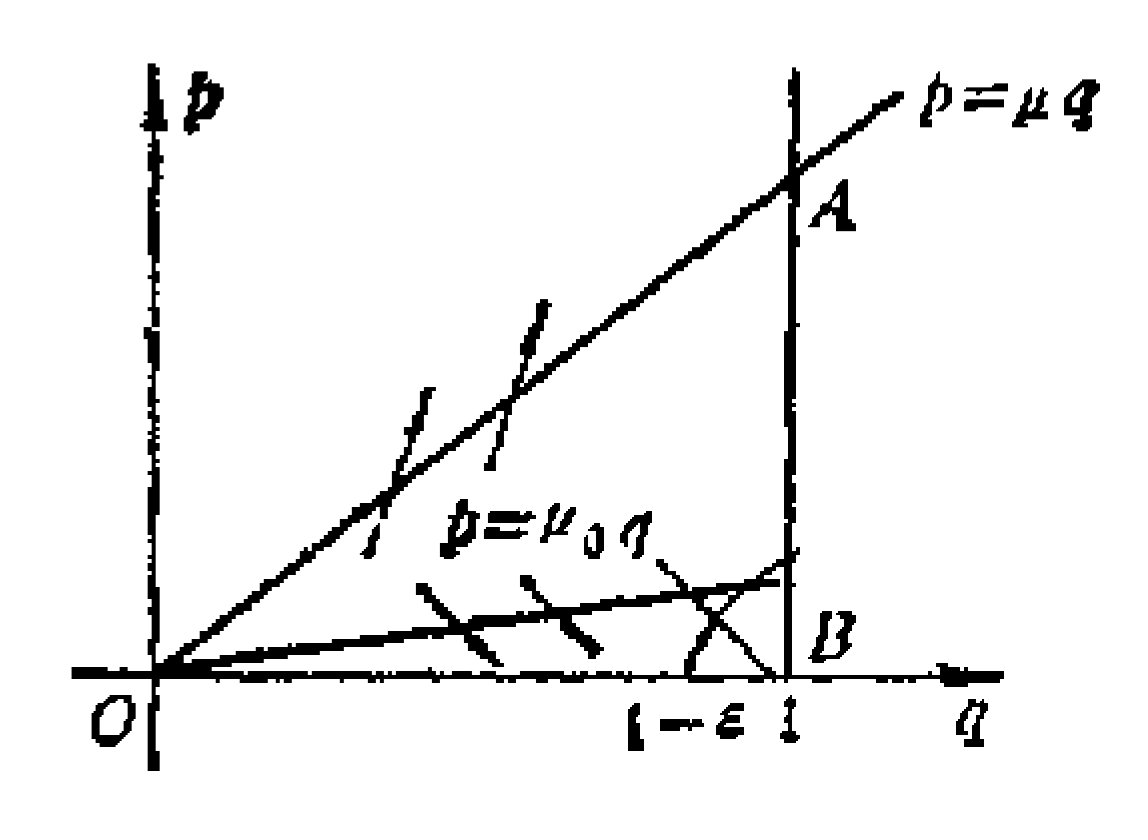


图 2-2.3

定理 2.2.12 设 $f\in C^1[0,1]$，$f(0)=f(1)=0$，$f'(0)>0$，$f'(1)<0$，$u\in(0,1)$时 $f(u)>0$. 则 $\exists c^*$

$$-2\sqrt{\sup_{(0,1)}\frac{f(u)}{u}}\leqslant c^*\leqslant -2\sqrt{f'(0)},$$

使得 (I) 存在波前解 $u=q(x-ct)$ 满足:

$$q(-\infty)=0,\quad q(+\infty)=1$$

的充要条件是: $c\leqslant c^*$.

证明 由必要条件知，$c<0$，$c^2\geqslant 4f'(0)$. 现在以 $B(0,1)$ 为心，充分小的 ε 为半径作圆，当 ξ 充分大后，轨线在此圆内且不与 OB 相碰.

对某 $\mu>0$，作直线 $p=\mu q$，再过 q 轴上的 $B(1,0)$ 点作铅直线，它们交于 A 点. 沿 Γ 倒退回去，Γ 或与 $\triangle OAB$ 的某边相碰，或者当 $\xi\to-\infty$ 时 Γ 趋于原点(图 2-2.3). 若前者不可能，则后者必成立.

在 Γ 上 q 是严格增加的，因此 Γ 不能与 AB 相碰（除了 B 点). 又存在

$$m_0=\min_{(0,1-\varepsilon]}\frac{f(q)}{q}>0$$

于是 $q\in(0,1-\varepsilon]$ 时 $f(q)\geqslant m_0q$. 由此可知，取 $\mu_0>0$，使得 $-c\mu_0-m_0<0$，当 $q\in(0,1-\varepsilon]$，$0<p\leqslant\mu_0q$ 时

$$-cp-f(q)\leqslant(-c\mu_0-m_0)q<0$$

即

$$\frac{dq}{dp}=\frac{p}{-cp-f(q)}<0$$

所以Γ也不能与 OB 相碰.

在斜边 OA 上,

$$\frac{dp}{dq}=-c-\frac{f(q)}{p}\geqslant -c-\frac{vq}{p}$$

其中

$$v=\sup_{[0,1]}\frac{f(q)}{q}\geqslant f'(0)$$

因此在 OA 上

$$\frac{dp}{dq}\geqslant -c-\frac{v}{\mu}$$

若μ满足

$$-c-\frac{v}{\mu}\geqslant \mu \tag{2.12}$$

则轨道不能从上到下穿过 OA 边的.

这就证明了若(2.12)成立,则$\xi\to-\infty$时Γ趋于结点(0,0).(2.12)可写成

$$\mu^2+c\mu+v\leqslant 0$$

等价于: 1° 两根 $\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4v}}{2}$ 是实的,而且 2° μ 在它们之间. 令 c 满足

$$c\leqslant -2\sqrt{v}<0 \tag{2.13}$$

则 1° 成立, $\exists\ \mu$满足 2°. 因此,对 $\forall\ c$ 满足(2.13), 则 (2.2) 存在解.

现进一步证明存在最大的传播速度 c^*,

$$-2\sqrt{v}\leqslant c^*\leqslant -2\sqrt{f'(0)} \tag{2.14}$$

对 $\forall\ c\leqslant c^*$ (2.2) 有唯一解, $c>c^*$ 时(2.2)无解.

令 $E=\{c|$ 使 (2.3) 有解的 $c\}$. 显然 E 非空有上界

$(-2\sqrt{f'(0)})$，故必有上确界，记为 c^*，由(2.13)及必要条件知它满足(2.14)。因为 $-2\sqrt{v}\in E$，若 $c^*=-2\sqrt{v}$ 则证毕．若 $-2\sqrt{v}<c^*$，对 $\forall -2\sqrt{v}<c<c^*$，则存在 $c'\in E$，$c<c'<c^*$，于是 $c\in E$．最后只须再证 $c^*\in E$．

显然，存在 c_n 单调上升，$c_n\to c^*$，$c_n\in E$，于是由引理 2.2.11 知 $c^*\in E$。证毕．

定理 2.2.12 中的 c^* 称为最大传播速度，也称为临界波速．

若考虑单调下降的波前解，我们可得

定理 2.2.13 在定理 2.2.12 的条件下，则存在最小波速 c_*：

$$2\sqrt{f'(0)}\leqslant c_*\leqslant 2\sqrt{\sup_{(0,1)}\frac{f(u)}{u}}$$

使得(1)存在波前解 $u=q(x-ct)$ 满足

$$q(-\infty)=1,\quad q(+\infty)=0$$

的充要条件是：

$$c\geqslant c_*$$

证明留做习题．

下面进一步考察最大(小)传播速度 $c^*(c_*)$ 对函数 f 的依赖性以及波前解趋向结点的方向．

定理 2.2.14 设 f，$g\in C^1[0,1]$，$f(0)=f(1)=g(0)=g(1)=0$，$f'(0)>0$，$f'(1)<0$，$u\in(0,1)$ 时 $0<f(u)\leqslant g(u)$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u) \text{ 与 } \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(u)$$

的最大传播速度分别为 c_f^* 与 c_g^*（最小传播速度分别为 c_{*f} 与 c_{*g}），则

$$c_f^*\geqslant c_g^*(c_{*f}\leqslant c_{*g})$$

证明留作练习．

定理 2.2.15 在定理 2.2.12 的假定下，则当 $c<c^*(c>c_*)$ 时(1)的值域为(0，1)的单调上升(下降)的波前解在结点(0，0)

处的方向是

$$\left.\frac{dp}{dq}\right|_0=-\frac{c}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{c^2-4f'(0)}$$

$$\left(\left.\frac{dp}{dq}\right|_0=-\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{c^2-4f'(0)}\right)$$

证明留作练习。

2.2.5 鞍-鞍情形的波前解

对于鞍—鞍情形，至多有唯一的 c 使得 (1) 有波前解，其值域为 $(0, 1)$。因此，必须采用不同于前面的方法来讨论这种情形。

定理 2.2.16 设 $f\in C^1[0, 1]$, $f(0)=f(1)=0$, $f'(0)<0$, $f'(1)<0$, f 在 $(0, 1)$ 只有一个零点，则 (1) 存在唯一的波前解 $u=q(x-ct)$ (即唯一的 c 值)满足：

$$q(-\infty)=0,\quad q(+\infty)=1.$$

证明 $(0,0)$ 是鞍点，由扰动定理知道在第一象限存在一条轨道 Γ_c，当 $\xi\to-\infty$ 时趋向原点。

若轨线离开原点某邻域与 $p=0$ 轴有正距离，即 $p\geqslant a>0$，则 $\left|\frac{dp}{dq}\right|\leqslant\frac{|f(q)|}{a}+|c|$，即 $\frac{dp}{dq}$ 有界，因而 Γ_c 是有界的。

设 $c<0$。记 q_0 是 f 在 $(0, 1)$ 中的零点，则当 $q\in(0, q_0)$ 时 $p(q)>0$,

$$\frac{dp}{dq}=-c-\frac{f(q)}{p(q)}\geqslant-c=|c|>0$$

$$(q\in(0,\ q_0])$$

若 $\bar{q}\in(q_0, 1]$ 是第一个使 $\frac{dp}{dq}=0$ 的点，则

$$p(\bar{q})=\frac{f(\bar{q})}{|c|}\geqslant p(q_0)=p(q_0)-p(0)$$

$$=p'(\xi)q_0\geqslant|c|q_0$$

于是

$$f(\bar{q}) \geqslant |c|^2 q_0$$

当$|c|$充分大时这是不可能的。因此，当 $c<0$，$|c|$ 充分大时，$p(q)$ 在 $[0, 1]$ 严格上升，故必与 BA 相交(图 2-2.4)。

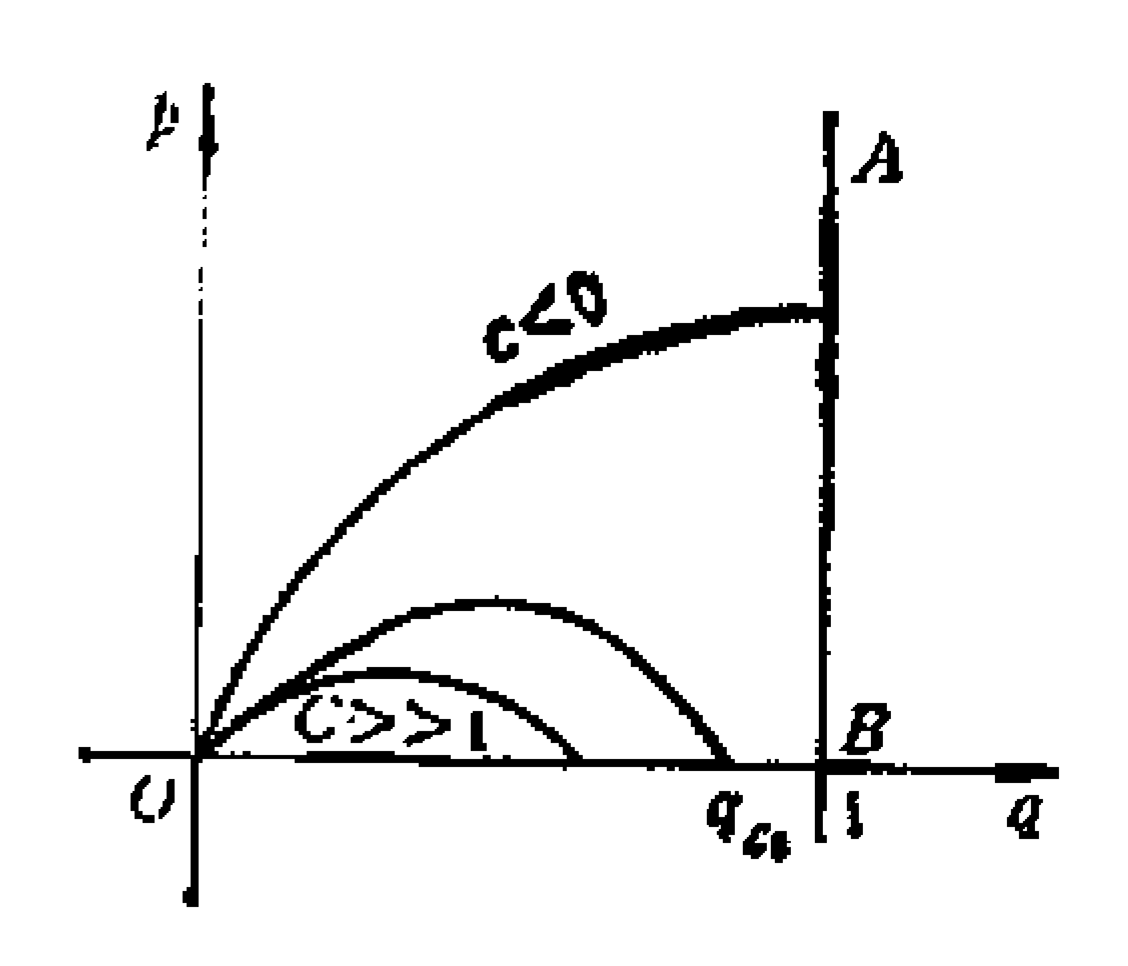


图 2-2.4

取常数 $K>0$，在线段 $p=-K(q-1)(0\leqslant q\leqslant 1)$ 上，

$$\frac{dp}{dq}=-c-\frac{f(q)-f(1)}{-K(q-1)}$$

$$=-c+\frac{1}{K}f'(\xi)<-K$$

当 c 充分大时。因此，c 是充分大正数时，Γ_c 必与 q 轴相交。

令

$$E=\{c|\Gamma_c \text{ 与 } \overline{OB} \text{ 相交}\}$$

显然，E 非空有下界，必存在下确界 $c_0=\inf E$。于是存在单调下降序列 $c_n\in E$，$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=c_0$，因而 $c_0\in E$（习题 2.7）。Γ_{c_0} 与 OB 交于 q_{c_0}，$q_{c_0}\leqslant 1$。进一步证明 $q_{c_0}=1$。

记 f 在$(0, 1)$的唯一零点为 q_0。若 $q_{c_0}<1$，则比 c_0 小一点的 c，$\dfrac{dp}{dq}$ 至少有两个零点 q_1，$q_2\in(0, 1)$，

$$0=\frac{dp}{dq}=-c-\frac{f(q_i)}{p(q_i)} \tag{2.15}$$

$$(i=1, 2)$$

且满足 $q_1<q_2$，$p(q_1)>p(q_2)>0$。由于解对参数的连续依赖性(证明可参见［AW，2］)，

$$\lim_{c\to c_0^-} q_2=q_{c_0}, \quad \lim_{c\to c_0^-} p(q_2)=0$$

又 $c<c_0$ 时 $q_2>q_{c_0}$。(见图 2-2.4。)

由 (2.15)，

$$f(q_2)=-cp(q_2) \tag{2.16}$$

令 $c\to c_0-0$，得 $f(q_{c_0})=0$，故 $q_{c_0}=q_0$，由 $q_2>q_0$，所以 $f(q_2)>0$，由(2.16)得 $c<0$，再由(2.15)得 $f(q_1)>0$. 因为 $q>0$ 充分小时 $f(q)<0$，故 $(0,q_1)$ 中还有 f 的零点，但这是不可能的．因此 $q_{c_0}=1$．证毕．

2.3 $f(u)=u(1-u)(u-a)(0<a<1)$ 时单调与非单调行波解的存在性

本节考虑一个特例

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)(u-a) \tag{3.1}$$

其中 $0<a<1$．此处 $f(u)=u(1-u)(u-a)$．

因为 $f(0)=f(1)=0, f'(0)=-a<0, f'(1)=a-1<0$，当 $0<u<a$ 时 $f(u)<0$，$a<u<1$ 时 $f(u)>0$，这是鞍-鞍情形，所以(3.1)存在唯一的值域为(0.1)的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$．因为 $\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{12}(1-2a)$，所以若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $c<0$；若 $\frac{1}{2}<a<1$，则 $c>0$；若 $a=\frac{1}{2}$，则$c=0$．但是这时 f 有三个零点：$0,a,1$，是否 $(0,0)$，$(a,0)$，$(1,0)$ 两两之间都可连接成(3.1)的行波解呢(单调的或非单调的)？因此，我们要寻找行波解 $u(x,t)=q(x-ct)$ 使得 $q(\pm\infty)\in\{0,a,1\}$ q 满足的方程是

$$q''+cq'+q(1-q)(q-a)=0 \tag{3.2}$$

作变换 $q=1-q^*$，使我们可以只考虑 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 的情形．作自变量替换 $\xi=-\eta$，使我们可以只考虑 $c\geqslant 0$ 的情形．

2.3.1 奇点分析与各种可能的情形

(3.2) 等价于

$$q' = p,\ p' = -q(1-q)(q-a) - cp$$

它在 $(q, 0)$ 处的线性化方程记为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A(q, 0)\eta$$

其中 $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -c \end{pmatrix}$$

其特征根

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a}}{2}$$

故$(0, 0)$是鞍点.

$$A(a, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(a-1) & -c \end{pmatrix}$$

其特征根

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a(1-a)}}{2}$$

故当 $c^2 \geqslant 4a(1-a)$ 时，$(a, 0)$ 是结点，又 $c > 0$ 时是稳定结点. 当 $c^2 < 4a(1-a)$，$c > 0$ 时 $(a, 0)$ 是稳定焦点，$c = 0$ 时 $(a, 0)$ 是中心.

同样地，考察 $A(1, 0)$ 可知，$(1, 0)$是鞍点.

上述鞍点邻域的图形见图 2-3.1.

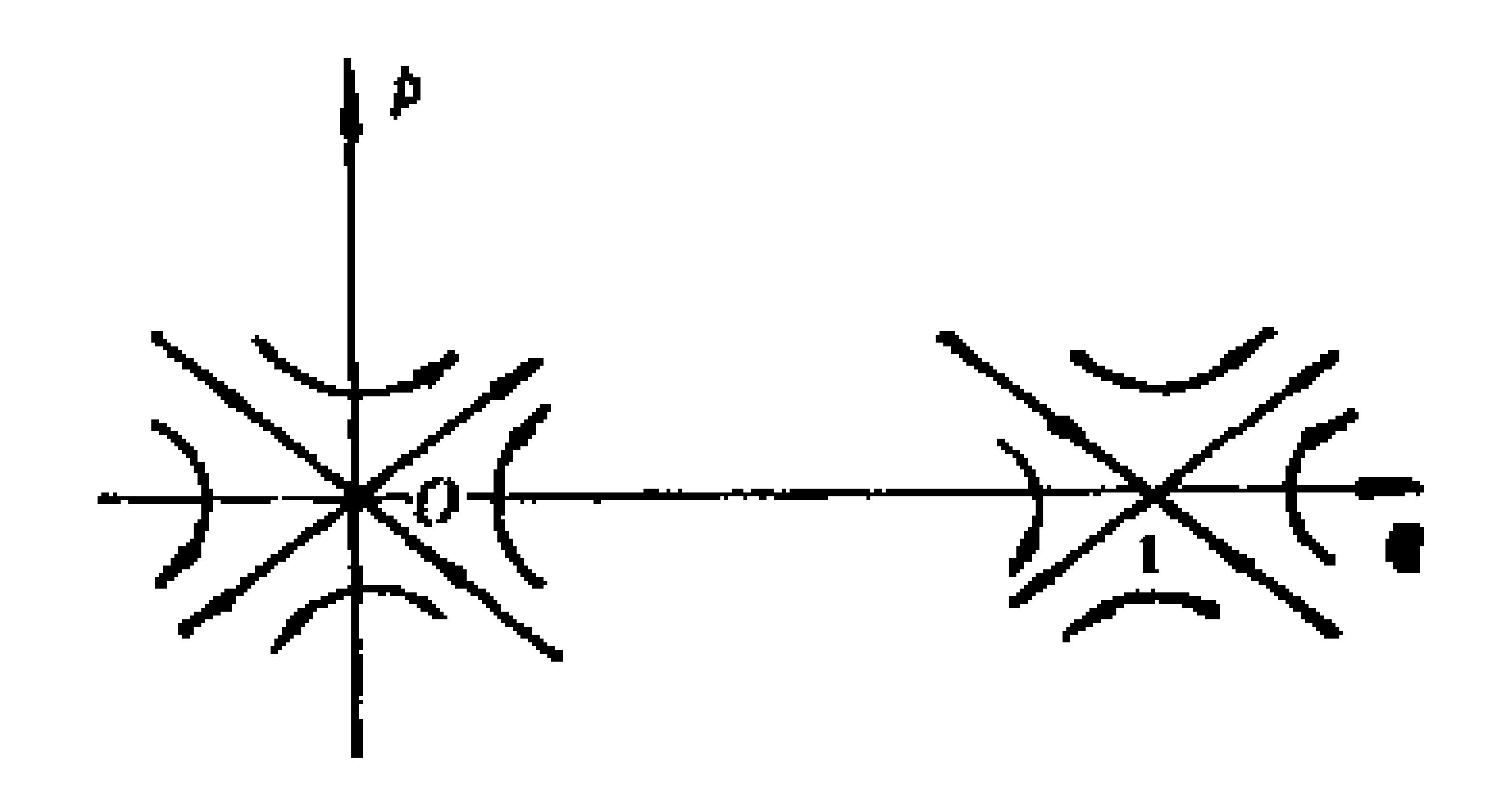


图 2-3.1

因为 $c>0$ 时 $q(-\infty)\neq q(+\infty)$ 且 $(a,0)$ 是稳定的，所以只可能再出现以下情形：

$q(-\infty)$	$q(+\infty)$
0	a
1	0
1	a

当 $c=0$ 时可以出现 $q(-\infty)=q(+\infty)$ 的情形。

2.3.2 $c=0$ 的情形

当 $c=0$ 时(3.2)是保守系统。

因 $f(q)=q(q-a)(1-q)$，所以势能

$$F(q)=\int_0^q f(s)ds=-\frac{1}{4}q^4+\frac{1}{3}(a+1)q^3-\frac{1}{2}aq^2$$

因为 $F'(q)=f(q)$，$F''(q)=-3q^2+2(a+1)q-a$，$q=0,a,1$ 时 $F'(q)=f(q)=0$，$F''(0)=-a<0$，$F''(a)=a(1-a)>0$，$F''(1)=a-1<0$，所以容易画出能量曲线 $u=F(q)$，从而可画出 $c=0$ 时(3.2)的相图（当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时见

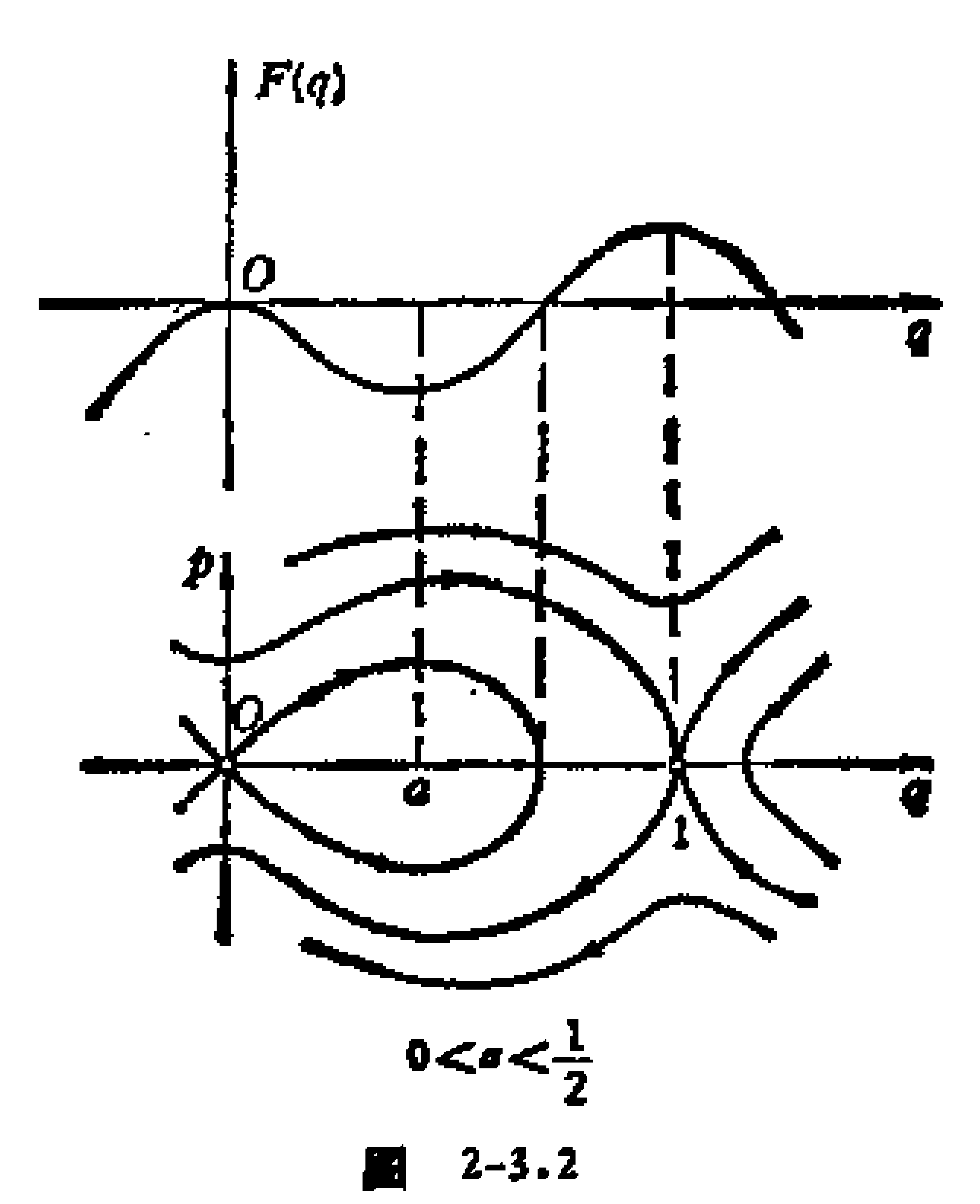


图 2-3.2

图 2-3.2，当 $a=\frac{1}{2}$时读者自己画出相图)。

因此，$c=0$ 时(3.2)有无穷多个周期解，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时并有唯一解满足 $q(\pm\infty)\in\{0, a, 1\}$，而此时

$$q(-\infty)=q(+\infty)=0$$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时请读者给出结论。

2.3.3 c>0 时各种可能情形化为统一的形式

现只须考察

$$q''+cq'+q(1-q)(q-a)=0$$

$$\left(c>0,\ 0<a\leqslant\frac{1}{2}\right) \tag{3.2'}$$

(3.2′) $q(-\infty)=0,\ q(+\infty)=a$ (A)

(3.2′) $q(-\infty)=1,\ q(+\infty)=a$ (B)

(3.2′) $q(-\infty)=1,\ q(+\infty)=0$ (C)

现将它们化为统一的形式，即 $w(-\infty)=1,\ w(+\infty)=0$。

对 (A)，令 $w=\frac{1}{a}(a-q)$，则 (A) 化为

$$\begin{cases}w''+cw'+a(1-a)w(1-w)(1+\gamma w)=0\\ w(-\infty)=1,\ w(+\infty)=0\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $\gamma=\frac{a}{1-a}\in(0,1)$。对(B)，令 $w=\frac{1}{1-a}(q-a)$，则(B)也化为(3.3)，但其中 $\gamma=\frac{1-a}{a}\in[1,+\infty)$。(3.3) 方程两边同除以 $a(1-a)$，再令 $\zeta=\sqrt{a(1-a)}\xi$ 得

$$\begin{cases}\dfrac{d^2w}{d\zeta^2}+\hat{c}\dfrac{dw}{d\zeta}+f(w)=0\\ w(-\infty)=1,\quad w(+\infty)=0\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $f(w)=w(1-w)(1+\gamma w)$，$\hat{c}=\frac{c}{\sqrt{a(1-a)}}$，$\gamma\in(0,$

$+\infty$). 下面以 c 代替 $\hat{c}$.

2.3.4 显式解

现在对

$$\begin{cases} w'' + cw' + w(1-w)(1+\gamma w) = 0 \\ w(-\infty) = 1, \quad w(+\infty) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

的某 c 值求出显式解.

令 $v = w' = kw(w-1)$, $k > 0$ 是待定的. 则

$$v' = w'' = k^2 w(w-1)(2w-1)$$

将 w', w'' 代入(3.5)的方程式,比较系数得

$$2k^2 = \gamma, \quad k = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}$$

$$-k^2 = 1 - kc, \quad c = \frac{2+\gamma}{\sqrt{2\gamma}}$$

再解

$$\frac{dw}{d\zeta} = kw(w-1)$$

得

$$w = (1 - be^{k\zeta})^{-1}, \quad b \text{ 为任意常数.}$$

不计自变量的平移,可取

$$w = (1 + e^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\zeta})^{-1}$$

用类似方法可求得,当 $c = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - a\right)$ 时

$$\begin{cases} q'' + cq' + q(1-q)(q-a) = 0 \\ q(-\infty) = 1, \quad q(+\infty) = 0 \end{cases}$$

有解

$$q = (1 + e^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\zeta})^{-1}$$

2.3.5 结-鞍与鞍-鞍情形的波前解

当 $\gamma \in (-1, +\infty)$ 时,令 $f(w) = w(1-w)(1+\gamma w)$,则

(3.5) 是属于结-鞍情形且 $f(w)>0(w\in(0,1))$. 做自变量替换后利用定理 2.2.8 得知，存在最小速度 $\underline{c}$，当 $c\geqslant \underline{c}$ 时(3.5)有单调下降的解，而 $c<\underline{c}$ 时(3.5)无单调下降的解. 下面来求 $\underline{c}$.

由(2.14)得

$$1=f'(0)\leqslant \underline{c}^2/4\leqslant \sup_{(0,1)}\frac{f(w)}{w}=\sup_{[0,1]}G(w)$$

其中 $G(w)=(1-w)(1+\gamma w)$. 易知.

$$G(w)\leqslant\begin{cases}1 & (\gamma\in(-1,1))\\ \dfrac{(\gamma+1)^2}{4\gamma} & (\gamma\in[1,+\infty))\end{cases}$$

由此立即得到

$$\underline{c}=2\quad(\gamma\in(-1,1])$$

当 $\gamma=2$ 时对 $c=2$, (3.5)有解(显式解)，故 $\underline{c}\leqslant 2$, 又 $\underline{c}\geqslant 2$, 于是 $\underline{c}=2$. 当 $1\leq\gamma\leqslant 2$ 时 f 对 γ 增加，所以 $\underline{c}$ 随 γ 增加，因而 $\underline{c}=2$. 这就证明了

$$\underline{c}=2\quad(-1<\gamma\leqslant 2)$$

对 $\gamma>2$, 考察 $c=c_H=\dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma}}$ 时(3.5)的解

$$w=(1+e^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\zeta})^{-1}$$

则

$$\lim_{\zeta\to+\infty}\frac{dw'}{dw}=\lim_{\zeta\to+\infty}\frac{w''}{w'}=-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}$$

若 $c_H>\underline{c}$, 则 $w(\zeta)$ 到达(0, 0)的方向应满足

$$\frac{dw'}{dw}=-\frac{c_H}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{c_H^2-4}$$

即

$$\frac{1}{2}\sqrt{c_H^2-4}=\frac{c_H}{2}-\sqrt{\frac{\gamma}{2}}$$

当 $\gamma>2$ 时此等式左边为正、而右边为负，故矛盾. 因此 $c_H=\underline{c}$.

以上证明了(3.5)的最小速度

$$c=\begin{cases}2 & (-1<\gamma\leqslant 2)\\ \dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma}} & (\gamma\geqslant 2)\end{cases}$$

再回到 (A)，(B) 去，令

$$c^*=2\sqrt{a(1-a)}$$

$$c_0=\begin{cases}(1+a)/\sqrt{2} & \left(0<a\leqslant\dfrac{1}{3}\right)\\ c^* & \left(\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\tag{3.6}$$

记住(3.5)中的 c 乘以 $a(1-a)$ 才是 (A) 与 (B) 中的 c。 对于 (A)，因为 $\gamma\in(0,1]$，所以 (A) 的最小速度

$$c=2\cdot\sqrt{a(1-a)}=c^*$$

对于 (B)，$\gamma=\dfrac{1-a}{a}\in[1,+\infty)$。 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$\gamma\in[2,+\infty)$，当 $\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时 $\gamma\in[1,2]$。所以 (B) 的最小速度

$$c=\begin{cases}\dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{a(1-a)} & \left(0<a\leqslant\dfrac{1}{3}\right)\\ c^* & \left(\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

以 $\gamma=\dfrac{1-a}{a}$ 代入得

$$c=c_0$$

对于 (C)，这是鞍-鞍情形，它有唯一波前解，且已经算过，当 $c=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}-a\right)$ 时 (C) 有单调解.

总结上面的讨论我们得到

定理 2.3.1 设 c_0, c^* 由(3.6)给出，$0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则

1° 当 $c\geqslant c_0$ 时(3.1)有单调下降的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$ 满足

$$q(-\infty)=1,\quad q(+\infty)=a$$

2° 当 $c\geqslant c^*$ 时(3.1)有单调上升的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$ 满足

$$q(-\infty)=0,\quad q(+\infty)=a$$

3° (3.1)存在唯一的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$ 满足

$$q(-\infty)=1,\quad q(+\infty)=0$$

其中 $c=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)$.

2.3.6 鞍-焦与鞍-结情形的非单调行波解

当 $0<c<c^*=2\sqrt{a(1-a)}$ 时，对于点(0, 0)，(a, 0)方程(3.1)属于鞍-焦情形.

定理 2.3.2 当 $0<c<c^*$ 时，(3.1)有振动的行波解

$$u(x,t)=q(x-ct)$$

满足：

$$q(-\infty)=0,\quad q(+\infty)=a$$

证明 由于 $c\neq 0$ 时 $q(-\infty)\neq q(+\infty)$，利用引理 2.2.5 和引理 2.2.6 及相平面上的图形(图 2-3.3)可得证.

再看另一种情形. 对于点 (1, 0)，(a, 0)，当 $0<c<c^*$ 时方程(3.1)属于鞍-焦情形，而 $c>c^*$ 时则属于鞍-结情形.

令 $c_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)$，并注意以下不等式：

$$c^*<c_1<c_0\quad (0<a<\bar{a})$$

$$c_1<c^*<c_0\quad \left(\bar{a}<a<\frac{1}{3}\right)$$

$$c_1<c^*=c_0\quad \left(\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}\right)$$

其中 $\bar{a}=\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\Big/2$ (图 2-3.4).

定理 2.3.3 1° 当 $c_1<c<c^*$ 时(3.1)存在振动的解 $u(x,$

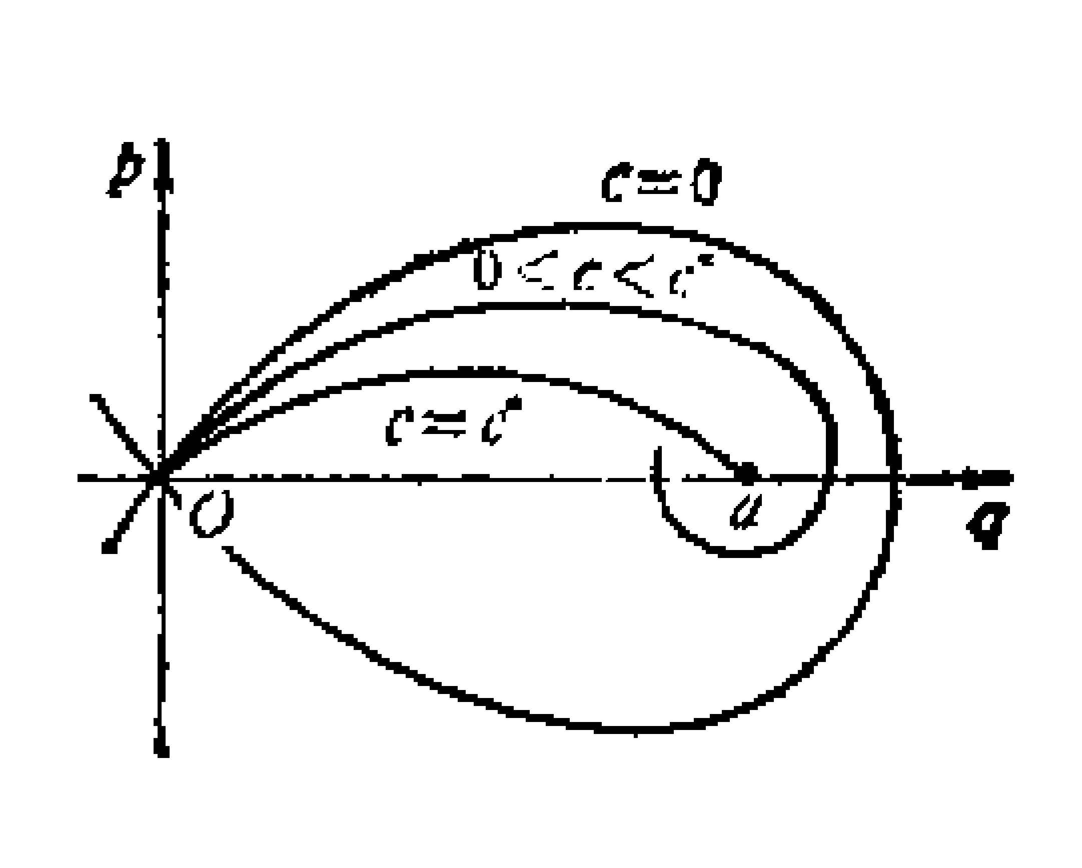



图 2-3.3

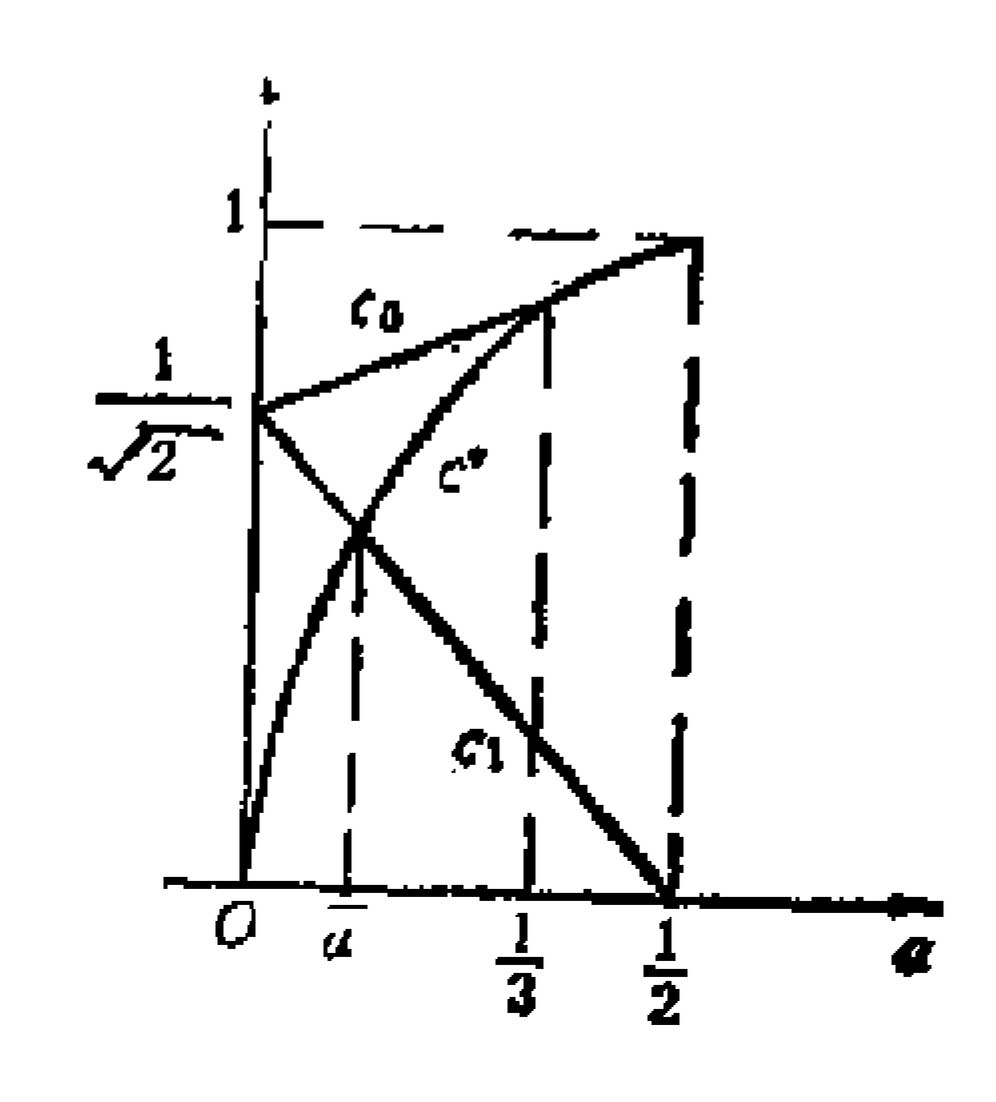


图 2-3.4

$t) = q(x - ct)$ 满足

$$q(-\infty) = 1, \quad q(+\infty) = a$$

2° 当 $\max(c_1, c^*) < c < c_0$ 时 (3.1) 存在解 $u(x, t) = q(x - ct)$，满足：

$$q(-\infty) = 1, \quad q(+\infty) = a$$

而且 q 单调递减到某个小于 a 的正值，然后单调递增，当 $\xi \to +\infty$ 时 q 趋于 a。

证明 1° 由于 $(a, 0)$ 是焦点，由引理 2.2.5 和引理 2.2.6 及图 2-3.5 可得证。

证明 2° 由于 $(a, 0)$ 是结点，由引理 2.2.5 和引理 2.2.6 及图 2-3.6 可得证。

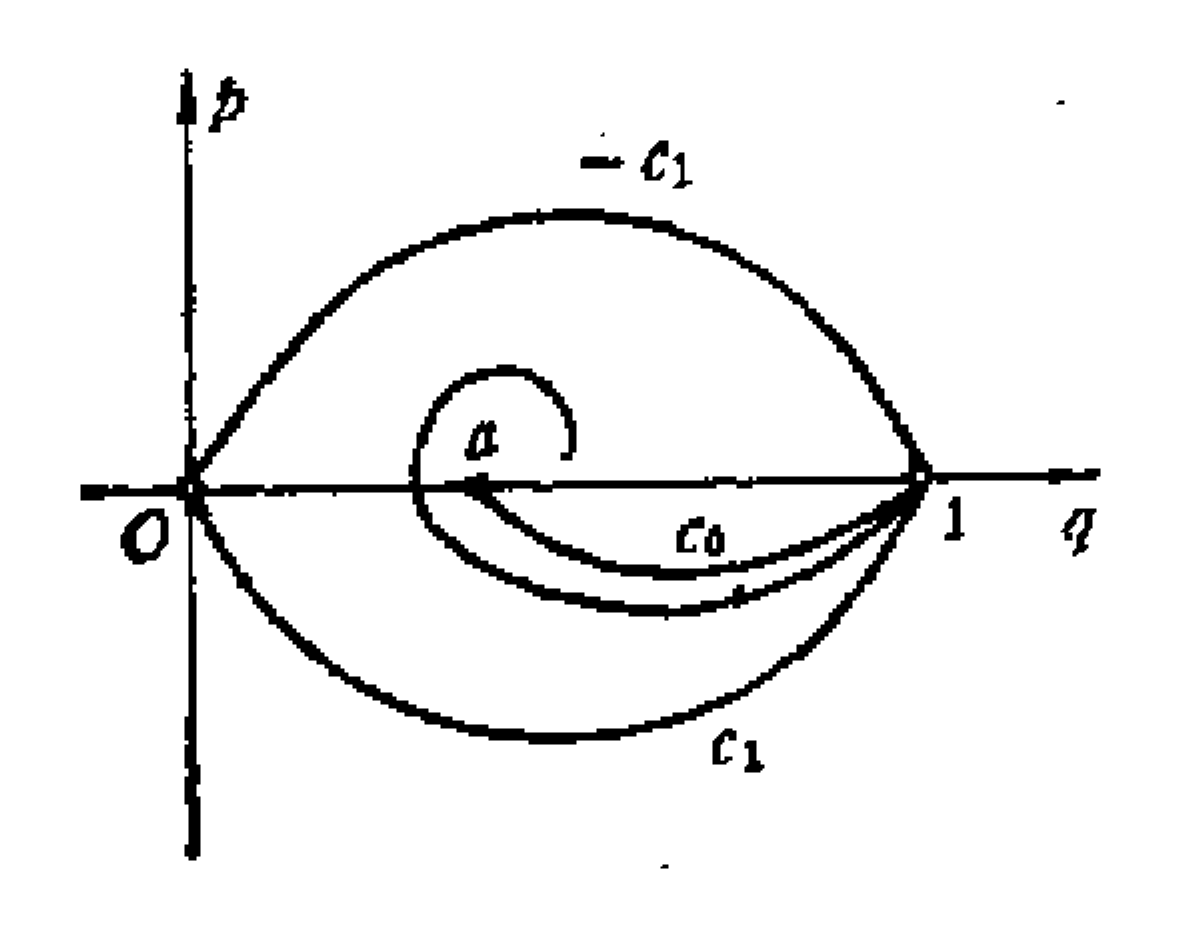


图 2-3.5

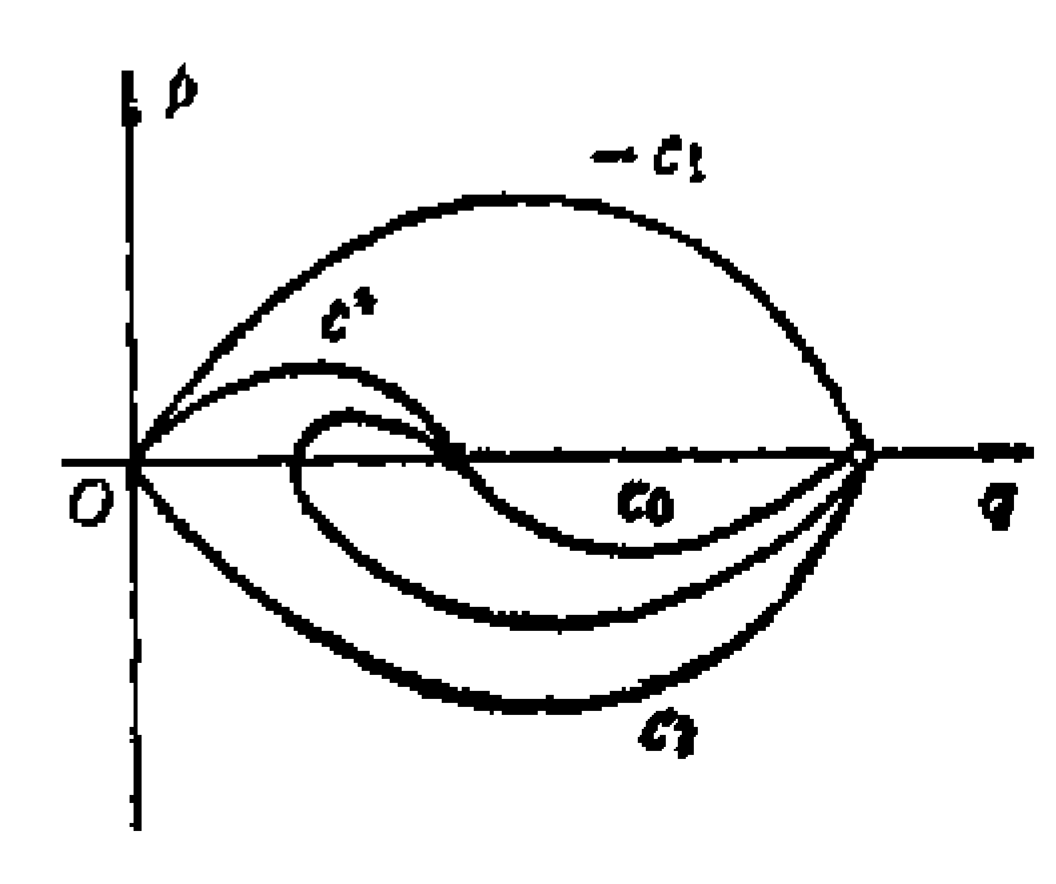


图 2-3.6

2.4 评　　注

许多化学和生物学现象都呈现振动现象以及扰动以有限速度传播的现象．而形为 $u(x,t)=u(x-ct)$（为简单计令 $n=1$）的行进波正好能表现这两个性质．因而研究反映众多化学和生物学中数学模型的反应扩散方程的行波解的存在唯一性和稳定性是既自然又重要的了．

若 $m=1$（即对单个的反应扩散方程）本章已经给了详尽的说明，其主要方法是相平面分析的方法．本评注主要对 $m>1$（即方程组）的情形，给一个简要的说明．

为简单计，令 $m=2$，即要求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=d_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_1(u,v)\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}=d_2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_2(u,v)\end{cases}\tag{1}$$

的形为 $u(x,t)=u(x-ct)$，$v(x,t)=v(x-ct)$ 的解．若令 $\xi=x-ct$，$'=\dfrac{d}{d\xi}$，把 $u(x-ct)=u(\xi)$，$v(x-ct)=v(\xi)$ 代人(1)得

$$\begin{cases}d_1u''=-cu'-f_1(u,v)\\ d_2v''=-cv'-f_2(u,v)\end{cases}\tag{2}$$

若令 $u'=w$，$v'=z$，则得

$$\begin{cases}u'=w\\[1mm] w'=-\dfrac{c}{d_1}w-\dfrac{1}{d_1}f_1(u,v)\\[2mm] v'=z\\[1mm] z'=\dfrac{-c}{d_1}z-\dfrac{1}{d_2}f_2(u,v)\end{cases}\tag{3}$$

这是一个四个一阶方程的常微分方程组．相空间是四维的．同样可以求得奇点为

$$\begin{cases} w=0 \\ f_1(u,v)=0 \\ z=0 \\ f_2(u,v)=0 \end{cases} \tag{4}$$

的解 $(u, v, w, z)=(\bar{u}, \bar{v}, 0, 0)$。行波解只能是连接相空间中两奇点之间的轨道。设这样的两个奇点是 $(u_1, v_1, 0, 0)$，$(u_2, v_2, 0, 0)$，因而求行波解就是求

$$\begin{cases} (3) & -\infty<\xi<+\infty \\ (u, v, w, z)|_{\xi=-\infty}=(u_1, v_1, 0, 0) \\ (u, v, w, z)|_{\xi=+\infty}=(u_2, v_2, 0, 0) \end{cases} \tag{5}$$

的解，这也相当于求

$$\begin{cases} (2) \\ (u, v)|_{\xi=-\infty}=(u_1, v_1),\ (u, v)|_{\xi=+\infty}=(u_2, v_2) \\ (u', v')|_{\xi=\pm\infty}=(0, 0) \end{cases} \tag{6}$$

的解。

求解(5)的困难在于现在的相空间是四维的，不象二维相空间那样由于有 Poincaré-Bendixson 定理，Liapanov 稳定性定理等强有力的结果，使求行波解的问题变得比较容易。但是由于实际问题都是方程组而不是单个方程。因而不少人正在致力于(5)和(6)的求解。现在把(5)，(6)求解的四种方法简述如下：

（一）打靶法技巧结合对奇点的稳定流形和不稳定流的具体分析，应用常微分方程的有关结果或拓扑学工具可以证明行波解的存在性，参看 [Du, FTr, Ty]。

（二）渐近分析方法（奇异摄动法）。这种方法常常依赖于某个参数 ε，为具体起见令

$$d_1=\varepsilon^2, \quad d_2=1$$

而要求的行波解是形为

$$u(x, t)=u(x-\varepsilon ct)$$
$$v(x, t)=v(x-\varepsilon ct), \quad \xi=x-\varepsilon ct$$

于是(6)成为

$$\begin{cases}\varepsilon^2 u'' + c\varepsilon u' + f_1(u, v) = 0 \\ v'' + c\varepsilon v' + f_2(u, v) = 0 \end{cases} \quad (-\infty < \xi < +\infty)$$

$$\begin{cases} (u, v)|_{\xi=-\infty} = (u_1, v_1), \ (u, v)|_{\xi=+\infty} = (u_2, v_2) \\ (u', v')|_{\xi=\pm\infty} = (0, 0) \end{cases} \tag{7}$$

把解$-\infty < \xi < +\infty$上的边值问题(7)化为解$-\infty < \xi \leqslant 0$，和$0 \leq \xi < +\infty$上的边值问题．为表示解依赖于$\varepsilon$，记

$$u = u(\xi, \varepsilon), \quad v = v(\xi, \varepsilon)$$

令

$$u(0, \varepsilon) = a, \quad a \text{ 待定}$$
$$v(0, \varepsilon) = \omega(\varepsilon)$$
$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \cdots \omega_n\varepsilon^n + \cdots$$
$$\omega_i(i = 0, 1, \cdots, n, \cdots) \text{ 待定}$$

设$\{c_n\}$给定，$c(\varepsilon) = c_0 + c_1\varepsilon + \cdots + c_n\varepsilon^n + \cdots$ 我们求(7)的形为

$$\begin{cases} u(\xi, \varepsilon) = U(\xi, \varepsilon) + W\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \\ v(\xi, \varepsilon) = V(\xi, \varepsilon) + Y\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \end{cases} \tag{8}$$

的解，U，V，W，Y 都有关于ε的幂级数展开，代入(7)比较ε^i的系数得一系列二阶微分方程的边值问题，可以证明它们的解存在，于是我们就形式地求得了形为(8)的按ε的幂级数展开的形式解．关于渐近分析法的细节可参看[Fif，2]．

（三）Conley Index 方法．(1) 的解 $u(x, t)$，$v(x, t)$ 在适当的 Banach 空间中可以看成是一个半流．因而可以用拓扑学中有关理论来处理．主要的思想是利用 Conley Index 的同伦不变性，把方程组“保持指标不变地”变换到一组“标准”方程组，而该标准方程组的 Conley Index 是容易计算的，从而证明了行波解的存在性．而关键是确定孤立区域．有兴趣的读者可参看 [Ga，Sm]．

（四）把行波解看成有限区间$[-a, a]$ $(a > 0)$上的解

$(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$ 当 $a \to +\infty$ 时的极限．即首先解

$$\begin{cases} (2), & -a < \xi < a \\ \text{加上在 } \xi = \pm a \text{ 处“合适”的边界条件} \end{cases} \tag{9}$$

(9)是有限区间 $[-a, a]$ 上的边值问题，相对于$(-\infty, \infty)$上的边值问题，它的可解性方法可能多一点．假设(9)的解是 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$，而且设对任意 $a>0$ 充分大(9)都有解．

如果能对解 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$ 作出很好的先验估计，那就有可能证明当 $a\to\infty$时从 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$ 中可抽出一收敛子序列而极限函数 $(u(\xi), v(\xi), c)$ $(-\infty<\xi<+\infty)$ 正好是(6)的解，从而证明了行波解的存在性．

这种方法的好处是为计算提供了方便．

关于这种方法的细节可参看 [BNS, YW]．

关于单个反应扩散方程行波解的稳定性．已经有了很好的结果，见 [AW, Br, FM 1-2, Fif 1-2, Hag, Kag, OR, Sm, Uc]；关于反应扩散方程组的行波解的稳定性的研究也有了一些工作，例 [KT]．

另一个很有意思的问题是当 $t\to+\infty$时

$$\begin{cases} (1) & (-\infty<x<+\infty,\ t>0) \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$, $v(x,t)$ 和(1)的行波解 $u(x-ct)$, $v(x-ct)$ 之间的关系． 当 $|x|\to\infty$ $u_0(x)$, $v_0(x)$ 的行为不同时，$u(x,t)$, $v(x,t)$ 趋于不同波速 c 的行波解 $u(x-ct)$, $v(x-ct)$． 有关这方面结果的一个概述可在 [MMit] 中找到．

习　题　二

2.1　证明热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

不存在非常数有界行波解．

2.2　考察 Burger 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ t>0)$$

及相应的平衡解方程

$$\varphi(x)\varphi'(x)=\nu\varphi''(x)$$

1° 导出行波解 $u=q(x-ct)$ 与平衡解 $\varphi(x)$ 的关系.

2° 求出 $u=q(x-ct)$ 及 $q(\pm\infty)$.

2.3 设 $f_i\in C[0,1]$，当 $u\in(0,1)$ 时 $f_1(u)<f_2(u)$，存在 $\delta>0$，当 $0<1-\delta<u<1$ 时 $f_i(u)\geqslant0$，又设 $p_i(q)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{dp_i}{dq}+f_i(q)/p_i=-c\\ p_i(1)=0\\ p_i(q)>0\quad(0\leqslant a_0<q<1)\quad(i=1,2)\end{cases}$$

求证：$p_2(q)>p_1(q)$，$q\in(a_0,1)$.

2.4 证明定理 2.2.13.

2.5 证明定理 2.2.14.

2.6 证明定理 2.2.15.

2.7 设 $f\in C^1[0,1]$，$f(0)=0$，$f'(0)<0$，c_n 单调下降，$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=c^*$

1° 若 $[0,\beta]\subset[0,1]$，$p_n(q)\in C[0,\beta]\cap C^1(0,\beta)$，在 $(0,\beta)$ 均正且满足

$$\frac{dp_n}{dq}+\frac{f(q)}{p_n}=-c_n\quad(p_n(0)=0)$$

证明

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dq}+\dfrac{f(q)}{p}=-c^*\quad(0<q<\beta)\\ p(0)=0,\ p(q)>0\quad(q\in(0,\beta))\\ p(q)\in C[0,\beta]\cap C^1(0,\beta)\end{cases}$$

存在唯一解 $p^*(q)$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}p_n(q)=p^*(q)\quad(q\in[0,\beta])$$

2° 若 $[0,\beta_n]\subset[0,1]$，$p_n(q)\in C[0,\beta_n]\cap C^1(0,\beta_n)$，在 $(0,\beta_n)$ 上均正且满足

$$\begin{cases}\dfrac{dp_n}{dq}+\dfrac{f(q)}{p_n}=-c_n\\ p_n(0)=p_n(\beta_n)=0\end{cases}$$

求证存在极限 $\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\beta$，并证明

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dq}+\dfrac{f(q)}{p}=-c^*\\ p(0)=0,\ p(\beta)=0,\ p(q)>0 \\ \qquad\qquad (q\in(0,\beta))\\ p(q)\in C[0,\beta]\cap C^1(0,\beta)\end{cases}$$

存在唯一解.

2.8 讨论方程

$$q''+q(1-q)\left(q-\frac{1}{2}\right)=0$$

是否存在解 $q(\xi)$ 满足：

$$q(\pm\infty)\in\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$$

问有几个这种解？

2.9 证明方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u-u^3$$

1° 存在唯一平衡解 $\varphi_1(x)$ 满足：$\varphi_1(-\infty)=-1$，$\varphi_1(+\infty)=1$；存在唯一平衡解 $\varphi_2(x)$ 满足：$\varphi_2(-\infty)=1$，$\varphi_2(+\infty)=-1$.

2° 存在波前解 $u=q(x-ct)$ 满足 $q(-\infty)=0$，$q(+\infty)=1$ 的充要条件是 $c\leqslant-2$.

3° 存在唯一波前解 $u=q(x-ct)$ 满足：$q(-\infty)=-1$，$q(+\infty)=1$. 你能否求出这个波前解？

4° 当 $-2<c<0$ 时存在振动的行波解 $u=q(x-ct)$ 满足：

$$q(-\infty)=0,\quad q(+\infty)=1$$

第三章　基于最大值原理的比较方法及其应用

3.1　最大值原理

讨论椭圆型与抛物型方程的一个重要方法是所谓比较方法，它的基础是最大值原理．本节引述椭圆型与抛物型方程的最大值原理(不给出证明)．

令

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\ (x\in\Omega) \tag{1.1}$$

$$Bu = a\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u(x\in\partial\Omega) \tag{1.2}$$

这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界光滑的开区域(例如边界 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$)，$a_{ij}$，$b_i\in C(\bar{\Omega})$，$-L$ 是 Ω 上的一致椭圆算子．a，b 是

(1) $a=0$，$b=1$；或 (2) $a=1$，$b(x)\geqslant 0$，$b(x)\in C(\partial\Omega)$．$n$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向．

引理 3.1.1 (强最大值原理)　设当 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ $x\in\Omega$ 时

$$c(x)\geqslant 0,\ \text{有界};\ Lu+cu\leqslant 0(\geqslant 0)$$

若 u 在 Ω 达到它在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值 M(最小值 m)．当 $c(x)\not\equiv 0$ 时，$M\geqslant 0$ ($m\leqslant 0$)，则 u 恒为常数．

推论 3.1.2　设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，$x\in\Omega$ 时 $Lu=0$，则 u 一定在 $\partial\Omega$ 取到其最大值和最小值．

若对 $\forall P\in\partial\Omega$，$\exists$ 球 S 在 P 点与 $\partial\Omega$ 相切，除 P 点外 $S\subset\Omega$，

称 $\partial\Omega$ 有内切球性质．当 $\partial\Omega\in C^{1+\alpha}$ 时一定有内切球性质．

引理 3.1.3（导数形式的最大值原理） 设当 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，$x\in\Omega$ 时

$$c(x)\geqslant 0，有界；\ Lu+c(x)u\leqslant 0\ \ (\geqslant 0).$$

u 在 $P\in\partial\Omega$ 达到最大值 M(最小值 m)．当 $c(x)\not\equiv 0$ 时 $M\geqslant 0(m\leqslant 0)$，又设 $\partial\Omega$ 有内切球性质．若 u 不恒为常数且 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_P$ 存在，其中 n 是 $\partial\Omega$ 的外法向，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P>0(<0)$$

由上述引理可以证明下面两个引理．

引理 3.1.4 设 $x\in\Omega$ 时 $c(x)\geqslant 0$，有界，又 $c(x)$ 与 $b(x)$ 不同时恒为零，当 Bu 中 $a=1$ 时又设 $\partial\Omega$ 有内切球性质．若 $u(x)$ 满足

$$\begin{aligned}&Lu+c(x)u\geqslant 0 &&(x\in\Omega)\\&Bu\geqslant 0&&(x\in\partial\Omega)\end{aligned}$$

u 与相应的椭圆边值问题的古典解有相同的光滑性，则

$$u(x)\geqslant 0\qquad(x\in\bar{\Omega})$$

又若 $u(x)\not\equiv 0$，则

$$u(x)>0\qquad(x\in\Omega)$$

引理 3.1.5 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，满足：

$$\begin{aligned}&Lu\geqslant f(x,u)&&(x\in\Omega)\\&Bu\geqslant 0&&(x\in\partial\Omega)\\&u\geqslant 0,u\not\equiv 0&&(x\in\bar{\Omega})\end{aligned}$$

若 $f\in C^1(\Omega\times\mathrm{R})$，$f(x,0)\geqslant 0(x\in\Omega)$，则

$$u(x)>0\qquad(x\in\Omega)$$

引理 3.1.4 与引理 3.1.5 的证明留做习题．

常考虑的最简单的 Lu 是 $-\Delta u(n>1)$，$-u''(n=1)$．现在令

$$L_tu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

$$\mathscr{L}u=\frac{\partial u}{\partial t}+L_t u \tag{1.4}$$

$$Q_T=\Omega\times(0,T],\ S_T=\partial\Omega\times(0,T]$$

$$Q_\infty=\Omega\times(0,+\infty),\ S_\infty=\partial\Omega\times(0,+\infty)$$

其中 $a_{ij}(x,t),b_i(x,t)\in C(\bar{Q}_T)$，$-\mathscr{L}$ 是 Q_T 上的抛物算子.

$$B_t u=a\frac{\partial u}{\partial n}+b(x,t)u,\ (x,t)\in S_T \tag{1.5}$$

其中 a,b:(1)$a=0$，$b=1$，或 (2)$a=1$，$b(x,t)\geqslant 0$.

引理 3.1.6 设 $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$($C^{2,1}$ 即对 x 属于 C^2，对 t 属于 C^1)，当 $(x,t)\in Q_T$ 时 $c(x,t)\geqslant 0$ 有界且

$$\mathscr{L}u+c(x,t)u\leqslant 0\ (\geqslant 0)$$

若在 $\bar{Q}_T$ 上 $u\leqslant M$ $(u\geqslant m)$ 且 $\exists(x_1,t_1)\in Q_T$ 使得 $u(x_1,t_1)=M(u(x_1,t_1)=m)$，当 $c(x,t)\not\equiv 0$ 时 $M\geqslant 0(m\leqslant 0)$，则在 Q_{t_1} 上

$$u(x,t)=M\quad(u(x,t)=m)$$

引理 3.1.7（导数形式最大值原理） 设 $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$，$(x,t)\in Q_T$ 时 $c(x,t)\geqslant 0$ 有界且

$$\mathscr{L}u+c(x,t)u\leqslant 0\ (\geqslant 0)$$

若 $\exists(\bar{x},\bar{t})\in\partial\Omega\times[0,T]$，使得 $u(\bar{x},\bar{t})=\max\limits_{\bar{Q}_T}u(x,t)=M(u(\bar{x},\bar{t})=\min\limits_{\bar{Q}_T}u(x,t)=m)$ 且在 Q_T 上 $u<M$ $(u>m)$；当 $c(x,t)\not\equiv 0$ 时 $M\geqslant 0$ $(m\leqslant 0)$. 又若 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}$ 存在，其中 n 为 $\partial\Omega$ 的外法向，$\partial\Omega$ 有内切球性质，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}>0\ (<0)$$

引理 3.1.8 设 $h(x,t)$ 在 Q_T 有界. $u(x,t)$ 满足

$$\mathscr{L}u+h(x,t)u\geqslant 0\quad((x,t)\in Q_T)$$

$$B_t u\geqslant 0((x,t)\in S_T)$$

$$u(x, 0) \geqslant 0 \quad (x \in \Omega)$$

$u(x, t)$ 与相应的抛物型方程的初边值问题的古典解有相同的光滑性，当 Bu 中 $\alpha = 1$ 时又设 $\partial\Omega$ 有内切球性质。则 $u(x, t) \geqslant 0$ $((x, t) \in Q_T)$。又若 $u(x, 0) \not\equiv 0$ $(x \in \Omega)$，则 $u(x,t) > 0$ $((x, t) \in Q_T)$。

证明　令 $u = ve^{\alpha t}$，取 α 充分大使得 $c = \alpha + h > 0$，则

$$\mathscr{L} u + hu = [\mathscr{L} v + (\alpha + h)v] e^{\alpha t} \geqslant 0$$

即

$$\mathscr{L} v + cv \geqslant 0((x, t) \in Q_T)$$

又

$$B_t v \geqslant 0((x, t) \in S_T)$$

$$v(x, 0) \geqslant 0 \qquad (x \in \Omega)$$

现可证 $\min\limits_{\partial_T} v(x, t) = m \geqslant 0$。若 $m < 0$，则由引理 3.1.6 与引理 3.1.7 得矛盾。因此 $v \geqslant 0$，从而 $u \geqslant 0$ $((x, t) \in Q_T)$。现设 $u(x, 0) \not\equiv 0$，即 $v(x, 0) \not\equiv 0$，若存在 $(x_1, t_1) \in Q_T$ 使 $u(x_1, t_1) = 0$，则 $v(x_1, t_1) = 0 = \min\limits_{\partial_T} v(x, t)$。由引理 3.1.6 得矛盾。因此 $v(x, t) > 0((x, t) \in Q_T)$ 即 $u(x, t) > 0$，证毕。

上述未证明的引理可参见 [PW]。

3.2　嵌入定理，线性问题解的存在唯一性及估计

比较方法的另一基础是嵌入定理及线性问题解的存在唯一性与估计。本节引述这方面的结论。

3.2.1　几个函数空间

记 $l = (l_1, \cdots, l_n)$，$|l| = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$，其中 l_i 为非负整数。广义导数

$$D^l u = \frac{\partial^{|l|} u}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}$$

$0 < \alpha < 1$. 指数为 α 的 Hölder 系数

$$H_\alpha(u) = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$C^\alpha(\bar{\Omega}) = \{u(x) \mid H_\alpha(u) < \infty\}$$

$C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的范数

$$|u|_\alpha = H_\alpha(u) + \max_{\bar{\Omega}} u(x)$$

k 为正整数

$$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u(x) \mid u \in C^k(\bar{\Omega}),\ H_\alpha(D^l u) < +\infty, |l| = k\}$$

$C^{k+\alpha}(\Omega)$ 中的范数

$$|u|_{k+\alpha} = \sum_{|l| \leq k} \max_{\bar{\Omega}} |D^l u(x)| + \sum_{|l| = k} H_\alpha(D^l u)$$

$p \geqslant 1$,

$$L_p(\Omega) = \{u(x) \mid u(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 可测}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty\}$$

其中的范数

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$W_p^k(\Omega) = \{u(x) \mid u \in L_p(\Omega),\ D^l u \in L_p(\Omega),\ |l| \leqslant k\}$$

$W_p^k(\Omega)$ 中的范数

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|l| \leqslant k} \left(\int_\Omega |D^l u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

上述空间均是 Banach 空间，并有以下结论：

1° 若 $k \geqslant k'$, $\alpha \geqslant \alpha'$, $k + \alpha > k' + \alpha'$, 则 $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集是 $C^{k'+\alpha'}(\bar{\Omega})$ 中的列紧集。

2° $W_p^k(\Omega)$ 中的有界集是 $W_p^{k-1}(\Omega)$ 中的列紧集。

$W_p^{2k,k}(Q_T)=\{u(x,t)\mid u\in L_p(Q_T)$ 形为 $D_t^rD_x^su$ 的广义导数均存在且属于 $L_p(Q_T)$，其中 $2r+|s|\leqslant 2k\}$

引入范数

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(2k)}=\sum_{0\leqslant 2r+|s|\leqslant 2k}\|D_t^rD_x^su\|_{p,Q_T}$$

其中

$$\|D_t^rD_x^su\|_{p,Q_T}=\left(\int_{Q_T}|D_t^rD_x^su|^p\,dxdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$C^{2k,k}(\overline{Q}_T)=\{u(x,t)\mid D_t^rD_x^su\in C(\overline{Q}_T),\ \text{其中 } 2r+|s|\leqslant 2k\}$$

引入范数

$$|u|_{Q_T}^{(2k)}=\sum_{0\leqslant 2r+|s|\leqslant 2k}\max_{Q_T}|D_t^rD_x^su|$$

$$C^{2k+\alpha,k+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)=\{u(x,t)\mid u\in C^{2k,k}(\overline{Q}_T),\ H_{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_t^rD_x^su)<\infty,\ 2r+|s|=2k\}$$

引入范数

$$|u|_{Q_T}^{(2k+\alpha)}=\sum_{0\leqslant 2r+|s|\leqslant 2k}\max_{Q_T}|D_t^rD_x^su|+\sum_{2r+|s|=2k}H_{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_t^rD_x^su)$$

其中

$$H_{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(u)=\sup\left\{\frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}}\ \middle|\ \begin{array}{l}x,y\in\Omega,\ t,s\in(0,T)\\(x,t)\neq(y,s)\end{array}\right\}$$

$$W_p^{2k,k}(Q_T),\ C^{2k,k}(\overline{Q}_T),\ C^{2k+\alpha,k+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$$

等空间也是 Banach 空间。

3.2.2 嵌入定理及线性椭圆型边值问题

引理 3.2.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑的开区域，$n<p<+\infty$，则

$$W_p^{k+1}(\Omega)\xrightarrow{\text{嵌入}}C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$$

其中 $\alpha=1-\frac{n}{p}$，即对 $\forall u\in W_p^{k+1}(\Omega)$，$\exists\bar{u}\in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$，使得在 Ω 上几乎处处有 $u=\bar{u}$ 且

$$|u|_{k+\alpha}\leqslant C(n,p,\Omega)\|u\|_{k+1,p} \tag{2.1}$$

常数 $C(n,p,\Omega)$ 与 u 无关。我们常把 (2.1) 写成

$$|u|_{k+\alpha}\leqslant C\|u\|_{k,p}$$

（参见 [Ad] 第五章）。

下面考虑边值问题

$$\begin{cases}Lu+c(x)u=f(x) & (x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n)\\ Bu=g(x) & (x\in\partial\Omega)\end{cases} \tag{2.2}$$

我们总是假定：

$$\begin{cases}1^\circ & L\text{ 由(1.1)给出，}-L\text{ 是 }\Omega\text{ 上的一致椭圆算子，}\\ & \partial\Omega\in C^{2+\alpha};\\ 2^\circ & a_{ij}(x),\ b_i(x),\ c(x)\in C^\alpha(\bar{\Omega})\quad(0<\alpha<1)\\ 3^\circ & B\text{ 由 (1.2) 给出，}b(x)\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega),\\ & b(x)\geqslant 0,\ g(x)\in C^{2+\alpha}(\partial\Omega).\end{cases} \tag{2.3}$$

$g(x)$ 可延拓到 Ω 内部成为 $\hat{g}(x)$ 使得 $\hat{g}(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 且

$$\hat{g}(x)=g(x)\quad(x\in\partial\Omega)$$

定理 3.2.2 (Agmon-Douglas-Nirenberg) 设 (2.3) 成立，$c(x)\geqslant 0$，当 $b(x)\equiv 0$ 时 $c(x)\not\equiv 0$，若 $f(x)\in C^\alpha(\bar{\Omega})$，则(2.2)存在唯一解 $u(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 并有 Schauder 估计：

$$|u|_{2+\alpha}\leqslant C_1(|f|_\alpha+|\hat{g}|_{2+\alpha})$$

若 $f(x)\in L_p(\Omega)(p>1)$，(2.3) 中的 $g(x)$ 只须可延拓成 $\hat{g}(x)\in W_p^2(\Omega)$，则 (2.2) 有唯一解 $u(x)\in W_p^2(\Omega)$ 并有 L_p 估计

$$\|u\|_{2,p}\leqslant C_2(\|f\|_p+\|\hat{g}\|_{2,p})$$

其中 C_1，C_2 和 u，f，g 无关。（参见 [ADN]。）

把 (2.2) 的唯一解记为 $u=Af$，由此定义了一个算子 A，当 $g\equiv 0$ 时是线性算子。

引理 3.2.3

1° $A: C^\alpha(\bar{\Omega}) \to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 上的紧算子.

2° $A: C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 上的紧算子.

3° $A: L_p(\Omega) \to W_p^2(\Omega)$ 是 $L_p(\Omega)$ 上的紧算子.

4° $A: C(\bar{\Omega}) \to W_p^2(\Omega)(p > n)$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 上的紧算子.

证明 (1) A映 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的有界集为 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集，从而是 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 和 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的列紧集. A映 $L_p(\Omega)$ 中的有界集为 $W_p^2(\Omega)$ 中的有界集，因而是 $L_p(\Omega)$ 中的列紧集. 对 $\forall p > n$, $C(\bar{\Omega}) \subset L_p(\Omega)$, $C(\bar{\Omega})$ 中的有界集为 $L_p(\Omega)$ 中的有界集，A映 $C(\bar{\Omega})$ 中的有界集为 $W_p^2(\Omega)$ 中的有界集，再由嵌入定理，它是 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的有界集因而是 $C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集.

(2) 现只须再证A的连续性. 令

$$u_i = Af_i(i = 1, 2), \quad v = u_2 - u_1$$

则

$$\begin{cases} Lv + c(x)v = f_2(x) - f_1(x) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

由此利用定理 3.2.2 及引理 3.2.1 易证A的连续性. 证毕.

3.2.3 线性抛物型方程的初边值问题

现在考虑线性抛物型方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + c(x, t)u = f(x, t) \quad ((x, t) \in Q_T) \\ u|_{S_T} = g(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.4}$$

或

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + c(x, t)u = f(x, t) \quad ((x, t) \in Q_T) \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + b(x, t)u\right]_{S_T} = g(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $\mathscr{L}$ 由 (1.4) 给出，n 为 $\partial\Omega$ 的外法向

我们可以在空间 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ (k 是正整数，$p > 1$) 中求解 (2.4) 和 (2.5)，并得到 L_p 估计，我们仅就 (2.4) 来叙述.

定理 3.2.4 设 $p>1$，$a_{ij}(x,t)$，$b_i(x,t)$ 是 Q_T 上的连续有界函数.若对 $\forall f\in L_p(Q_T)$，$\varphi(x)\in W_p^2(\Omega)$，在 S_T 上的函数 $g(x,t)$ 可延拓为 Q_T 上的函数 $\tilde{g}(x,t)\in W_p^{2,1}(Q_T)$ 且满足相容性条件

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega}=g(x,t)|_{t=0,x\in\partial\Omega}$$

则问题 (2.4) 有唯一解 $u\in W_p^{2,1}(Q_T)$ 且有估计

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(2)}\leqslant C(\|f\|_{p,Q_T}+\|\varphi\|_{p,\Omega}^{(2)}+\|\tilde{g}\|_{p,Q_T}^{(2)})$$

现在我们在 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中考虑问题 (2.4) 和 (2.5) 的唯一可解性.

定理 3.2.5 设 a_{ij}，b_i，$c\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$，$\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$. 若对 $\forall f\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$，$\varphi(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，$g$ 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 上的函数 $\tilde{g}$，满足相容性条件:

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega}=g(x,0)|_{\partial\Omega}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}b_i(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right.$$
$$\left.-c(x,0)\varphi+f(x,0)\right]_{\partial\Omega}=\frac{\partial g(x,0)}{\partial t}\bigg|_{\partial\Omega}$$

则 (2.4) 有唯一解

$$u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$$

并有估计

$$|u|_{\bar{Q}_T}^{(2+\alpha)}\leqslant C(|f|_{\bar{Q}_T}^{(\alpha)}+|\varphi|_{\bar{\Omega}}^{(2+\alpha)}+|\tilde{g}|_{\bar{Q}_T}^{(2+\alpha)})$$

其中 C 不依赖于 f，g 和 φ.

定理 3.2.6 设 a_{ij}，b_i，$c\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$，$\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$，$b(x,t)|_{S_T}\geqslant 0$，$b(x,t)$ 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中的函数. 若对任意 $f\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$，$\varphi\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，$g$ 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中的函数 $\tilde{g}$，又满足相容条件

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}+b(x,0)\varphi\right]_{\partial\Omega}=g(x,0)|_{\partial\Omega}$$

则 (2.5) 有唯一解

$$u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$$

并有估计

$$|u|_{\bar{Q}_T}^{(2+\alpha)}\leqslant C(|f|_{\bar{Q}_T}^{(\alpha)}+|\varphi|_{\bar{\Omega}}^{(2+\alpha)}+|g|_{\bar{S}_T}^{(2+\alpha)})$$

其中 C 不依赖于 f,φ,g.

定理 3.2.7 设 $a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$ 对 $\forall f\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\varphi\in C(\bar{\Omega})$, $g\in C(\bar{S}_T)$, 且满足

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega}=g(x,0)|_{\partial\Omega}$$

则 (2.4) 有唯一解.

3.3 椭圆型边值问题的比较方法

3.3.1 上、下解与比较方法

现在介绍讨论椭圆型边值问题的比较方法，它依赖于能否找到上、下解，一旦找到上、下解，不仅证明了边值问题解的存在性，而且还得到解的估计式. 比较法又称上、下解方法.

考虑半线性椭圆型方程的边值问题

$$Lu=f(x,u)\qquad(x\in\Omega)$$
$$Bu=g(x)\qquad(x\in\partial\Omega)$$

其中 L 与 B 分别由 (1.1) 和 (1.2) 给出，满足 (2.3).

定义 3.3.1 $\tilde{u}\in C^2(\bar{\Omega})$ 叫做 (3.1) 的上解，若

$$L\tilde{u}\geqslant f(x,\tilde{u})\ (x\in\Omega),\ B\tilde{u}\geqslant g(x)\ (x\in\partial\Omega)$$

$\underset{\sim}{u}\in C^2(\bar{\Omega})$ 叫做 (3.1) 的下解，若

$$L\underset{\sim}{u}\leqslant f(x,\underset{\sim}{u})\ (x\in\Omega),\ B\underset{\sim}{u}\leqslant g(x)\ (x\in\partial\Omega)$$

根据定义，(3.1)的解既是上解又是下解. 下面将利用(3.1)的上、下解构造出(3.1)的解.

定理 3.3.2 设 $\tilde{u},\underset{\sim}{u}$ 分别是 (3.1) 的上、下解，$\tilde{u}\geqslant\underset{\sim}{u}(x\in\Omega)$, $m=\min\limits_{\bar{\Omega}}\underset{\sim}{u}<M=\max\limits_{\bar{\Omega}}\tilde{u}$, 若存在常数 $K>0$, 对 $\forall(x,u),(y,v)\in\bar{\Omega}\times[m,M]$, 有

$$|f(x,u)-f(y,v)|\leqslant K[|x-y|^\alpha+|u-v|].$$

则 (3.1) 存在一个解 $u(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 且满足

$$\underline{u}(x)\leqslant u(x)\leqslant\tilde{u}(x)$$

证明　任意给定 $u\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$，$x\in\bar{\Omega}$ 时 $u(x)\in[m,M]$。线性问题

$$\begin{cases}(L+K)v=Ku+f(x,u)\\ Bv=g(x)\end{cases}$$

有唯一解 $v\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，由此定义一个非线性算子:

$$v=Tu$$

问题变成了证明 T 存在不动点。分以下几步:

(1) 证明算子 T 单调不减: 若 $\underline{u}(x)\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\tilde{u}(x)$，则 $\underline{u}(x)\leqslant z_1=Ty_1\leqslant z_2=Ty_2\leqslant\tilde{u}(x)$

令 $w=z_2-z_1$，则

$$\begin{cases}(L+K)w=f(x,y_2)-f(x,y_1)+K(y_2-y_1)\geqslant 0\\ Bw|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

由引理 3.1.4 知 $w\geqslant 0$，即 $Ty_1\leqslant Ty_2$。同样地，令 $v=z_1-\underline{u}$，则

$$\begin{cases}(L+K)v\geqslant f(x,y_1)-f(x,\underline{u})+K(y_1-\underline{u})\geqslant 0\\ Bv|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

于是 $v\geqslant 0$，即 $\underline{u}\leqslant z_1$。同理可证 $z_2\leqslant\tilde{u}$。

(2) 构造点点收敛的单调序列。

按如下方式构造迭代序列 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$:

$$u_1=T\tilde{u},\ u_2=Tu_1,\cdots,\ u_n=Tu_{n-1},\cdots$$

$$v_1=T\underline{u},\ v_2=Tv_1,\cdots,\ v_n=Tv_{n-1},\cdots$$

因为 $\underline{u}\leqslant\tilde{u}$，前面已经证明

$$\underline{u}\leqslant v_1=T\underline{u}\leqslant T\tilde{u}=u_1\leqslant\tilde{u}$$

由 T 的单调不减性归纳地证得

$$\underline{u}\leqslant v_n\leqslant u_n\leqslant\tilde{u}$$

因为 $\underline{u}\leqslant u_1\leqslant\tilde{u}$，所以

$$\underline{u}\leqslant Tu_1=u_2\leqslant T\tilde{u}=u_1\leqslant\underline{u}$$

于是由归纳法得

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

同理可证

$$v_n \leqslant v_{n+1}$$

因此

$$\underline{u} \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots u_2 \leqslant u_1 \leqslant \tilde{u}$$

因为 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是单调有界序列，所以它们逐点收敛，记

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u}, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \bar{v}$$

于是

$$\underline{u} \leqslant \bar{v} \leqslant \bar{u} \leqslant \tilde{u}$$

(3) 证明 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 均是 T 的不动点且属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$。

我们将利用一个事实：若 $w_n(x)$ 在 $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中有界，又

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x) \qquad (x \in \bar{\Omega}, \text{逐点收敛})$$

则对 $0 < \mu < \alpha$, $w(x) \in C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ 且在 $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ 中 $w_n(x)$ 收敛到 $w(x)$（习题 3.5）。因此，我们只须再证 $u_n(v_n)$ 在 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中有界。

由 L_p 估计得

$$\|u_n\|_{2,p} \leqslant M_1[\|f(x, u_{n-1})\|_p + K\|u_{n-1}\|_p + \|g\|_{2,p}] \leqslant M_2 \quad (p > n)$$

由嵌入定理得

$$|u_n|_\alpha \leqslant C_1\|u_n\|_{1,p} \leqslant C_1\|u_n\|_{2,p} \leqslant M_3$$

再由 Schauder 估计得

$$|u_n|_{2+\alpha} \leqslant C[|f(x, u_{n-1})|_\alpha + K|u_{n-1}|_\alpha + |g|_{2+\alpha}] \leqslant M$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \bar{u}$，所以 $\bar{u} \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$，$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \bar{u}|_{2+\mu} = 0$，其中 $0 < \mu < \alpha$。因此

$$\bar{u} = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_{n-1} = T(\lim_{n\to\infty} u_{n-1}) = T\bar{u}$$

因为 $T: C^\alpha(\bar{\Omega}) \to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，所以 $\bar{u} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$。类似可证 $\bar{v} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，$T\bar{v} = \bar{v}$。证毕。

注 1 若 $\min\limits_{\bar{\Omega}} \underline{u} = \max\limits_{\bar{\Omega}} \tilde{u}$，则 $\underline{u} = \tilde{u} =$ 常数，它显然就是一个解。

注 2 我们得到 (3.1) 的两个解 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$，但不能排除它们相同。

推论 3.3.3 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 是 (3.1) 在区域 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \tilde{u}$ 中的极大解和极小解，即若 w 是 (3.1) 的任意解，满足 $\underline{u} \leqslant w \leqslant \tilde{u}$，则 $\bar{v} \leqslant w \leqslant \bar{u}$。

证明 因为 w 是解，所以 $w = Tw$，由 $w \leqslant \tilde{u}$ 得 $w = Tw \leqslant T\tilde{u} = u_1$，于是对任意 n，$w \leqslant u_n$，令 $n \to \infty$ 得 $w \leqslant \bar{u}$。同理证 $\bar{v} \leqslant w$。

3.3.2 二阶线性椭圆算子的特征值问题

研究线性特征值问题特别是它的最小特征值及其相应的特征函数与本节的上、下解的构造有关，也与今后研究反应扩散方程的平衡解的存在性及其稳定性有关. 这里考虑二阶线性自伴椭圆算子的特征值问题：

$$\begin{cases} \tilde{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + q(x)u = \lambda u \quad (x \in \Omega) \\ \tilde{B}u = 0 \qquad (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是有界开区域，$\partial\Omega$ 是光滑的。

即

$$\tilde{B}u = 0$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.3}$$

或

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos\langle n, x_i\rangle + b(x)u\right]_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.4}$$

n 是 $\partial\Omega$ 的外法向。

定义 3.3.4 若 λ 使 (3.2) 有非零解，则称 λ 是 (3.2) 的特征值，相应的非零解称为对应于该特征值的特征函数。

我们假定：

1° $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$，$q(x) \in C(\bar{\Omega})$，

2° $a_{ij} = a_{ji}$，存在 $\alpha > 0$，使得对任意 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \quad (x\in \Omega),$$

3° $b(x)\in C(\partial\Omega)$.

(一) 简单性质.

令

$$F(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + q(x)uv\right] + \int_{\partial\Omega} b(x)uvds$$

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

利用散度定理

$$\int_\Omega u\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}dx = \int_{\partial\Omega} u\sum_{i=1}^{n} v_i\cos\langle n, x_i\rangle ds - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx$$

易得

1° $F(u, v) = F(v, u)$.

2° 若 $u\in C^2(\bar{\Omega})$, $v\in C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\langle \tilde{L}u, v\rangle = F(u, v) - \int_{\partial\Omega}\tilde{B}uvds \tag{3.5}$$

若又有 $v\in C^2(\bar{\Omega})$, $\tilde{B}u = 0$, $\tilde{B}v = 0$, 则

$$\langle \tilde{L}u, v\rangle = \langle u, \tilde{L}v\rangle = F(u, v) \tag{3.6}$$

3° 若令

$$F(u) = F(u, u)$$

则

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) = \sum_{k,s=1}^{n} c_k c_s F(\varphi_k, \varphi_s) \tag{3.7}$$

$$F(\varphi + \alpha\phi) = F(\varphi) + 2\alpha F(\varphi, \phi) + \alpha^2 F(\phi) \tag{3.8}$$

由此可证得

引理 3.3.5

1° (3.2) 的特征值全是实数，

2° (3.2) 的不同特征值 λ, λ^* 的特征函数 u 与 u^* 是正交的，即 $\langle u, u^*\rangle = 0$。

证明留给读者.

(二) 特征值的极值性质.

若 λ 是(3.2)的特征值，u 是相应的特征函数，将它归范化，即 $\|u\|_2 = 1$。由 (3.6) 得

$$F(u, u) = \langle \tilde{L}u, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda$$

即

$$\lambda = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + qu^2\right]dx + \int_{\partial\Omega} b(x)u^2 dS$$

引进泛函

$$F(\varphi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} + q\varphi^2\right]dx + \int_{\partial\Omega} b(x)\varphi^2 dS$$

其定义域

$D(F) = D_1 = \{\varphi(x)|\varphi \in C(\bar{\Omega})$, 且分块连续可微 $\varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$, 边条件为 (3.3) 时;

$D(F) = D_2 = \{\varphi(x)|\varphi \in C(\bar{\Omega})$, 且分块连续可微$\}$,边条件为 (3.4) 时,

并把属于 $D(F)$ 的函数称为泛函 F 的可取函数。若边条件是 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 则 $F(\varphi)$ 中 $\int_{\partial\Omega} b(x)\varphi^2 dS$ 项自然消失。我们将证明特征值是泛函的极小值.

定理 3.3.6 (特征值的极小原理) 在条件 $\langle\varphi,\varphi\rangle = 1$ 之下，使 $F(\varphi)$ 为最小的可取函数是 (3.2) 的特征函数 u_1, F 的最小值 $F(u_1) = \lambda_1$ 是相应的特征值. 在条件 $\langle\varphi, \varphi\rangle = 1$ 及正交条件 $\langle\varphi, u_i\rangle = 0$ $(i = 1,2,\cdots, k-1, k \geqslant 2)$ 之下，使 $F(\varphi)$ 为最小的函数是 (3.2) 的特征函数 u_k, 最小值 $F(u_k) = \lambda_k$ 是相应的特征值.

证明　可以证明上述极小问题的解存在且二阶连续可微，参见［CoH, 2］。我们以此为前提给出定理的证明。

对 ∀ 可取函数 η 及 ∀ 常数 ε，有

$$F\left(\frac{u_1+\varepsilon\eta}{\|u_1+\varepsilon\eta\|_2}\right)\geqslant\lambda_1,$$

$$F(u_1+\varepsilon\eta)\geqslant\lambda_1\langle u_1+\varepsilon\eta,\ u_1+\varepsilon\eta\rangle$$

由 (3.8) 得

$$2\varepsilon F(u_1,\eta)+\varepsilon^2F(\eta)\geqslant 2\lambda_1\varepsilon\langle u_1,\eta\rangle+\lambda_1\varepsilon^2\langle\eta,\eta\rangle$$

$$2\varepsilon\left\{F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle+\frac{\varepsilon}{2}\left[F(\eta)-\lambda_1\langle\eta,\eta\rangle\right]\right\}\geqslant 0$$

令 $\varepsilon>0$，约去 ε，再令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle\geqslant 0$$

令 $\varepsilon<0$，类似可得

$$F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle\leqslant 0$$

因此对 $\forall\eta\in D(F)$

$$F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle=0\qquad(3.9)$$

再由 (3.5) 得

$$F(u_1,\eta)=\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}+qu_1\eta\right]dx+\int_{\partial\Omega}bu_1\eta dS=\int_\Omega(Lu_1)\eta dx$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cos\langle n,x_i\rangle+bu_1\right]\eta dS$$

将它代入 (3.9) 得

$$\int_\Omega(\tilde{L}u_1-\lambda_1u_1)\eta dx+\int_{\partial\Omega}(Bu_1)\eta dS=0$$

由 η 的任意性可得

$$\tilde{L}u_1=\lambda_1u_1,\ \tilde{B}u_1=0$$

现考虑第二个极小问题。对 ∀ 可取函数 ζ 满足 $\langle\zeta,u_1\rangle=0$，如同导出 (3.9) 一样可得

$$F(u_2,\zeta)-\lambda_2\langle u_2,\zeta\rangle=0\qquad(3.10)$$

对 $\forall$ 可取函数 η，总可取一个数 t 使得 $\zeta=\eta+tu_1$ 满足 $\langle\zeta,u_1\rangle=0$，于是由 (3.10) 得

$$F(u_2,\eta)-\lambda_2\langle u_2,\eta\rangle+t\{F(u_2,u_1)-\lambda_2\langle u_2,u_1\rangle\}=0$$

因 $\langle u_2,u_1\rangle=0$，在 (3.9) 中令 $\eta=u_2$ 得 $F(u_1,u_2)=0$。因此

$$F(u_2,\eta)-\lambda_2\langle u_2,\eta\rangle=0$$

同前面一样由此可得

$$\tilde{L}u_2=\lambda_2 u_2,\quad \tilde{B}u_2=0$$

如此继续下去可证一般结论。证毕。

定理 3.3.6 指出:

$$\lambda_1=\min\{F(\varphi)|\varphi\in D(F),\ \|\varphi\|_2=1\}=F(u_1)$$

$$\lambda_n=\min\{F(\varphi)|\varphi\in D(F),\ \langle\varphi,u_k\rangle=0,\ (k=1,\cdots,n-1,\ \|\varphi\|_2=1\}$$

推论 3.3.7 按上述方法得到的特征值 λ_i 和特征函数 u_i 有

$$\begin{aligned}&F(u_i)=\lambda_i,\quad F(u_i,u_j)=0\\&\langle u_i,u_i\rangle=1,\ \langle u_i,u_j\rangle=0\end{aligned}\qquad (i\neq j)$$

$$F(u_n,\zeta)-\lambda_n\langle u_n,\zeta\rangle=0$$

其中 $\langle\zeta,u_i\rangle=0\ (i=1,\cdots,n-1)$。

推论 3.3.8 $\lambda_{n-1}\leqslant\lambda_n$，因此可按大小顺序排列为

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

现在任意给定 $n-1$ 个 $\bar{\Omega}$ 上分块连续函数 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$，此集合记为 $V(n-1)$。令

$$d(v_1,\cdots,v_{n-1})=\inf\{F(\varphi)|\varphi\in D(F),\ \|\varphi\|_2=1,\ \langle\varphi,v\rangle=0,\ v\in V(n-1)\}.$$

定理 3.3.9（特征值的极大-极小原理） 令函数 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 取遍所有的可取函数，则 λ_n 为 d 所能取的最大值，当 $\varphi=u_n$，$v_1=u_1,\cdots,v_{n-1}=u_{n-1}$ 时 d 达到这个最大值，即

$$\lambda_n=\sup_{V(n-1)}\inf\{F(\varphi)|\varphi\in D(F),\ \|\varphi\|_2=1,\ \langle\varphi,v\rangle=0,\ v\in V(n-1)\}=d\ (u_1,\cdots u_n)$$

证明　对于给定的 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$，先证存在可取函数 φ 使得 $\langle\varphi, \varphi\rangle = 1$，$\langle\varphi, v_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，并有 $F(\varphi) \leqslant \lambda_n$。

令　$\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i$，则

$$\langle\varphi, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, v_i\rangle$$

$$\langle\varphi, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

总可以取 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$\langle\varphi, v_i\rangle = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n-1),\ \langle\varphi, \varphi\rangle = 1.$$

又因为 $F(u_i, u_j) = 0 (i \neq j)$，$F(u_i, u_i) = F(u_i) = \lambda_i$，所以由 (3.7) 有

$$F(\varphi) - \lambda_n = F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) - \lambda_n$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j F(u_i, u_j) - \lambda_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (\lambda_i - \lambda_n) \leqslant 0$$

即 $F(\varphi) \leqslant \lambda_n$，由此得，$\forall$ 给定 $V(n-1)$，都有

$$d(v_1, \cdots, v_{n-1}) \leqslant \lambda_n$$

又

$$\lambda_n = d(u_1, \cdots, u_{n-1}) = F(u_n)$$

所以

$$\lambda_n = \sup_{V(n-1)} \inf \{F(\varphi) | \varphi \in D(F),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \langle\varphi, v\rangle = 0,\ v \in V(n-1)\}$$

证毕。

（三）特征值的变化。

利用特征值的极值性质容易讨论以下问题：

1° 不同类型边条件下特征值大小的比较.

2° 特征值对方程的系数及边条件的系数的依赖性.

3° 特征值对区域的依赖性.

设有三个特征值问题:

$$\begin{cases}\tilde{L}u = \lambda u\\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{L}u = \lambda u\\ \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos\langle n, x_i\rangle + b_1(x)u\right]_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{L}u = \lambda u\\ \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos\langle n, x_i\rangle + b_2(x)u\right]_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

它们的第 n 个特征值分别为 λ_n, $\mu_n^{(1)}$, $\mu_n^{(2)}$.

定理 3.3.10 设 $x\in\partial\Omega$ 时 $b_1(x)\leqslant b_2(x)$, 则

$$\mu_n^{(1)}\leqslant\mu_n^{(2)}\leqslant\lambda_n$$

证明 显然有

$$\begin{aligned}&\inf\{F_2(\varphi)\,|\,\varphi\in D(F_2),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \langle\varphi, v\rangle = 0,\\ &\quad v\in V(n-1)\}\\ &\leqslant\inf\{F_2(\varphi)\,|\,\varphi\in D(F_2),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0,\ \langle\varphi, v\rangle =\\ &\quad 0,\ v\in V(n-1)\}\end{aligned}$$

其中

$$F_2(\varphi) = \int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} + q\varphi^2\right]dx + \int_{\partial\Omega} b_2(x)\varphi^2 dS$$

再取上确界后立即得到 $\mu_n^{(2)}\leqslant\lambda_n$. 同理可证另一不等式, 证毕.

再考察两个特征值问题:

$$\begin{cases}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + q(x)u = \lambda u\\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}\tag{3.11}$$

$$\begin{cases}-\sum_{i,j=1}^{n}(\tilde{a}_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\tilde{q}(x)u=\lambda u\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

它们的第 n 个特征值分别记为 λ_n 和 $\tilde{\lambda}_n$。

定理 3.3.11 若 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j(\xi\in R^n,\ x\in\Omega)$，$q(x)\leqslant\tilde{q}(x)\ (x\in\Omega)$，则 $\lambda_n\leqslant\tilde{\lambda}_n(n=1,2,3,\cdots)$。若又有 $q(x)\not\equiv\tilde{q}(x)$，则 $\lambda_n<\tilde{\lambda}_n(n=1,2,\cdots)$。

定理前半部分的证明留作练习，现证定理的后半部分。

与 (3.11) 相应的泛函记为 $F(\varphi)$，与特征值 λ_n 相应的特征函数记为 $\varphi_n(x)$，令 $\tilde{q}(x)=q(x)+h(x)$，则 $h(x)\geqslant 0$，$h(x)\not\equiv 0$，考察

$$\begin{cases}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\tilde{q}(x)u=\lambda u\\ \widetilde{B}u=0\end{cases}$$

它的特征值为 $\hat{\lambda}_n$，相应的泛函为 $\hat{F}(\varphi)$，取

$$V(n-1)=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}\}$$

则由特征值的极大-极小原理与极小原理得

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_n&\geqslant\inf\{\hat{F}(\varphi)|\varphi\in D(\hat{F}),\ \|\varphi\|_2=1,\ \langle\varphi,v\rangle=0,\\&\qquad v\in V(n-1)\}\\&=\hat{F}(\phi)=F(\phi)+\int_\Omega h(x)\phi^2(x)dx>F(\phi)\geqslant\lambda_n\end{aligned}$$

因此

$$\tilde{\lambda}_n\geqslant\hat{\lambda}_n>\lambda_n$$

证毕。

注 (3.2) 的特征值还连续地依赖于 $a_{ij}(x)$，$q(x)$ 和 $b(x)$（参见 [CoH, 1, p. 321—322]）。

现在考察特征值对区域 Ω 的依赖性。设

$$\begin{cases}\tilde{L}u=\lambda u & (x\in\Omega)\\ \tilde{B}u=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

和
$$\begin{cases}\tilde{L}u=\lambda u & (x\in\Omega^*)\\ \tilde{B}u=0 & (x\in\partial\Omega^*)\end{cases}$$
的第 n 个特征值分别记为 $\lambda_n(\Omega)$ 和 $\lambda_n(\Omega^*)$.

定理 3.3.12 设 $\Omega\supset\Omega^*$，则 $\lambda_n(\Omega)\leqslant\lambda_n(\Omega^*)$.

证明 对 $u|_{\partial\Omega}=0$ 和 $u|_{\partial\Omega^*}=0$ 的情形给出证明. 记
$$F_\Omega(\varphi)=\int_\Omega[a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}+q\varphi^2]dx$$
设 $\{\varphi^*\}$ 是 $\bar{\Omega}^*$ 上的全体可取函数，则 $\{\varphi\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的部分可取函数，其中
$$\varphi=\begin{cases}\varphi^* & (x\in\bar{\Omega}^*)\\ 0 & (\bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}^*)\end{cases}$$
而且 $F_\Omega(\varphi)=F_{\Omega^*}(\varphi^*)$. 若 $\|\varphi^*\|_2=1$，则 $\|\varphi\|_2=1$. 若任取 Ω 上的 $v_1,\cdots,v_{n-1}$ 组成集合 $V(n-1)$，自然也可看成 Ω^* 上的集合. 反之，若它是 Ω^* 上的集合，补充定义 Ω^* 之外函数值为零，则也可看成 Ω 上的集合. 又记
$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_\Omega=\int_\Omega\phi_1\phi_2dx$$
则 $v\in V(n-1)$ 时
$$\langle\varphi,v\rangle_\Omega=\langle\varphi^*,v\rangle_{\Omega^*}\quad(\forall\varphi\in\{\varphi\})$$
因此，
$$\begin{aligned}&\inf\{F_\Omega(u)\,|\,u\in D(F_\Omega),\ \|u\|_2=1,\ \langle u,v\rangle_\Omega=0,\\&\qquad v\in V(n-1)\}\\&\leqslant\inf\{F_\Omega(\varphi)\,|\,\varphi\in\{\varphi\},\ \|\varphi\|_2=1,\ \langle\varphi,v\rangle_\Omega=0,\\&\qquad v\in V(n-1)\}\\&=\inf\{F_{\Omega^*}(\varphi^*)\,|\,\varphi^*\in\{\varphi^*\},\ \|\varphi^*\|_2=1,\ \langle\varphi^*,v\rangle_{\Omega^*}=0,\\&\qquad v\in V(n-1)\}\end{aligned}$$
两边对 $V(n-1)$ 取上确界得
$$\lambda_n(\Omega)\leqslant\lambda_n(\Omega^*)$$
证毕.

注 若 Ω^* 是 Ω 的真子区域时，有 $\lambda_n(\Omega)<\lambda_n(\Omega^*)$（不证明）.

下面进一步说明 λ_n 对 Ω 的连续性。

设变换 $y = x + \varepsilon f(x)$ 将区域 Ω 及其边界逐点对应地变换为区域 Ω^* 及其边界，其中 f 是 C^1 的，若 f 的每个分量和它的各个偏导数的绝对值均小于 1，则说区域 Ω^* 以准确度 ε 逼近于 Ω. 当 $\varepsilon \to 0$ 时，就说 Ω^* 连续地变形为 Ω. 现可叙述下面的定理（不证明）。

定理 3.3.13 区域 Ω 在上述意义下连续变形时，(3.2) 的第 n 个特征值也连续地改变.

证明可参见 [CoH, 1, p. 323—325]。

最后指出，特征值是无限增大的。

定理 3.3.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$

证明 只对 $b(x) \geqslant 0$ 时给出证明。

若

$$\lambda_n = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + q(x)u_n^2\right]dx + \int_{\partial\Omega} bu_n^2 dS$$

有上界。则

$$M \geqslant \lambda_n + c \geqslant \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + (q(x) + c)u_n^2\right]dx$$

$$\geqslant \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 dx + \beta \int_\Omega u_n^2 dx$$

其中常数 c 使得

$$\beta = \min_{\bar{\Omega}} (q(x) + c) > 0$$

由此得

$$\int_\Omega u_n^2 dx, \quad \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

一致有界，于是 u_n 存在子序列，不妨仍记为 u_n，使得

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|u_n - u_m\|_2 = 0$$

但

$$\|u_n - u_m\|_2 = \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle = 2 \ (n \neq m)$$

这便矛盾了．因此 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$。

（四）特征函数的完备性．

由泛函的极值问题确定了(3.2)的一串特征值：

$$\{\lambda_n\}:\ \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots \tag{3.12}$$

和相应的特征函数

$$\{u_n\}: \lambda_n = F(u_n),\ \|u_n\|_2 = 1$$

我们将证明(3.12)是(3.2)的全部特征值．

定理 3.3.15 对 $\forall f \in L_2(\Omega)$，令 $c_i = \langle f, u_i \rangle$，则

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\|_2 = 0$$

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

在证明之前先给出推论．

推论 3.3.16 (3.12)是(3.2)的全部特征值．

证明 由引理 3.3.5，(3.2)的不同特征值 λ 与 $\tilde{\lambda}$ 所对应的特征函数 u 与 $\tilde{u}$ 是正交的，即 $\langle u, \tilde{u} \rangle = 0$．若(3.2)还有特征值 λ^*，$\lambda^* \neq \lambda_n\ (n = 1, 2, \cdots)$，相应的特征函数为 u^*，则 $\langle u^*, u_i \rangle = c_i = 0$，于是

$$\|u^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 0$$

即 $u^* = 0$，这便矛盾了．证毕．

为了证明定理 3.3.15，先证二个引理．

引理 3.3.17 设 $f \in L_2(\Omega)$，$c_i = \langle f, u_i \rangle$，则

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

证明留给读者。

引理 3.3.18 设 f 是可取函数，则定理 3.3.15 的结论成立。

证明 令 $\rho_n = f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$，则

$$\langle \rho_n, u_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

由 λ_{n+1} 的极小性质得

$$\lambda_{n+1} \langle \rho_n, \rho_n \rangle \leqslant F(\rho_n)$$

即

$$\langle \rho_n, \rho_n \rangle = \|\rho_n\|_2^2 \leqslant \frac{F(\rho_n)}{\lambda_{n+1}}$$

因为

$$F(u_i, \rho_n) - \lambda_i \langle u_i, \rho_n \rangle = 0,$$
$$\langle u_i, \rho_n \rangle = 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

所以

$$F(u_i, \rho_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

于是

$$F(f) = F\left(\rho_n + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) = F(\rho_n) + 2F\left(\rho_n, \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) + F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right)$$
$$= F(\rho_n) + F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right)$$

由于

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) = F(c_1 u_1) + 2F\left(c_1 u_1, \sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right) + F\left(\sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right)$$

$$= c_1^2 F(u_1) + F\left(\sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i$$

故得

$$F(\rho_n) = F(f) - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i = F(f)$$

$$- \sum_{i=1}^{n_0} c_i^2 \lambda_i - \sum_{i=n_0+1}^{n} c_i^2 \lambda_i$$

$$\leqslant F(f) - \sum_{i=1}^{n_0} c_i^2 \lambda_i \leqslant M$$

n_0 为某固定的自然数，从此以后 λ_i 为正的．M 为某正的常数．因此 n 充分大后

$$\langle \rho_n, \rho_n \rangle = \|\rho_n\|_2^2 \leqslant \frac{M}{\lambda_{n+1}}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\rho_n\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i \right\|_2 = 0$。

又

$$\left\langle f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,\ f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\rangle$$

$$= \|f\|_2^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \text{ 、}$$

所以 $\|f\|_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$．证毕．

证明定理 3.3.15．

对 $\forall f \in L_2(\Omega)$，存在可取函数 g 使得

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon/3$$

其中 ε 是 $\forall$ 给定的正数．令 $\langle g, u_i \rangle = c_i^*$，则

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\|_2 \leqslant \| f - g \|_2 + \left\| g - \sum_{i=1}^{n} c_i^* u_i \right\|_2$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_i^*)u_i\right\|_2$$

由 $\langle f-g,u_i\rangle=c_i-c_i^*$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_i^*)u_i\right\|_2^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_i^*)^2$$

$$\leqslant\|f-g\|_2^2<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2$$

故可得

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right\|_2\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\left\|g-\sum_{i=1}^{n}c_i^*u_i\right\|_2$$

对此 g，$\exists N$，当 $n>N$ 时 $\left\|g-\sum_{i=1}^{n}c_i^*u_i\right\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$。因此，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right\|_2=0$。证毕。

（五）最小特征值及相应的特征函数。

我们最关心的是最小特征值(又称为第一特征值)及其相应的特征函数(第一特征函数)，它们的正性对于构造上、下解和将来讨论平衡解的稳定性都是十分重要的。

为了证明最小特征值对应的特征函数的正性，先引述 Krein-Rutman 定理，它给出算子具有正特征值和相应特征向量具有正性的条件。

设 E 是 Banach 空间，E 的子集 P 叫做锥，即它满足：

1° 若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$，

2° 若 $x\in P$，实数 $\lambda\geqslant 0$，则 $\lambda x\in P$，

3° 若 $x\in P$，$x\neq 0$，则 $-x\notin P$。

若 P 是 E 中的一个闭锥，满足 $\operatorname{int}P$ (P 的内域) $\neq\varnothing$，则称 P 是 E 中的实心锥体。

A 是一个线性算子，$A(P\setminus\{\theta\})\subset\operatorname{int}P$，则 A 叫做关于 P 是强正的。

定理 3.3.19 (Krein-Rutman) 设 P 是 E 中的一个实心锥体，A 是 E 上的紧线性算子，关于 P 是强正的，则

1° A 在 P 中恰有一个特征向量 v，$\|v\|=1$，

$$Av=\mu v,\ \mu>0,\ v\in \operatorname{int} P$$

2° μ 是简单的(即只对应一个线性无关的特征向量)并且 $\mu=\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值}\}$.

(参见 [Gu, p. 593, 定理 24]).

在应用中 E 常常是一个函数空间，A 是一个线性微分算子，P 是 E 中的非负函数.

例 定义

$$Nu=Lu+c(x)u$$

其中 L 由 (1.1) 给出，L 的系数及 $c(x)$ 满足 (2.3)，又 $c(x)\geqslant 0$ $(x\in\Omega)$. 取 $E=C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$，在 E 上按如下方式定义 $v=Au$：v 是

$$\begin{cases}Nv=u(x) & (x\in\Omega)\\ v|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.13}$$

的解. 由引理 3.2.3 $A:E\to E$ 是线性紧算子.

定义

$$P=\text{closure}\left\{u\,\middle|\,u\in E,u>0(x\in\Omega),u|_{\partial\Omega}=0\text{且}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}<0\right\}$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 处的外法向. 则 P 是 E 中的闭锥，且 $\operatorname{int}P\neq\varnothing$. 由强最大值原理知，当 $u\in P\backslash\{\theta\}$ 时，$Au\in\operatorname{int}P$，即 A 关于 P 是强正的. 由 Krein-Rutman 定理，在 P 中，A 有唯一特征向量 v，$\|v\|=1$：$Av=\mu v$ 满足

$$\mu>0\qquad(v\in\operatorname{int}P)$$

于是

$$N(Av)=\mu Nv$$

即

$$Nv=\frac{1}{\mu}v$$

这就证明了，特征值问题

$$\begin{cases}Lu+c(x)u=\lambda u\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.14}$$

有特征值 $\lambda=\frac{1}{\mu}>0$，相应的特征函数 $v(x)>0(x\in\Omega)$。

进一步证明(3.14)没有实特征值小于 $\frac{1}{\mu}$，若有实的 $\lambda^*<\frac{1}{\mu}$ 是(3.14)的特征值，相应特征函数为 $v^*(x)$，取 $s>\lambda^*$，$s>0$，则

$$\begin{cases}Lu+(c(x)+s-\lambda^*)u=\lambda u\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.15}$$

有特征值

$$\lambda=s-\lambda^*+\frac{1}{\mu}，对应特征函数\ u=v(x)$$

和特征值

$$\lambda=s，对应的特征函数为\ u=v^*(x)$$

但 $s-\lambda^*+\frac{1}{\mu}>s$，这与

$$\left(s-\lambda^*+\frac{1}{\mu}\right)^{-1}=\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda^{-1}\ 是(3.15)的特征值\}$$

相矛盾，证毕。

对边条件 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\right]_{\partial\Omega}=0$，$b(x)\geqslant 0$ 时有同样的结论。这就证明了：

定理 3.3.20 设有特征值问题

$$\begin{cases}Lu+c(x)u=\lambda u\\ u|_{\partial\Omega}=0\ 或\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\right]_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.16}$$

其中 L 由(1.1)给出，L 的系数，$c(x)$ 及 $b(x)$ 满足(2.3)，则(3.16)存在实的主特征值（实部最小的特征值）λ_1，它是简单的，其相应的特征函数 $\varphi_1(x)$ 在 Ω 内无零点。

证明　实际上前面已经证明了，不过这里不假设 $c(x)\geqslant 0$。但总可取正数 c_0 使得 $c(x)+c_0>0\ (x\in\Omega)$。由考虑

$$\begin{cases}Lu+(c(x)+c_0)u=(\lambda+c_0)u\\ u|_{\partial\Omega}=0 \text{ 或 } \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\right]_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

而得证。

推论 3.3.21　设 λ_1 是

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=\lambda u\\ u|_{\partial\Omega}=0 \text{ 或 } \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\right]_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的最小特征值，其中 $b(x)\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$，$b(x)\geqslant 0\ (x\in\partial\Omega)$，$q(x)\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$。则

1° λ_1 是简单的；

2° λ_1 对应有特征函数 $\varphi_1(x)$，满足

$$\varphi_1(x)>0\qquad(x\in\Omega)$$

注　当边条件是 $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\right]_{\partial\Omega}=0$ 时

$$\varphi_1(x)>0\qquad(x\in\bar{\Omega})$$

关于最小特征值的正性问题，我们有以下结论。

定理 3.3.22　设 $x\in\Omega$ 时 $q(x)\geqslant 0$，λ_1 是

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=\lambda u\\ \left[a\dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u\right]_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的最小特征值，其中 $a=0$，$b=1$ 或 $a=1$，$b(x)\geqslant 0(x\in\partial\Omega)$。若 $q(x)\not\equiv 0$ 或 $b(x)\not\equiv 0$，则 $\lambda_1>0$。若 $q(x)\equiv 0$，$b(x)\equiv 0$，则 $\lambda_1=0$。

证明留给读者。

3.3.3　应用——一个平衡解的分叉问题

现在利用上、下解方法讨论边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u+g(u,\lambda)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.17}$$

的正(负)解的存在唯一性与分叉问题,其中 $\lambda\geqslant 0$ 为参数。

对 $\forall$ 给定的 $\lambda\geqslant 0$, 我们假设:

(H.1) $g\in C^1$, $g(u,\lambda)=o(u)\quad(u\to 0)$,

(H$^+$.2) 存在正数 M^+, 当 $u>M^+$ 时 $\lambda u+g(u,\lambda)<0$,

(H$^+$.3) 当 $0<u\leqslant M^+$ 时 $\dfrac{g(u,\lambda)}{u}$ 对 u 严格单调下降,

(H$^-$.2) 存在负数 M^-, 当 $u<M^-$ 时 $\lambda u+g(u,\lambda)>0$,

(H$^-$.3) 当 $M^-\leqslant u<0$ 时 $\dfrac{g(u,\lambda)}{u}$ 对 u 严格单调上升。

设 λ_1 是

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的最小特征值,则 $\lambda_1>0$, 相应的正特征函数 $\varphi_1(x)>0\ (x\in\Omega)$。

引理 3.3.23 设 (H$^+$.2) ((H$^-$.2)) 成立, 若 $u(x)$ 是 (3.17) 的非负解(非正解), 则 $0\leqslant u(x)\leqslant M^+$ ($M^-\leqslant u(x)\leqslant 0$), $x\in\Omega$。

证明留给读者。

定理 3.3.24 设 (H.1), (H$^+$.2), ((H.1), (H$^-$.2)) 成立,若 $\lambda>\lambda_1$, 则 (3.17) 存在最大正解 $u^+(x)$ (最小负解 $u^-(x)$) 且

$$0<u^+(x)\leqslant M^+\ \ (M^-\leqslant u^-(x)<0)\quad (x\in\Omega)$$

证明 设 (H.1), (H$^+$.2) 成立, $\lambda>\lambda_1$, 令

$$\underline{u}=\delta\varphi_1(x),\qquad \tilde{u}=M^+$$

取 $\delta>0$ 充分小,使得 $\underline{u}\leqslant\tilde{u}$, 又取 $\delta>0$ 充分小使得

$$\begin{cases}-\Delta\underline{u}-\lambda\underline{u}-g(\underline{u},\lambda)=\delta\varphi_1(x)\left[(\lambda_1-\lambda)-\dfrac{g(\delta\varphi_1,\lambda)}{\delta\varphi_1(x)}\right]\\ \qquad\qquad<0\\ \underline{u}|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

于是 $\underline{u}$ 是下解。显然 $\tilde{u}$ 是上解。因此 (3.17) 存在解

$$u^+(x) = \lim_{n\to+\infty} T^n\hat{u},\quad \delta\varphi_1(x) \leqslant u^+(x) \leqslant M^+$$

其中 T 是单调方法中的迭代算子．

若 $u(x)$ 是 (3.17) 的任意解，则

$$0 \leqslant u(x) \leqslant \tilde{u}(x) = M^+$$

于是

$$u(x) = T^n u(x) \leqslant T^n \tilde{u}(x)$$

令 $n \to +\infty$ 得

$$u(x) \leqslant u^+(x)$$

即 $u^+(x)$ 是 (3.17) 的最大正解．另一结论类似可证．证毕．

定理 3.3.25 设 (H.1) (H^+2)，(H^+3) ((H.1)，(H^-2)，(H^-3)) 成立，若 $\lambda > \lambda_1$，则 (3.17) 存在唯一正解 $u^+(x)$ (唯一负解 $u^-(x)$) 且

$$0 < u^+(x) \leqslant M^+ \quad (M^- \leqslant u^-(x) < 0),\quad x \in \Omega$$

证明　设 (H.1)，($H.2^+$)，(H^+3) 成立，$\lambda > \lambda_1$． 若 $u(x)$ 是 (3.17) 的任意正解：$u(x) \geqslant 0$，$u(x) \not\equiv 0$，则

$$0 < u(x) \leqslant u^+(x)$$

现再证 $u(x) \equiv u^+(x)$，由散度定理得

$$0 = \int_\Omega (u\Delta u^+ - u^+\Delta u)dx$$

$$= \int_\Omega uu^+\left[\frac{g(u,\lambda)}{u} - \frac{g(u^+,\lambda)}{u^+}\right]dx$$

因被积函数连续，不变号，所以

$$u(x)u^+(x)\left[\frac{g(u(x),\lambda)}{u(x)} - \frac{g(u^+(x),\lambda)}{u^+(x)}\right] \equiv 0$$

因此

$$u(x) \equiv u^+(x)$$

证毕．

定理 3.3.26 设给定 $\lambda \leqslant \lambda_1$ 时

$$G(u) = \begin{cases} g(u,\lambda)/u, & u \neq 0 \\ g'(0,\lambda), & u = 0 \end{cases}$$

在 $u\in(-\infty,+\infty)$ 连续，非正，在任意子区间上 $g(u,\lambda)$ 不恒为零，则 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时 (3.17) 无非零解.

证明　设 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时 (3.17) 有非零解 u，则

$$\begin{cases}-\Delta v+q(x)v=\mu v\\ v|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

有特征值 $\mu=\lambda\leqslant\lambda_1$，所以它的最小特征值 $\mu_1\leqslant\lambda_1$，其中 $q(x)=-g(u(x),\lambda)/u(x)$　$(u(x)\neq 0)$，$q(x)=-g'(0,\lambda)$ $(u(x)=0)$。但 $q(x)\geqslant 0$，$q(x)\not\equiv 0$，故 $\mu_1>\lambda_1$，这便矛盾了．因此 (3.17) 无非零解．证毕．

类似可证

定理 3.3.27　设给定 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时

$$G(u)=\begin{cases}g(u,\lambda)/u, & u>0\\ g'(0,\lambda), & u=0\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 连续，非正，在 $[0,+\infty)$ 的 $\forall$ 子区间上 $g(u,\lambda)$ 不恒为零．$\lambda\leqslant\lambda_1$ 时若 $u(x)\geqslant 0$ 是 (3.17) 的解，则 $u(x)\equiv 0$.

例　考察含参数 $\lambda\geqslant 0$ 的边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u-au^k\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3.18}$$

其中 $a>0$ 为常数，$k\geqslant 2$ 为自然数.

利用定理 3.3.25—3.3.27，容易得到

定理 3.3.28

1° 设 $k\geqslant 3$ 为奇数．则 $\lambda>\lambda_1$ 时 (3.18) 存在唯一正解 $u_\lambda^+(x)$ 和唯一负解 $u_\lambda^-(x)$，当 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时 (3.18) 只有零解.

2° 设 $k\geqslant 2$ 为偶数，则 $\lambda>\lambda_1$ 时 (3.18) 存在唯一正解，无负解，当 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时无正解.

进一步考察 (3.18) 的唯一正解 $u_\lambda^+(x)$ 对参数 λ 的依赖性，我们可得

定理 3.3.29

1° 设 $\lambda>\mu>\lambda_1$，则 $u_\lambda^+(x)>u_\mu^+(x)$.

$2°$ 设 $\mu > \lambda_1$，则 $\lim\limits_{\lambda\to\mu} u_\lambda^+(x) = u_\mu^+(x)$。

$3°$ $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1+0} u_\lambda^+(x) = 0$。

$4°$ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} u_\lambda^+(x) = +\infty \quad (x\in\Omega)$。

这就证明了：当 λ 增加通过 λ_1 时，(3.18) 从零解分支出两个非零解：正解和负解，或一个非零解：正解。λ_1 是分支值（图 3-3.1）。

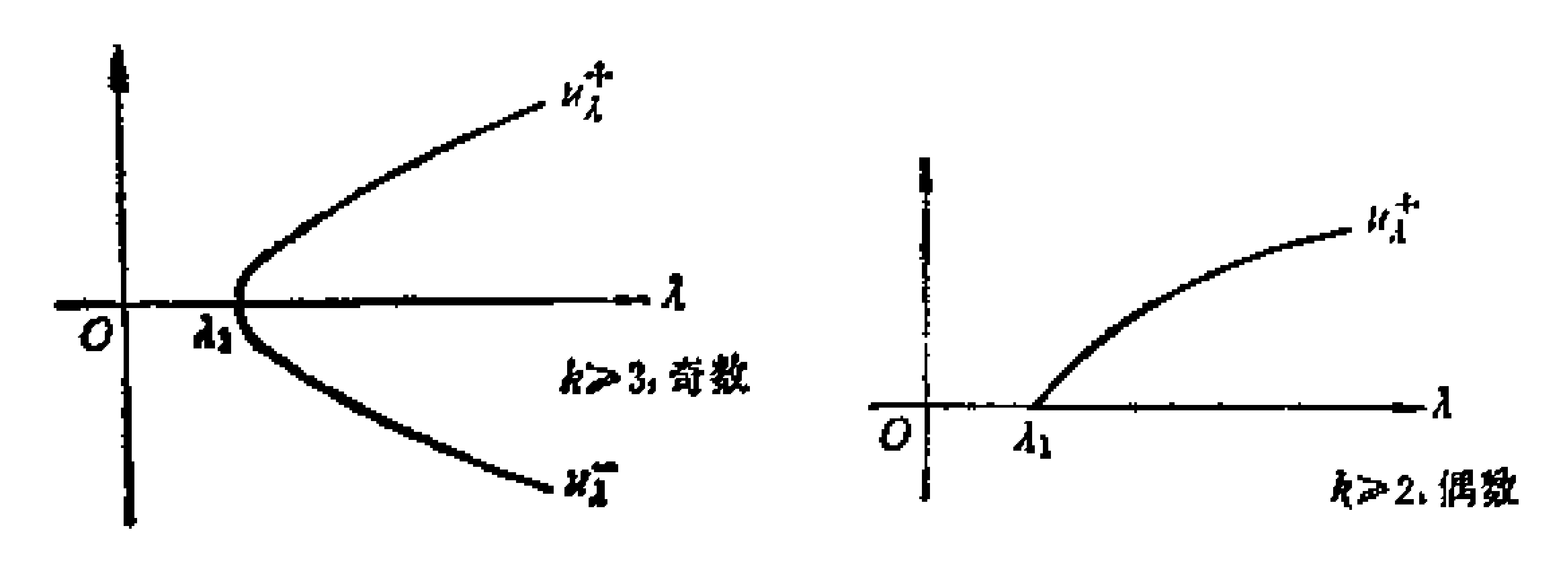


图 3-3.1

3.4 抛物型方程初边值问题的比较方法

3.4.1 抛物型方程初边值问题的比较原理

现在起开始考虑以下的初边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f(x, t, u) \quad ((x, t)\in Q_T) \\ B_t u = g(x, t) \quad ((x, t)\in S_T) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x\in\Omega) \end{cases} \tag{4.1}$$

我们总是假定：$a_{ij}, b_i \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$，$\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$，$\varphi(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，$b(x, t)$，$g(x, t)$ 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中的函数。

$$\varphi(x)|_{x\in\partial\Omega} = g(x, 0)|_{x\in\partial\Omega}$$

（当 $B_t u = u$ 时），

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} + b(x, 0)\varphi\right]_{x\in\partial\Omega} = g(x, 0)|_{x\in\partial\Omega}$$

$$\left(当\ B_t u = \frac{\partial u}{\partial n} + bu\ 时\right)$$

此外．对某常数 $M > m$，当 (x,t)，$(y,s) \in \bar{Q}_T$，$u \in [m, M]$ 时

$$|f(x, t, u) - f(y, s, u)| \leqslant K[|x - y|^{\alpha} + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}}] \quad (4.2)$$

其中K为常数．又

$$\frac{\partial f}{\partial u} \in C(\bar{Q}_T \times [m, M]) \quad (4.3)$$

先建立比较原理．

引理 3.4.1 设 $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$，满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + L_t u - f(x, t, u) \\ \geqslant \dfrac{\partial v}{\partial t} + L_t v - f(x, t, v) \quad ((x, t) \in Q_T) \\ B_t u \geqslant B_t v \quad ((x, t) \in S_T) \\ u(x, 0) \geqslant v(x, 0) \quad (x \in \Omega) \end{cases}$$

又设 $(x, t) \in \bar{Q}_T$ 时 $u, v \in [m, M]$，$\dfrac{\partial f}{\partial u} \in C(Q_T \times [m, M])$，

则

$$u(x, t) \geqslant v(x, t) \quad ((x, t) \in \bar{Q}_T)$$

若又有

$$u(x, 0) \gneqq v(x, 0) \quad (x \in \Omega)$$

则

$$u(x, t) > v(x, t) \quad ((x, t) \in Q_T)$$

证明　令

$$w = u - v$$

则

$$\frac{\partial w}{\partial t} + L_t w \geqslant f(x, t, u) - f(x, t, v)$$

于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+L_t w+h(x,t)w(x,t)\geqslant 0 & ((x,t)\in Q_T)\\ B_t w|_{\partial\Omega}\geqslant 0,\ w(x,0)\geqslant 0 & (x\in\Omega)\end{cases}$$

其中

$$h(x,t)=-\left(\int_0^1 \frac{\partial f(x,t,\xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=v+s(u-v)} ds\right)$$

因此由引理 3.18 得结论.

推论 3.4.2 设对任意的 m, M, $m<M$, (4,3)成立,则(4.1)至多有唯一解.

3.4.2 上、下解方法——初边值问题解的存在唯一性

类似于椭圆型边值问题. 我们也可引进(3.3)的上、下解.

定义 3.4.3 设 $\tilde{u}(x,t)$, $\underset{\sim}{u}(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ 分别叫做(4.1)的上、下解. 若

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}+L_t\tilde{u}\geqslant f(x,t,\tilde{u}), & ((x,t)\in Q_T)\\ B_t\tilde{u}\geqslant g(x,t) & ((x,t)\in S_T)\\ \tilde{u}(x,0)\geqslant \varphi(x) & (x\in\Omega)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial t}+L_t\underset{\sim}{u}\leqslant f(x,t,\underset{\sim}{u}) & ((x,t)\in Q_T)\\ B_t\underset{\sim}{u}\leqslant g(x,t) & ((x,t)\in S_T)\\ \underset{\sim}{u}(x,0)\leqslant \varphi(x) & (x\in\Omega).\end{cases}$$

由比较原理立即可得

推论 3.4.4 (上、下解的有序性) 设 $\dfrac{\partial f}{\partial u}\in C(\overline{Q}_T\times \mathbf{R}^1)$, 若 $\tilde{u}(x,t)$, $\underset{\sim}{u}(x,t)$ 分别是(4.1)的上、下解,则

$$\underset{\sim}{u}(x,t)\leqslant \tilde{u}(x,t)\quad ((x,t)\in \overline{Q}_T)$$

若又有 $\tilde{u}(x,0)\not\equiv \underset{\sim}{u}(x,0)$, 则

$$\underset{\sim}{u}(x,t)<\tilde{u}(x,t)\quad ((x,t)\in Q_T)$$

推论 3.4.5 设 $\dfrac{\partial f}{\partial u}\in C(\overline{Q}_T\times \mathbf{R}^1)$, $\tilde{u}$, $\underset{\sim}{u}$ 分别是(4.1)的上,下解,又 $u(x,t)$ 是(4.1)的解,则

$$\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant \tilde{u}(x,t).$$

利用上、下解，我们可以构造迭代序列使之收敛到(4.1)的解。

定理 3.4.6 设 $\tilde{u}(x,t)$, $\underline{u}(x,t)$ 分别是(4.1)的上，下解，$\underline{u}\leqslant\tilde{u}$, $m=\min\limits_{\bar{Q}_T}\underline{u}<M=\max\limits_{\bar{Q}_T}\tilde{u}$, 又设在 $\bar{Q}_T\times[m,M]$ 上 f 满足(4.2)与(4.3)，则(4.1)存在满足

$$\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)\quad((x,t)\in\bar{Q}_T)$$

的唯一解 $u(x,t)$。

证明 存在常数 $K>0$，使得

$$|f(x,t,u_2)-f(x,t,u_1)|\leqslant k|u_1-u_2|$$

其中

$$(x,t,u_i)\in\bar{Q}_T\times[m,M]\ (i=1,2)$$

设

$$B_t u=\frac{\partial u}{\partial n}+b(x,t)u$$

任意给定 $u\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ (或 $C(\bar{Q}_T)$), $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时 $u\in[m,M]$，则线性问题

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+L_t+K\right)v=Ku+f(x,t,u)\\ B_t v=g(x,t)\\ v(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

有唯一解 v，由此定义一个非线性算子 $v=Tu$。

现在构造迭代序列

$$u_1=T\tilde{u},\ u_2=Tu_1,\cdots,\ u_n=Tu_{n-1},\cdots$$

$$v_1=T\underline{u},\ v_2=Tv_1,\cdots,\ v_n=Tv_{n-1}\cdots$$

类似于定理 3.3.2 的证明，利用引理 3.4.4，容易证明：对任意自然数 n

$$\underline{u}\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant u_n\leqslant\cdots\cdots\leqslant u_2\leqslant u_1\leqslant\tilde{u}$$

因而存在点点收敛的极限

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=\bar{u}(x,t)$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x,t)=\bar{v}(x,t)$$

显然有

$$\underset{\sim}{u}(x,t)\leqslant\bar{v}(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)$$

下面证明 $\bar{u}$，$\bar{v}$ 都是 (4.1) 的解.

取基本空间 $E=C(\bar{Q}_T)$. 先证 $T\ D\to C(\bar{Q}_T)$ 是紧算子，其中 $D=\{u\mid u(x,t)\in E,\underset{\sim}{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t),(x,t)\in\bar{Q}_T\}$.

对 $\forall u_i\in E(i=1,2)$，令 $v_i=Tu_i$，$w=v_2-v_1$

则

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+L_t w+K\right)w=K(u_2-u_1)\\ \qquad+f(x,t,u_2)-f(x,t,u_1)\\ B_t w=0\\ w(x,0)=0\end{cases}$$

由 L_p 估计得，对 $\forall p\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\|w\|^{(2)}_{p,Q_T}&\leqslant C_1[\|u_2-u_1\|_p\\ &\qquad+\|f(x,t,u_2)-f(x,t,u_1)\|_{p,\bar{Q}_T}]\\ &\leqslant C_2|u_2-u_1|_{0,\bar{Q}_T}\end{aligned}$$

再由嵌入定理得

$$|w|_{0,\bar{Q}_T}\leqslant|w|_{\alpha,\bar{Q}_T}\leqslant|u_2-u_1|_{0,\bar{Q}_T}$$

即 T 连续.

同样可证：若 $|u|_{0,\bar{Q}_T}\leqslant M_1$，则

$$|Tu|_{\alpha,\bar{Q}_T}\leqslant M_2$$

M_2 是与 u 无关的常数. 即 T 映 $C(\bar{Q}_T)$ 中的有界集为 $C(\bar{Q}_T)$ 中的列紧集. 因此，$T:D\to C(\bar{Q}_T)$ 是紧算子.

因为 $|u_n(x,t)|\leqslant M$，所以 $u_n=Tu_{n-1}$ 在 $C(\bar{Q}_T)$ 中有收敛子列. 由于 u_n 的单调性，u_n 在 $C(\bar{Q}_T)$ 中收敛到 $\bar{u}(x,t)$. 因此，$\bar{u}=T\bar{u}$，$\bar{u}(x,t)$ 是 $W^{2,1}_p(Q_T)$ 中的解 ($\forall p>1$).

因为

$$W_p^{2,1}(Q_T)\subset W_p^1(Q_T)\subset C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$$

其中 p 充分大，因此 $\bar{u}(x,t)$ 是 (4.1) 的古典解。

同理可证 $\bar{v}(x,t)$ 也是 (4.1) 的古典解。

最后证明解的唯一性。已经知道 $\bar{v}\leqslant\bar{u}$。再由比较原理又可得 $\bar{u}\leqslant\bar{v}$。于是得 $\bar{u}=\bar{v}$。若 $u(x,t)$ 是 (4.1) 的任意一个解，满足 $\underline{u}\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}$，则 $u(x,t)$ 是一个上解于是。

$$v_1=T\underline{u},\ v_n=Tv_{n-1};\ u_1=Tu=u,\ u_n=Tu_{n-1}=u$$

由前面的证明得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$，即 $u=\bar{u}=\bar{v}$。证毕。

注 上述的唯一性只对给定的上、下解来说的，不排除可能存在解 u，使得 $u>\tilde{u}$ 或 $<\underline{u}$。但是，如果 $\dfrac{\partial f}{\partial u}\in C(\bar{Q}_T\times\mathbf{R})$，则 (4.1) 的解是唯一的。

定理 3.4.7 设对任意 $m<M$，f 满足 (4.2) 与 (4.3)。又 $\tilde{u}$，$\underline{u}$ 分别是 (4.1) 上、下解，则 (4.1) 存在唯一解 $u(x,t)$ 并满足

$$\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)\quad((x,t)\in Q_T)$$

证明留给读者。

作为定理 3.4.6 与定理 3.4.7 的推论，我们可得 (4.1) 的正解(即非负解)的存在唯一性。

推论 3.4.8 设 $(x,t)\in Q_T$ 时 $\varphi(x)\geqslant 0$，$f(x,t,0)\geqslant 0$；$(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$ 时，$g(x,t)\geqslant 0$。又设 $\tilde{u}(x,t)$ 是 (4.1) 的非负上解，$\rho=\max\limits_{\bar{Q}_T}\tilde{u}(x,t)$，在 $Q_T\times[0,\rho]$ 上 f 满足 (4.2) 与 (4.3)。则 (4.1) 存在满足 $0\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)$ 的唯一正解 $u(x,t)$。

证明 只须注意 $\underline{u}=0$ 是下解。

推论 3.4.9 在上述推论的条件下，若又有任何 $\rho<+\infty$，在 $\bar{Q}_T\times[0,\rho]$ 上 f 满足 (4.2) 与 (4.3)，则 (4.1) 有唯一正解的充要条件是 (4.1) 存在非负上解。

下面给出几个如何构造上，下解的例子。方程中出现的非线性项，边条件中出现的函数以及初值函数等的光滑性均满足定理

3.4.6 的要求。

例 1 设 $u=0$ 时 $f(u)=0$；$u\in(0,1)$ 时 $f(u)>0$；$u=1$ 时 $f(u)=0$；$u>1$ 时 $f(u)<0$。则对任意 $\varphi(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\not\equiv 0$ $(x\in\Omega)$，初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(u)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}\tag{4.4}$$

存在唯一正解 $u(x,t)$ 并满足

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=1$$

证明 对任意 $z_0>0$，易证常微分方程初值问题

$$\frac{dz}{dt}=f(z),\quad z(0)=z_0$$

存在唯一解 $z=z(t,z_0)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t,z_0)=1$。

令

$$M_1=\max_{\bar\Omega}\varphi(x)$$

则

$$M_1>0,\quad \tilde u=z(t,M_1)$$

是 (4.4) 的上解，又 $u=0$ 是下解．于是 (4.4) 存在唯一正解 $u(x,t)$ 并满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant z(t,M_1)$$

由比较原理与极值原理知

$$u(x,t)>0\quad(x\in\bar\Omega,t>0)$$

取 $\delta>0$．则 $u(x,\delta)>0(x\in\bar\Omega)$。令

$$m=\min_{\bar\Omega}u(x,\delta),\quad M=\max_{\bar\Omega}u(x,\delta)$$

则 $m>0$，$M>0$。令 $w(x,t)=u(x,t+\delta)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-\Delta w=f(w)\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\\ w(x,0)=u(x,\delta)\end{cases}$$

由比较原理

$$z(t,m)\leqslant w(x,t)=u(x,t+\delta)$$
$$\leqslant z(t,M)\quad(t\geqslant 0)$$

又 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t,m)=\lim\limits_{t\to+\infty}z(t;M)=1$

所以

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t+\delta)=1$$

即

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=1$$

例 2 设 $\underline{u}(x,t)$ 是 (4.1) 的下解，$m=\min\limits_{\bar{Q}_T}u(x,t)$. 又设对任意的 M, $M>m$, f 满足 (4.2) 与 (4.3). 并且在 $\bar{Q}_T\times(m,+\infty)$ 上 f 有上界 $\widetilde{M}$, 则 (4.1) 存在唯一解 $u(x,t)$ 满足

$$u(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t),\ (x,t)\in\bar{Q}_T$$

证明 在 $\bar{Q}_T$ 上线性问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+L_tu=\widetilde{M}\\ B_tu=g(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

存在解 $u=\tilde{u}(x,t)$，它就是 (4.1) 的上解. 因此，(4.1) 存在唯一解 $u(x,t)$ 满足 $u(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t)$.

例 3 设 $a>0$, $k>1$ 为常数 $\varphi(x)\geqslant 0$,$\not\equiv 0(x\in\Omega)$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=\lambda u-au^k\quad((x,t)\in\Omega\times(0,+\infty))\\ Bu=0\quad((x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty))\\ u(x,0)=\varphi(x)\quad(x\in\Omega)\end{cases}\tag{4.5}$$

存在唯一正解 $u(x,t)$ 并且它是有界的。又设 λ_1 是

$$-\Delta u=\lambda u(x\in\Omega),\quad Bu|_{\partial\Omega}=0$$

的最小特征值。则 $\lambda<\lambda_1$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0\ (\text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{ 一致})$$

证明　显然 $\underline{u}=0$ 是下解。可取 M 充分大使 $\tilde{u}=M$ 是上解。因此，(4.5) 存在唯一正解 $u(x,t)$ 并满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant M\ (x\in\bar{\Omega},\ t\geqslant 0)$$

现设 λ_1 相应的特征函数为 $\varphi_1(x)$，当 $Bu=\dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u$ 时，$\varphi_1(x)>0\ (x\in\bar{\Omega})$。令 $\tilde{u}=p(t)\varphi_1(x)$，其中 $p(t)>0$ 待定，使得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}-\Delta\tilde{u}&=p'(t)\varphi_1(x)+p(t)\lambda_1\varphi_1(x)\\&\geqslant\lambda p(t)\varphi_1(x)\geqslant\lambda\tilde{u}-a\tilde{u}^k\\\tilde{u}(x,0)&=P(0)\varphi_1(x)\\&\geqslant p(0)\min_{\bar{\Omega}}\varphi_1(x)\\&\geqslant\varphi(x)\quad(x\in\Omega)\end{aligned}$$

取 $p(t)$ 满足

$$\begin{cases}p'(t)+(\lambda_1-\lambda)p(t)=0\\p(0)=p_0\end{cases}$$

其中 p_0 满足:

$$p_0>0,\ p_0\min_{\bar{\Omega}}\varphi_1(x)\geqslant\varphi(x)$$

即取

$$p(t)=p_0e^{(\lambda-\lambda_1)t}$$

于是 $\tilde{u}(x,t)$ 是 (4.5) 的上解。

$$\begin{aligned}0\leqslant u(x,t)&\leqslant\tilde{u}(x,t)\\&=p_0e^{(\lambda-\lambda_1)t}\varphi_1(x)\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda<\lambda_1$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0\qquad(\text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{ 一致})$$

若 $Bu=u$，$\lambda<\lambda_1$，取 $\Omega_1\supset\bar{\Omega}$，使

$$-\Delta u=\lambda u,\ u|_{\partial\Omega_1}=0$$

的最小特征值 λ_1' 满足 $\lambda<\lambda_1'<\lambda_1$，其相应的特征函数记为 $\phi_1(x)$，则 $\phi_1(x)>0(x\in\bar{\Omega})$。同前面一样可证

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)$$
$$=p_0e^{(\lambda-\lambda')t}\phi_1(x)$$

因此，同样有

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0\qquad(\text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{ 一致})$$

注 1 若对任意 $T>0$，均可得到 (4.1) 的唯一解 $u(x,t)$ 那么它的定义域就是 $\bar{\Omega}\times[0,+\infty)$，称它为整体解。

注 2 条件 (4.3) 中 $\dfrac{\partial f}{\partial u}\in C(\bar{Q}_T\times[m,M])$ 可减弱为：存在常数 $K>0$，对任意 $(x,t)\in\bar{Q}_T$，u_1，$u_2\in[m,M]$ 有

$$|f(x,t,u_2)-f(x,t,u_1)|\leqslant K|u_2-u_1|$$

这点从各定理的证明中均可看出。

3.4.3 爆炸现象

(4.1) 不一定有整体解 $u(x,t)$，甚至可能解在有限时间内爆炸 (blow up)。研究反应扩散方程的爆炸现象是有实际意义的。

定义 3.4.10 若存在 $T_1(0<T_1<\infty)$，(4.1) 的解 $u(x,t)$ 在 $\bar{\Omega}\times[0,T_1)$ 上存在，且有

$$\lim_{T\to T_1-0}\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T}|u(x,t)|=\infty$$

$$(\text{或 }\lim_{t\to T_1-0}\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x,t)|=\infty)$$

则称 (4.1) 的解 $u(x,t)$ 在有限时间内爆炸。

定理 3.4.11 设 (4.3) 有下解 $\underline{u}(x,t)$ $((x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,+\infty))$。对任意 $T>0$，$\bar{\rho}>\rho_T$，f 在 $Q_T\times[\rho_T,\bar{\rho}]$ 上满足条件 (4.2) 与 (4.3)，其中 $\rho_T=\min\limits_{\bar{Q}_T}\underline{u}(x,t)$。则 (4.1) 或存在整体解，或有 $T_1>0$，在 $[0,T_1)$ 上存在解 $u(x,t)$，且

$$\lim_{T\to T_1-0}\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T}u(x,t)=\infty$$

证明　任意给定 $T>0$，任取 $N>y(x,t)$ $((x,t)\in\bar{Q}_T)$。定义一个函数

$$\tilde{f}(x,t,u)=\begin{cases}f(x,t,u), & u\leqslant N\\ f(x,t,N), & u>N\end{cases}$$

并考察辅助问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+L_t u=\tilde{f}(x,t,u)\\ Bu=g(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}\tag{4.6}$$

由前面的例 2 知，(4.6) 存在唯一解 $u^*(x,t)\geqslant y(x,t)((x,t)\in\bar{Q}_T)$

对于给定的 T，只有以下两种情形之一：

(1) 存在一个 N，当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时 $u^*(x,t)\leqslant N$，则 $u^*(x,t)$ 就是 (4.1) 的解。

(2) 对一切 $N>y(x,t)((x,t)\in\bar{Q}_T)$，存在 $(x_N,\tilde{T}_N)\in\bar{Q}_T$ 使得 $u(x_N,\tilde{T}_N)>N$。

$\max\limits_{\bar{Q}_\tau}u^*(x,t)$ 是 $\tau\in[0,T]$ 的连续函数，因 $\lim\limits_{t\to0}u^*(x,t)=u_0(x)$（关于 $x\in\Omega$ 一致），于是 $\tau>0$ 充分小时 $\max\limits_{\bar{Q}_\tau}u^*(x,t)<N$（$N$ 充分大），又 $\max\limits_{\bar{Q}_T}u^*(x,t)>N$，故存在

$$\max_{\bar{Q}_{T_N}}u^*(x,t)=N$$

因此 $u^*(x,t)$ 是 (4.1) 在 $\bar{Q}_{T_N}$ 上的唯一解。

显然 T_N 是 N 的单调上升序列，$T_N\leqslant T$，故存在极限 $\lim\limits_{N\to\infty}T_N=T_1$，$T_1\leqslant T$。于是 (4.1) 在 $\bar{\Omega}\times[0,T_1)$ 上存在解 $u(x,t)$。而且

$$\lim_{\tilde{T}\to T_1-0}\max_{\bar{Q}_{\tilde{T}}}u(x,t)=\infty$$

若对每个 $T>0$，都出现第一种情形，则 (4.1) 有整体解。若对某个 T 出现第二种情形。则得结论的第二种情形。证毕。

如果把 (4.1) 有下解改为有上解或改为对任意 $T>0$ 和任意的 $m<M$，f 满足条件 (4.2) 与 (4.3)，你能得到什么结论？

给定问题 (4.1) 怎样判定它的解一定在有限时间内爆炸呢？即能否给出一些 (4.1) 的解在有限时间内爆炸的充分条件。另外，虽然给出确切的爆炸的时刻 T_1 是困难的，但能否给出 T_1 的估计呢？下面就来讨论这些问题。

从定理 3.1.11 的证明中可以看到。若 (4.1) 的下解 $\underline{u}(x,t)$ 本身就有

$$\lim_{T\to T^*}\max_{\bar{Q}_T}\underline{u}(x,t)=+\infty$$

则 (4.1) 的解 $u(x,t)$ 也一定在有限时间内爆炸，而且可以用 T^* 作为爆炸时刻 T_1 的估计值。

利用这种方法考虑下面的例子。

例

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=c(e^{au}-b) & (x\in\Omega,\ t>0)\\ Bu\equiv\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}+u=0 & (x\in\partial\Omega,\ t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (x\in\Omega)\end{cases}\tag{4.7}$$

其中 a,b,c,β 均为正的常数且 $b\leqslant 1$。

记 λ_1 是

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u\\ Bu|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的最小特征值。相应的特征函数为 $\varphi_1(x)$，$\varphi_1(x)>0(x\in\Omega)$。

设

$$ca\geqslant\lambda_1,\ \text{又对某}\ \delta>0,\ \varphi(x)\geqslant\delta\varphi_1(x)\ (x\in\Omega),$$

则存在 $T_1<+\infty$。使得 (4.1) 有唯一非负解 $u(x,t)$ 定义在 $\bar{\Omega}\times[0,T_1)$ 上并满足

$$T_1\leqslant\frac{1}{\gamma},\ u(x,t)\geqslant\delta(1-\gamma t)^{-1}\varphi_1(x)$$

$$\lim_{T\to T_1-0}\max_{\bar{D}_T} u(x,t)=+\infty$$

其中

$$\gamma=\frac{1}{2}c\delta a^2\min_{D}\varphi_1(x)$$

证明　只要寻求一个下解 $\underset{\sim}{u}(x,t)=p(t)\varphi_1(x)$，其中 $p(t)>0$。为此必须要求

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)p(t)\varphi_1(x)\\&=(p'(t)+\lambda_1 p(t))\varphi_1(x)\\&\leqslant c(e^{ap(t)\varphi_1(x)}-b)\\&p(0)\leqslant\delta,\ p(t)>0\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}c(e^{ap\varphi_1}-b)&\geqslant c(e^{ap\varphi_1}-1)\\&\geqslant cap\varphi_1+\frac{1}{2}ca^2p^2\varphi_1^2\\&\geqslant\left[cap+\frac{1}{2}ca^2p^2\min_{\bar{D}}\varphi_1(x)\right]\varphi_1\end{aligned}$$

所以只须取 $p(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&p'(t)+(\lambda_1-ca)p\\&\quad\leqslant\frac{1}{2}ca^2p^2\min_{D}\varphi_1(x)\\&p(0)\leqslant\delta,\ p(t)>0\end{aligned}$$

又因 $\lambda_1-ca\leqslant 0$，所以只须取 p 满足

$$p'=\frac{1}{2}ca^2p^2\min_{\bar{D}}\varphi_1(x)$$

$$p(0)=\delta$$

解得

$$p(t)=\frac{\delta}{1-\gamma t}\quad\left(t\in\left[0,\frac{1}{\gamma}\right)\right)$$

由此得到 (4.7) 的一个下解 $\underset{\sim}{u}(x,t)=p(t)\varphi_1(x)$。证毕。

注 我们还可用其它方法讨论爆炸问题。例如"凸性方法"。利用凸性方法我们可以讨论:

(1) 初边值问题解的不存在性。

(2) 若初边值问题的解在有限时间内爆炸,解的最大存在区间是 $[0, T_1)$,估计 T_1。

为了突出凸性方法的思想,只考虑以下简单问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & ((x, t) \in Q_T) \\ u = 0 & ((x, t) \in S_T) \\ u|_{t=0} = u_0(x) & (x \in \Omega) \end{cases} \tag{4.8}$$

假设

1° $u_0(x) \geq 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$.

2° $u_t|_{t=0} = f(u_0(x)) + \Delta u_0(x) > 0 \quad (x \in \Omega)$.

3° $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $f(u) \geq 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$.

4° $\exists$ 正整数 $l \geq 3$,使

$$uf'(u) - (l-1)f(u) \geq 0 \quad (\forall u \geq 0)$$

又设 (4.8) 有解 $u(x, t) \in C^{3,2}(Q_T) \cap C^{2,1}(\bar{Q}_T)$(实际上可以证明)。

所谓凸性方法的主要思想在于数学分析的以下事实:

引理 3.4.12 若 $J(t) \in C^2[0, T) \cap C[0, T]$, $J(0) > 0$, $J'(0) < 0$, $J''(t) \leq 0$ $(\forall t \in [0, T))$, $T \geq -\dfrac{J(0)}{J'(0)}$. 则 $\exists T_0$, $0 < T_0 \leq -\dfrac{J(0)}{J'(0)}$, 使得 $J(T_0) = 0$

证明留给读者。

现设 (4.8) 的解 $u(x, t)$ 存在,显然它非负。引进

$$I(t) = \int_\Omega u^l(x, t)dx \, (l \geq 3)$$

$$J(t) = I(t)^{-\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

则

$$I(0) > 0$$

$$I'(0) = l\int_{\Omega} u_0^{l-1}[f(u_0) + \Delta u_0]dx > 0$$

于是

$$J(0) > 0,\ J'(0) < 0$$

又

$$J''(t) = -\alpha I^{-\alpha-2}[II'' - (\alpha+1)I'^2]$$

若能证明 $J''(t) \leqslant 0$, ($t \in [0, T)$), 当

$$T > -\frac{J(0)}{J'(0)} = \frac{I(0)}{\alpha I'(0)}$$

时由引理 3.4.12 便得矛盾。

下面我们证明

定理 3.4.13 设条件 1°—4° 成立,则

1) 若 $T > T^* = \dfrac{l}{l-2}\dfrac{I(0)}{I'(0)}$. 则问题 (4.8) 无古典解。

2) 若 (4.8) 的解在 T_1 时刻爆炸. 则 $T_1 < T^*$.

证明 设 (4.8) 存在解 $u(x, t)$($t \in [0, T]$), 对 $I(t)$ 求导并利用散度定理及方程得

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_{\Omega} lu^{l-1}u_t dx \\ &= -l(l-1)\int_{\Omega} u^{l-2}|\nabla u|^2 dx \\ &\quad + l\int_{\Omega} u^{l-1}f(u)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I''(t) &= l(l-1)\int_{\Omega} u^{l-2}u_t^2 dx \\ &\quad + l\int_{\Omega} u^{l-1}u_{tt}dx \\ &= 2l(l-1)\int_{\Omega} u^{l-2}u_t^2 dx \\ &\quad - l(l-1)\int_{\Omega} u^{l-2}u_t[\Delta u + f(u)]dx \\ &\quad + l\int_{\Omega} u^{l-1}[\Delta u + f(u)]_t dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2\,dx \\
&\quad - l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t f(u)dx \\
&\quad + l\int_\Omega u^{l-1}f'(u)u_t dx \\
&\quad - l(l-1)\int_{\partial\Omega} u^{l-2}u_t\frac{\partial u}{\partial n}\,dx \\
&\quad + l(l-1)(l-2)\int_\Omega u^{l-3}u_t|\nabla u|^2\,dx \\
&\quad + l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}\sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_i t}\,dx \\
&\quad + l\int_{\partial\Omega} u^{l-1}\frac{\partial u_t}{\partial n}\,dx \\
&\quad - l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}\sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_i t}\,dx \\
&= 2l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2\,dx \\
&\quad + l\int_\Omega u^{l-2}u_t[uf'(u) \\
&\quad - (l-1)f(u)]dx + l(l-1)(l-2) \\
&\qquad \int_\Omega u^{l-3}u_t\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\,dx
\end{aligned}
$$

令 $v=u_t$。则 v 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + f'(u)v \\
v|_{\partial\Omega} = 0 \\
v|_{t=0} = f(u_0(x)) + \Delta u_0(x) > 0
\end{cases}
$$

由此易知 $v=u_t\geqslant 0$，于是由假设条件得

$$
I''(t)\geqslant 2l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2\,dx
$$

再由 Schwarz 公式，

$$
\begin{aligned}
[I'(t)]^2 &= l^2\left(\int_\Omega u^{l-1} u_t \, dx\right)^2 \\
&= l^2\left(\int_\Omega u^{\frac{l-2}{2}+\frac{l}{2}} u_t \, dx\right)^2 \\
&\leqslant l^2 \int_\Omega u^l dx \cdot \int_\Omega u^{l-2} u_t^2 \, dx \\
&\leqslant \frac{l}{2(l-1)} I(t) I''(t)
\end{aligned}
$$

即

$$
I(t)I''(t) \geqslant \frac{2(l-1)}{l}[I'(t)]^2
$$

故取 $\alpha = \frac{l-2}{l}$，则

$$
J''(t) = -\alpha I^{-\alpha-2}[II'' - (\alpha+1)I'^2] \leqslant 0
$$

当

$$
T > T^* = \frac{l}{l-2}\frac{I(0)}{I'(0)} = -\frac{J(0)}{J'(0)}
$$

时，由引理 3.4.12，$\exists T_0$，$0 < T_0 \leqslant T^*$，$J(T_0) = 0$ 即

$$
\left(\int_\Omega u^l(x, T_0) dx\right)^{-\alpha} = 0
$$

这便矛盾了．由此立即得定理的结论．证毕．

3.5 抛物型方程初值问题的比较方法

最后，我们考虑初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) & ((x, \in) \in Q_T) \quad \text{(a)} \\
u(x, 0) = \varphi(x) & (x \in R) \quad \text{(b)}
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

其中

$$
Q_T = (-\infty, +\infty) \times (0, T]
$$

T 为有限或 $+\infty$．我们在

$$
\hat{C}(\bar{Q}_T) = \{u(x, t) \mid u \in C(\bar{Q}_T) \text{ 且有界}\}
$$

中求解初值问题(5.1)，它的解记为 $u_\varphi(x,t)$.

3.5.1 初值问题的比较原理

由初值问题的强极值原理可导出初值问题的比较原理，它是讨论初值问题的基本依据.

引理 3.5.1 (强极值原理) 设 $b(x,t)$, $c(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 有界，$V\in \mathring{C}(\bar{Q}_T)$ 且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-b(x,t)\dfrac{\partial V}{\partial x}-c(x,t)V\geqslant 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ((x,t)\in Q_T) \\ V(x,0)\geqslant 0 \qquad (x\in \mathbf{R}^1)\end{cases}$$

则 $V\geqslant 0((x,t)\in\bar{Q}_T)$，又当 $V(x,0)\not\equiv 0$ 时 $V(x,t)>0((x,t)\in Q_T)$.

引理 3.5.2 (比 较 原 理) 设 $f\in C^1[m,M]$，$(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时 $m\leqslant u$, $v\leqslant M$, u, $v\in\mathring{C}(\bar{Q}_T)$，又 $b(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 有界，

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-f(u)\geqslant\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$-b(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}-f(v)\quad ((x,t)\in Q_T)$$

$$u(x,0)\geqslant v(x,0)\qquad (-\infty<x<+\infty)$$

则 $u(x,t)\geqslant v(x,t)$ $((x,t)\in\bar{Q}_T)$. 若又有 $u(x,0)\not\equiv v(x,0)$，则 $u(x,t)>v(x,t)$ $((x,t)\in Q_T)$.

证明 利用强极值原理.

3.5.2 上、下解与初值问题解的存在唯一性

初值问题的解是否存在唯一，这取决于对初值问题的解是否有先验估计.

定理 3.5.3 设 $f(u)\in C^1(\mathbf{R}^1)$, $\varphi(x)\in\mathring{C}(R^1)$. 又设若初值问题(5.1)有解 $u(x,t)$ 必有

$$|u(\cdot,t)|_0\leqslant K(t)\quad (t>0)$$

其中 $K(t)$ 是某正函数，则初值问题(2.2)存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$ 满足

$$|u_\varphi(x, t)| \leqslant K(t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^1 \times (0, +\infty)).$$

利用上、下解可得解的先验估计。

定义 3.5.4 设 $\tilde{u}(x, t)$ $(\underset{\sim}{u}(x, t))$ 满足：

1° $\tilde{u}(\underset{\sim}{u}) \in \mathring{C}(\bar{Q}_T)$，$\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial t}\right)$，$\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial^2 \underset{\sim}{u}}{\partial x^2}\right) \in C(Q_T)$，

2° $L\tilde{u} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \geqslant f(\tilde{u})$ $(L\underset{\sim}{u} \leqslant f(\underset{\sim}{u}))$ $((x, t) \in Q_T)$。

则称 $\tilde{u}(\underset{\sim}{u})$ 是方程(5.1)-(a)的上解(下解)。若又满足

3° $\tilde{u}(x, 0) \geqslant \varphi(x)$ $(\underset{\sim}{u}(x, 0) \leqslant \varphi(x))$，

则称 $\tilde{u}(\underset{\sim}{u})$ 是初值问题(5.1)的上解(下解)。

由比较原理可得初值问题上、下解的有序性。

推论 3.5.5 设 $\tilde{u}(x, t)$，$\underset{\sim}{u}(x, t)$ 分别是(5.1)的上、下解，则 $\tilde{u}(x, t) \geqslant \underset{\sim}{u}(x, t)$ $(x \in \mathbf{R}^1, t \geqslant 0)$。又当 $\tilde{u}(x, 0) \not\equiv \underset{\sim}{u}(x, 0)$ 时 $\tilde{u}(x, t) > \underset{\sim}{u}(x, t)$ $(x \in \mathbf{R}^1, t > 0)$。

定理 3.5.6 设 $\varphi(x) \in \mathring{C}(\mathbf{R}^1)$，(5.1)存在上解 $\tilde{u}(x, t)$ 和下解 $\underset{\sim}{u}(x, t)$，$f \in C^1(\mathbf{R}^1)$，则(5.1)存在唯一解 $u(x, t)$ 并满足

$$\underset{\sim}{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \tilde{u}(x, t)$$

证明留给读者。

推论 3.5.7 设 $\varphi(x) \in \mathring{C}(\mathbf{R}^1)$，(5.1)存在上解 $\tilde{u}$ 和下解 $\underset{\sim}{u}$。令 $m = \inf\limits_{\bar{Q}_T} \underset{\sim}{u}(x, t)$，$M = \sup\limits_{\bar{Q}_T} \tilde{u}(x, t)$，又设 $f \in C^1[m, M]$，则(5.1)存在满足：

$$\underset{\sim}{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \tilde{u}(x, t)$$

的唯一解。

证明 作辅助问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^*(u)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

其中 $f^*(u) \in C^1(\mathbf{R}^1)$，使得 $f^*(u) = f(u)$ $(u \in [m, M])$，由此立

即可得结论。

3.6 评　注

求解抛物型方程的初边值问题，初值问题以及椭圆型方程边值问题的单调方法是一种迭代法，它把求解非线性问题转化为求解线性问题。先得到近似解序列，然后证明它单调有界，从而极限存在，再证极限函数是解。

利用单调方法可以讨论：抛物型方程定解问题的解（包括整体解）的存在唯一性；椭圆型方程边值问题解的存在性与分叉；平衡解的稳定性（第四章）；解的 blow up 问题等。参见 [Sa, 1]，[Pao, 1, 2, 3]。

应用单调方法的关键是求出上、下解，其常见的方法是：求常数上解或下解（见 § 3.3.3）；利用线性问题的解（§ 3.4.2 的例 2 及 [Lin]）；利用第一特征函数（§ 3.3.3 及 § 3.4.2 的例 3）；利用相应的常微分方程（§ 3.4.2 的例 1）；在 [Ra] 中，利用变分方法求下解。

单调方法有以下推广：

1° 把单调方法推广到方程组（见第五章）。

2° 考虑反应项 f 依赖于未知函数的导数项（[FTa]）。

3° 讨论反应扩散方程周期解的存在性，例如：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + L_t u + c(x, t)u = f(x, t, u, \operatorname{grad} u) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x \in \Omega,\ t \in \mathbf{R}^1) \\ Bu = 0 \qquad\qquad\quad (x \in \partial\Omega,\ t \in \mathbf{R}^1) \end{cases}$$

[Ama, 1]。

4° 讨论退化的非线性反应扩散问题，如

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + f(u) \\ u(\pm l, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

[ACP]。

我们把本章前面引进的上、下解称为古典的上、下解或正规的上、下解。对于这种上、下解，从微分不等式的要求，它需要一定的光滑性，这对于研究问题是不方便的。自然希望放松光滑性的限制，又使得比较定理仍然成立。为此，不少作者推广了上下解的概念：

1° 引进不正规的上、下解。

Fife 在 [Fif] 中分别定义

$$\bar{u}(x)=\min_{\Omega}\left[\tilde{u}_1(x),\cdots,\tilde{u}_N(x)\right]$$

$$\underline{u}(x)=\max_{\Omega}\left[\underline{u}_1(x),\cdots,\underline{u}_N(x)\right]$$

为(不正规的)上、下解，其中 $\tilde{u}_i$, $\underline{u}_i$ 分别为正规的上、下解。在[FTa]中把取 max 与 min 的集合换成 $x\in\Omega$ 的∀邻域 δ_x，即把

$$\bar{u}(x)=\min_{\delta_x}\left[\tilde{u}_1(x),\cdots,\tilde{u}_N(x)\right]$$

$$\underline{u}(x)=\max_{\delta_x}\left[\underline{u}_1(x),\cdots,\underline{u}_N(x)\right]$$

分别称为不正规的上、下解。

2° 引进弱上、下解。

为了研究弱解，引进弱上、下解。[ACP] 中给出弱上、下解的定义。

若 $u:[0,+\infty)\to L_1(\Omega)(\Omega=(-l,l))$ 满足：

(1) $u\in C([0,+\infty);\ L_1(\Omega)\cap L_\infty(Q_T))$ $(\forall T>0)$。

(2) $\forall\varphi\in C^2(Q_T)$, $\varphi\geqslant 0$, $\varphi|_{\pm l}=0$ 及 $T>0$ 有

$$\int_\Omega u(x,T)\varphi(x,t)dx-\iint_{Q_T}(u\varphi_t+u^m\varphi_{xx})\,dxdt$$

$$\geqslant(\leqslant)\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx+\iint_{Q_T}f(u)\varphi(x,t)dxdt$$

则称 u 是

$$\begin{cases}u_t=(u^m)_{xx}+f(u)\\u(\pm l,t)=0\\u(x,0)=u_0(x)\end{cases}$$

的弱上(下)解.

上、下解概念的推广,给许多问题的研究带来方便。对于某些具体的反应扩散方程的研究,单调方法常常是有效的。

习 题 三

3.1 设 $u(x)$, $v(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = (1 - u^2 - v^2)u \\ -\Delta v = (1 - u^2 - v^2)v \quad (x \in \Omega) \\ u = v = 0 \qquad (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{3-1}$$

的解

1° 求 $\Delta(u^2 + v^2)$;

2° 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leqslant 1 \quad (x \in \Omega)$.

3.2 设边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha uv, \ \Delta v = \beta uv \quad (x \in \Omega) \\ u = \varphi(x), \ v = \psi(x) \quad (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

有非负解 $(u(x), v(x))$ 和 $(\bar{u}(x), \bar{v}(x))$, 其中 α, β 为正的常数,证明

1° $\beta u - \alpha v = \beta\bar{u} - \alpha\bar{v}$

2° $u(x) = \bar{u}(x)$, $v(x) = \bar{v}(x)$

3.3 证明引理 3.1.4 与引理 3.1.5

3.4 设 $f \in C^1$, u, $v \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta v \geqslant f(v), \ -\Delta u \leqslant f(u) \quad (x \in \Omega) \\ v \geqslant u, \ v \not\equiv u \qquad (x \in \bar{\Omega}) \end{cases}$$

证明:

1° $v(x) > u(x) \quad (x \in \Omega)$.

2° 若又有 $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$, 则 $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} < \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$.

3.5 若 $w_n(x)$ 在 $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ 中有界,又

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(x) = w(x) \quad (x \in \Omega, \text{逐点收敛})$$

证明: 对 $\forall\alpha$, $0<\alpha<\mu$, $w(x) \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 且在 $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $w_n(x)$ 收敛到 $w(x)$.

3.6 设 $f \in C^1$, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \quad (x \in \Omega) \\ u = 0 \qquad (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

的解集合为 S，令 $E = C(\bar{\Omega})$，证明：

1° 集合 $\{u | u \in S, \|u\|_E \leqslant R\}$ 在 E 中是列紧的。

2° 若 $u_n \in S$，在 E 中 $u_n \to u$ $(n \to +\infty)$，则 $u \in S$。

3.7 设 $\exists v \in C^2(\bar{\Omega})$，$v \geqslant 0$，$v \not\equiv 0 (x \in \Omega)$，又满足

$$-\Delta v + q(x)v \underset{(\not\equiv)}{\geqslant} 0 \quad (x \in \Omega), \ v = 0 \ (x \in \partial\Omega)$$

其中 $q(x) \in C(\bar{\Omega})$。求证

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3-2}$$

的最小特征值 $\lambda_1 > 0$。

3.8 设 $u(x)$，$v(x)$ 是边值问题(3-1)的解，$u \not\equiv 0$，$v \not\equiv 0$。证明：

1° 若 u 或 v 在 Ω 不变号，则 $\exists \alpha \in \mathbf{R}^1$，$v = \alpha u$。

2° 设 $q(x) \equiv 0$ 时(3-2)的全体特征值为

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$$

若 $\lambda_2 > 1$，则 u 和 v 在 Ω 无零点。

3.9 设 $u(x, t)$，$v(x, t) \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, +\infty))$ 且非负、有界又满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v \leqslant 0$$

$$(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$$

其中 a、b 为常数，

$$\int_{\partial\Omega} [u(x, t) + v(x, t)] d\sigma \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

证明：

1° $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{\Omega} [u(x, t) + v(x, t)] \varphi(x) dx = 0$

其中 $\varphi(x)$ 是(3-2)当 $q(x) \equiv 0$ 时的第一特征函数。

2° $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{\Omega} [u(x, t) + v(x, t)] dx = 0$

3.10 设 $q_n(x)$，$q(x) \in C(\bar{\Omega})$，$n \to +\infty$ 时在 Ω 上 $q_n(x)$ 一致收敛到 $q(x)$。又设(3-2)的最小特征值为 0，对 $\forall n$，$\lambda = 0$ 是

$$\begin{cases} -\Delta u + q_n(x)u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3-3}$$

的特征值。证明：$\exists N$，当 $n > N$ 时 $\lambda = 0$ 是(3.3)的最小特征值。

3.11 设 $u \geqslant 0$ 时 $f(u)$ 是局部 Lipschitz 的，$f(0) \geqslant 0$，考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3-4}$$

证明：

1° $\exists \lambda^* > 0$，当 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 时(3-4)存在一个非负解。

2° 若又设 $f(0) > 0$，$u > 0$ 时 $f(u)$ 是增函数，d 为 Ω 的直径，则 $\lambda^* \geqslant \frac{8n}{d^2} \sup\limits_{t>0} \frac{t}{f(t)}$，其中 n 是空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数。

3° 若 $f(u)$ 有界，证明对 $\forall \lambda > 0$，(3-4)存在一个非负解。

3.12 考察边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x, u) & (x \in \Omega) \\ Bu = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{3-5}$$

其中 $c(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$，$c(x) \geqslant 0$。设

(H_1) $\exists$ 常数 $M > 0$，当 $x \in \Omega$，$u > M$ 时 $f(x, u) < 0$；

(H_2) $f(x, u)$ 在 $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ 是局部 Lipschitz 的；

(H_3) 对 $\forall x \in \bar{\Omega}$，$f(x, 0) > 0$。

证明：

1° 若 $u(x)$ 是(3-5)的非负解，又设 f 满足(H_1)，则 $0 \leqslant u \leqslant M (x \in \bar{\Omega})$；

2° 若 (H_1)—(H_3) 成立，则(3-5)$\exists$最大正解 $\bar{u}(x)$，$0 < \bar{u}(x) \leqslant M$ $(x \in \Omega)$。

3.13 设常数 $M > 0$，$\frac{\partial f}{\partial u} \in C(\Omega \times [0, M])$；$\forall x \in \Omega$，$f(x, M) \leqslant 0$（取等号时 $c(x)$ 与 $b(x)$ 不同时恒为零）。若 $u(x)$ 是(3-5)的正解，试证

$$|u|_0 = \max_{\Omega} |u(x)| \leqslant M$$

3.14 设 $u(x)$ 是(3-5)的解，又 f 满足：$x \in \Omega$，$u < 0$ 时 $f(x, u) \geqslant 0$（取等号时要求 $c(x)$ 与 $b(x)$ 不同时恒为零）。证明 $u(x) \geqslant 0$。

3.15 证明定理 3.3.28.

3.16 证明定理 3.3.29.

（提示利用 3.15 题及解的先验估计.）

3.17 设 $g(u) \in C(\mathbf{R}^1)$ 且

$$g(u)/u \leqslant 1 \qquad (u \in \mathbf{R}^1)$$

又 $f(x) \in C[0, \pi]$，满足 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$。证明

$$\begin{cases} -u''(x) = g(u) + f(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

存在解。

3.18
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的最小特征值为 λ_1。若 $f \in C^1(\mathbf{R}^1)$

$$\limsup_{|t|\to+\infty} f(t)t^{-1} < \lambda_1$$

证明初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & (x \in \Omega, t > 0) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega, t > 0) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (x \in \Omega) \end{cases}$$

存在唯一解且有界。

第四章　平衡解的稳定性问题

本章利用比较法讨论半线性抛物型方程的初边值问题以及初值问题平衡解的稳定性。本章是比较法的一个应用.

4.1　平衡解与稳定性概念

设有半线性抛物型方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu=f(x,t,u) & ((x,t)\in Q_\infty) & \text{(a)} \\ Bu=g(x) & ((x,t)\in S_\infty) & \text{(b)} \\ u(x,0)=\varphi(x) & (x\in\Omega) & \text{(c)} \end{cases} \tag{1.1}$$

它的特殊情形是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu=f(x,u) & ((x,t)\in Q_\infty) & \text{(a)} \\ Bu=g(x) & ((x,t)\in S_\infty) & \text{(b)} \\ u(x,0)=\varphi(x) & (x\in\Omega) & \text{(c)} \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $Q_\infty=\Omega\times(0,+\infty)$, $S_\infty=\partial\Omega\times(0,+\infty)$, L, B, g 满足第三章的 (2.3), $\varphi(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 满足相容性条件.

若 $u=w(x)$ 满足 (1.1)-(a), (b), 则称 $w(x)$ 是 (1.1)-(a), (b) 的平衡解，也称为是 (1.1) 的平衡解. $w(x)$ 是 (1.2)-(a), (b) 的平衡解的充要条件是: $w(x)$ 是椭圆型边值问题

$$Lu=f(x,u)(x\in\Omega),\ Bu=g(x)\quad(x\in\partial\Omega)$$

的解. (1.1) 与 (1.2) 的解均记为 $u_\varphi(x,t)$.

$\forall$ 固定 $t\geqslant 0$, $u(\cdot,t)$ 作为 $C(\bar{\Omega})$ 空间中的元素,定义范数

$$\|u(\cdot,t)\|_C=\max_{\bar{\Omega}}|u(x,t)|$$

作为 $W_2^1(\Omega)=H^1(\Omega)$ 中的元素,定义范数

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,2}=\left(\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

我们还考察初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u) \quad ((x,t)\in \mathbf{R}\times(0,+\infty)) & \text{(a)}\\ u(x,t)=\varphi(x) \quad (x\in \mathbf{R}) & \text{(b)}\end{cases}\tag{1.3}$$

若 $u=w(x)$ 满足

$$w''+f(w)=0$$

则称 $w(x)$ 为 (1.3)-(a) 的平衡解，也称为 (1.3) 的平衡解。

$\forall$ 固定 $t\geqslant 0$，$u(\cdot,t)$ 作为 $\overset{\circ}{C}(-\infty,+\infty)$中的元素，定义范数

$$\|u(\cdot,t)\|_{\overset{\circ}{C}}=\sup_{x\in\mathbf{R}}|u(x,t)|$$

下面我们给出稳定性的定义。

以 $u_\varphi(x,t)$ 表示 (1.1) 或 (1.3) 的解，$w(x)$ 是平衡解，$\|\cdot\|$ 代表某种模。

定义 4.1.1 若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\|u(x,0)-w(x)\|=\|\varphi(x)-w(x)\|<\delta$ 时，对 $\forall t\geqslant 0$ 有

$$\|u_\varphi(x,t)-w(x)\|<\varepsilon$$

则称 $w(x)$ 为稳定的。若 $\exists\delta_1>0$，当 $\|\varphi(x)-w(x)\|<\delta_1$ 时有

$$\lim_{t\to+\infty}\|u_\varphi(x,t)-w(x)\|=0$$

则称 $w(x)$ 是吸引的。集合

$$\{\varphi(x)\mid \lim_{t\to+\infty}\|u_\varphi(x,t)-w(x)\|=0\}$$

称为 $w(x)$ 的吸引区域。若 $w(x)$ 既是稳定的又是吸引的，称为(局部)渐近稳定的。若 $w(x)$ 不是稳定的，则称为不稳定的。

同样可引进全局渐近稳定性。

取不同的空间，我们可以给出不同的稳定性。在初值问题中，可以给出 $\overset{\circ}{C}(\mathbf{R})$ 空间中的稳定性。在初边值问题中，可以给出

$C(\Omega)$ 空间，$H^1(\Omega)$ 空间或 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 空间中的稳定性等等．我们还常常只在 $C(\Omega)$ 空间中某个集合上考虑稳定性，如

$$C^+(\bar{\Omega}) = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \in C(\bar{\Omega}),\ \varphi(x) \geqslant 0\ \ (x \in \bar{\Omega})\}$$

即考虑正解的稳定性．有时我们只考虑在逐点收敛意义下的渐近稳定性，即

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = w(x)$$

各种收敛性之间有什么联系？先引述一个引理然后回答这个问题．

引理 4.1.2 设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$，$\delta > 0$，$u(x, t)$ 是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(u) & ((x,t) \in Q_\infty) \\ Bu = g(x) & ((x, t) \in S_\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x \in \Omega) \end{cases} \tag{1.4}$$

的有界解，对 $\forall T > 0$，$u(x, t) \in C^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{\Omega} \times [\delta, T])$，则 $\exists$（与 t 无关的）常数 $M > 0$，对 $\forall t \geqslant \delta > 0$，有

$$|u(\cdot\ , t)|_{2+\beta} \leqslant M \tag{1.5}$$

利用这个引理可以证明：

定理 4.1.3 在引理 4.1.2 的条件下，则有

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = w(x) \tag{1.6}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{t \to +\infty} |u(x, t) - w(x)|_{2+\alpha} = 0 \tag{1.7}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(x, t) - w(x)\|_{1,2} = 0, \quad (w(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})) \tag{1.8}$$

这里 $w(x)$ 是 (1.4) 的平衡解．

证明　设 (1.6) 成立，利用反证法由 (1.5)，对 $0 < \alpha < \beta$ 得到 (1.7) 成立．

由 $u(x, t)$ 一致有界及 (1.5)成立，对 $\forall p \geqslant 2$，$\exists$ 常数 M_1 使得

$\|u(x, t) - w(x)\|_{1,p} \leqslant M_1 \|u(x, t) - w(x)\|_{1,2} \quad (t \geqslant \delta)$．

再利用嵌入定理，存在常数 M_2，

$$\|u(x,t)-w(x)\|_{\alpha}\leqslant M_2\|u(x,t)-w(x)\|_{1,s}$$

因此，若 (1.8) 成立，则 (1.6) 成立，从而 (1.7) 也成立. 证毕.

4.2 初边值问题平衡解的稳定性

4.2.1 基于第一特征值与第一特征函数的稳定性判别法

设 $\lambda_1>0$ 是

$$Lu=\lambda u,\quad Bu|_{\partial\Omega}=0$$

的第一特征值，相应的特征函数(第一特征函数)为 $\varphi_1(x)$，$\varphi_1(x)>0\ (x\in\Omega)$. 将 $\varphi_1(x)$ 规范化使之 $\max\limits_{\Omega}\varphi_1(x)=1$. 在某些情形下，我们可利用第一特征函数来构造上、下解，从而判断 (1.1) 或(1.2) 平衡解的稳定性.

现设 $f(x,t,0)=0$，$g(x)=0$，即 $u=0$ 是 (1.1)-(a)，(b) 的平衡解，我们讨论它的稳定性.

定理 4.2.1 设 $f(x,t,0)=0$，$g(x)=0$，对 $\forall 0<\rho<+\infty$，$f\in C^1(Q_\infty\times[0,\rho])$.

1° 若存在常数 $\alpha>0$ 使得对 $\forall(x,t)\in Q_\infty$，$0<\eta\leqslant\rho$，有

$$f(x,t,\eta)\leqslant(\lambda_1-\alpha)\eta \tag{2.1}$$

则对于 $\forall\varphi(x)$：$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\varphi_1(x)$，(1.1)存在唯一正的整体解 $u(x,t)$ 且有

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)\quad((x,t)\in\bar{Q}_\infty)$$

2° 若 $\exists\alpha>0$ 使得对 $\forall(x,t)\in\bar{Q}_\infty$，$\eta\geqslant0$ 有

$$f(x,t,\eta)\geqslant(\lambda_1+\alpha)\eta \tag{2.2}$$

则对于 $\forall\delta>0$，只要 $\varphi(x)\geqslant\delta\varphi_1(x)$，(1.1) 存在唯一正解 $u(x,t)$ 或定义在 $[0,+\infty)$ 或在有限时间内爆炸. 在存在区间上满足

$$u(x,t)\geqslant\delta e^{\alpha t}\varphi_1(x)$$

证明　1° 取 $\tilde{u}=\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)$，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+L\right)\tilde{u}=(\lambda_1-\alpha)\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)\geqslant f(x,t,\tilde{u})$$

$$B\tilde{u}|_{S_\infty}=0,\ \tilde{u}|_{t=0}=\rho\varphi_1(x)\geqslant\varphi(x)$$

即 $\tilde{u}$ 是一个上解。又 $\underline{u}=0$ 是一个下解。因此存在唯一解 $u(x,t)$ 满足 $0\leqslant u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)=\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)$。

2° 取 $\underline{u}=\delta e^{\alpha t}\varphi_1$，同样计算可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+L\right)\underline{u}\leqslant(\lambda_1+\alpha)\underline{u}\leqslant f(x,t,\underline{u})$$

$$B\underline{u}|_{S_\infty}=0,\ \underline{u}(x,0)=\delta\varphi_1\leqslant\varphi(x)$$

故 $\underline{u}$ 是一个下解。根据定理 3.4.11 得结论。证毕。

当 $Bu=\dfrac{\partial u}{\partial n}+b(x)u$ 时，$\varphi_1(x)>0(x\in\bar{\Omega})$，于是 $\min\limits_{\bar{\Omega}}\varphi_1=\beta_0>0$。当 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\beta_0$ 时就有 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\varphi_1(x)$。

当 $Bu=u$ 时，我们把 L 的系数开拓到 $\bar{\Omega}_1$ 上使之保持原有的光滑性，其中 $\Omega_1\supset\bar{\Omega}$，$\Omega_1$ 是有界开区域，$\partial\Omega_1$ 足够光滑。考察特征值问题

$$Lu=\lambda u,\ Bu|_{\partial\Omega_1}=0 \tag{2.3}$$

任给 $\varepsilon>0$，$\varepsilon<\alpha$，可取 Ω_1 真包含 Ω，使得 (2.3) 有最小特征值 $\lambda_1-\varepsilon$，相应特征函数为 $\psi(x)$。同前面一样可证：当条件 (2.1) 成立时，对 $\forall\varphi(x)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\psi_1(x)$，(1.1) 存在唯一整体解 $u(x,t)$ 且有

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\rho e^{-(\alpha-\varepsilon)t}\psi_1(x)$$

这里 $\psi_1(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 有正的最小值。

这样我们可得到

定理 4.2.2 设 $f(x,t,0)=0$，$g(x)=0$，$f\in C^1(Q_\infty\times[0,+\infty))$，若对 $\forall\rho>0$，$\exists$ 常数 $\alpha>0$，使得对 $\forall(x,t)\in\bar{Q}_\infty$，$0<\eta\leqslant\rho$，有

$$f(x,t,\eta)\leqslant(\lambda_1-\alpha)\eta$$

则 $\exists\delta>0$，对 $\forall\varphi(x)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\delta$，(1.1) 存在唯一正解 $u(x,t)$，且有

$$|u(0,t)|_0 \leqslant \rho, \quad \lim_{t\to+\infty} |u(\cdot,t)|_0 = 0$$

在定理 4.2.1 的条件下，若 (2.1) 成立，则 $u=0$ 在 $C^+(\bar{\Omega})$ 空间中是局部渐近稳定的，若 (2.2) 成立，则 $u=0$ 在 $C^+(\bar{\Omega})$ 空间中是不稳定的。

例 1. 在热点火的简化模型中，有一种模型可导致求解下列问题

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + L\right)u = c(e^{au} - b) & ((x,t)\in Q_\infty) \\ Bu \equiv \beta\dfrac{\partial u}{\partial n} + u = 0 & ((x,t)\in S_\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (x\in\Omega) \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 a, b, c 为正参数且 $b\leqslant 1$，边条件中 $\beta\geqslant 0$ 为常数。现在讨论 $b=1$ 的情形。这时 $u=0$ 是一常数平衡解。

1° 设 $ca<\lambda_1$。则存在 $\rho>0$，当 $(x,t)\in\bar{Q}_\infty$，$0<\eta\leqslant\rho$ 时

$$\frac{f(x,t,\eta)}{\eta} = \frac{e^{a\eta}-1}{a\eta}\cdot ca < \lambda_1$$

且

$$\frac{f(x,t,\eta)}{\eta} \leqslant \frac{e^{a\rho}-1}{a\rho}ca$$

取 α 使得

$$c(e^{a\rho}-1)\rho^{-1} = \lambda_1 - \alpha$$

则 $\alpha>0$。于是

$$f(x,t,\eta)\leqslant(\lambda_1-\alpha)\eta$$
$$((x,t)\in\bar{Q}_\infty,\ \eta\in[0,\rho])$$

因此，当 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\varphi_1(x)$ 时，(2.4) 有唯一解满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x) \quad ((x,t)\in\bar{Q}_\infty)$$

$u=0$ 是渐近稳定的。

2° 设 $ca\geqslant\lambda_1$。

因为 $\dfrac{f(x,t,\eta)}{\eta} = \dfrac{c(e^{a\eta}-1)}{a\eta}a\geqslant ca$，所以当 $ca>\lambda_1$ 时，由定

理 4.2.1 知，$u=0$ 是不稳定的。

注 1 显然，例 1 的结论 2° 对 $0<b\leqslant 1$ 均对。

注 2 用同样的方法可以对参数 c，a，b 的变化及吸引区域等进行同样的讨论得到更多的结果，对此有兴趣的读者可参看 [Pao，1，3]。

定理 4.2.3 设 $u_s(x)$ 是 (1.2) 的平衡解，又设存在 $\delta>0$，$0<\alpha<\lambda_1$，当 $x\in\bar{\Omega}$，$u_s(x)-\delta\leqslant u\leqslant u_s(x)+\delta\,(x\in\Omega)$ 时 $f\in C^1$ 且

$$\left|\frac{\partial f(x,u_s(x))}{\partial u}\right|\leqslant\lambda_1-\alpha$$

则存在 $\rho>0$，$\alpha_1>0$，当 $|\varphi(x)-u_s(x)|\leqslant\rho\varphi_1(x)$ 时 (1.2) 有唯一解 $u_\varphi(x,t)$ 满足

$$|u_\varphi(x,t)-u_s(x)|\leqslant\rho e^{-\alpha_1 t}\varphi_1(x)$$

证明留作练习。

例 2. 在生态学、生物学中有一些简单的一维模型，其形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=f(u)\\ \qquad\qquad\qquad((x,t)\in(0,l)\times\mathbf{R}_+)\\ Bu|_{x=0}=g_1,\ Bu|_{x=l}=g_2\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}\tag{2.5}$$

在不可逆的单酶反应中，f 的形式为

$$f(u)=-\frac{\sigma u}{1+Au}$$

其中 σ，A 为正常数，σ 充分小。

显然，$f(0)=0$，当 $g_1=0$，$g_2=0$ 时 $u=0$ 是常数平衡解。又设

$$\begin{cases}(D(x)u')'=\dfrac{\sigma u}{1+Au}\\ Bu|_{x=0}=g_1,\ Bu|_{x=l}=g_2\end{cases}$$

有一非负解 $u_s(x)\not\equiv 0$，它是 (2.5) 的平衡解。

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \frac{\sigma}{(1+Au)^2} \leqslant \sigma (u \geqslant 0)$$

若 $\sigma < \lambda_1$，则由定理 4.2.3，存在 $\rho > 0$，$\alpha_1 > 0$，当 $|\varphi(x) - u_s(x)| \leqslant \rho\varphi_1(x)$ 时 (2.5) 存在唯一解 $u(x, t)$ 且

$$|u(x, t) - u_s(x)| \leqslant \rho e^{-\alpha_1 t}\varphi_1(x)$$

$u_s(x)$ 是稳定的。

在核反应器动力学中中子流密度的一个简单模型中，$f(u) = -\sigma u^n$，($n \geqslant 1$，σ 为实常数)，可证明类似的稳定性结果，包括当 $\sigma < 0$，$n > 1$ 时的爆炸现象.（参看 [Pao, 2].）

4.2.2 基于单调序列的稳定性判别法

设 $\tilde{\phi} \geqslant \phi$ 分别是

$$\begin{cases} Lu = f(x, u) & (x \in \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases} \tag{2.6}$$

的上、下解，若 $\underset{\sim}{\phi}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \tilde{\phi}(x)$，则 $\tilde{\phi}$，$\underset{\sim}{\phi}$ 分别也是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, u) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

的上、下解. 如果 $f \in C^1(\bar{\Omega} \times [m, M])$，这里 $x \in \bar{\Omega}$ 时 $\tilde{\phi}$，$\phi \in [m, M]$，则 (2.7) 存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$ 满足:

$$\begin{aligned} \phi(x) \leqslant V(x, t) &\leqslant u_\varphi(x, t) \\ &\leqslant U(x, t) \leqslant \tilde{\phi}(x) \end{aligned}$$

其中 $V(x, t) = u_{\underset{\sim}{\phi}}(x, t)$，$U(x, t) = u_{\tilde{\phi}}(x, t)$.

我们可以证明:

(1) $U(x, t)(V(x, t))$ 对 t 单调下降(上升)，因而存在极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(x, t) = V(x)$，$\lim\limits_{t\to+\infty} U(x, t) = U(x)$.

(2) $U(x) = V(x)$，记为 $w(x)$，$w(x)$ 是 (2.7) 的平衡解即 (2.6) 的解，于是

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x, t) = w(x)$$

引理 4.2.4 解 $u_{\tilde{\phi}}(x,t)$ ($u_{\underset{\sim}{\phi}}(x,t)$) 对 $t>0$ 单调下降(上升)。

证明 显然，$t>0$ 时 $u_{\tilde{\phi}}(x,t)\leqslant\tilde{\phi}(x)$. 于是对任意 $\delta>0$，$u_{\tilde{\phi}}(x,\delta)\leqslant\tilde{\phi}(x)$. 当 $\varphi(x)=\tilde{\phi}(x)$ 时，$u_{\tilde{\phi}}(x,t+\delta)$ 是 (2.7) 的下解，$u_{\tilde{\phi}}(x,t)$ 是它的解，所以

$$u_{\tilde{\phi}}(x,t+\delta)\leqslant u_{\tilde{\phi}}(x,t)$$

因此 $u_{\tilde{\phi}}(x,t)$ 对 $t>0$ 单调下降。证毕。

因为 $U(x,t)$，$V(x,t)$ 对 t 单调、有界，所以存在极限

$$\lim_{t\to+\infty}U(x,t)=U(x)$$

$$\lim_{t\to+\infty}V(x,t)=V(x)$$

下面证明 $U(x)$，$V(x)$ 是 (2.6) 的解。

引理 4.2.5 设 $u(x,t)$ 是 (2.7) 的解，若存在极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=U(x)$，则 $U(x)$ 是 (2.6) 的解。

证明 设 $\phi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ ($\phi(x)$ 在 Ω 无穷次可微有紧支集)，则

$$\int_\Omega u_t\phi dx=\int_\Omega(-Lu)\phi dx+\int_\Omega f\phi dx$$

因 ϕ 有紧支集可分部积分得

$$\int_\Omega u_t\phi dx=-\int_\Omega uL^*\phi dx+\int_\Omega f\phi dx$$

其中 L^* 是 L (定义域 $W_p^2(\Omega)$，$u|_{\partial\Omega}=g$) 的共轭算子。除以 T 再从 0 到 T 对 t 积分得

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega u_t\phi dxdt=-\int_0^T\frac{1}{T}\int_\Omega uL^*\phi dxdt+\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega f\phi dxdt \tag{2.8}$$

因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=U(x)$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(x,u(x,t))=f(x,U(x))$，所以 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)dt=U(x)$，$\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,u(x,t))dt=f(x,U(x))$. 由控制收敛定理得，$T\to+\infty$ 时 (2.8) 右端的极

限是

$$\int_\Omega [(-L^*\phi)U + f(x, U)\phi]dx$$

又

$$\frac{1}{T}\int_0^T \int_\Omega u_t \phi dxdt = \int_\Omega \frac{u(x, T) - u(x, 0)}{T} \phi dx$$

$$\to 0 \quad (T \to +\infty)$$

因此

$$\int_\Omega [(-L^*\phi)U + f(x, U)\phi]dx = 0 \tag{2.9}$$

现在由此进一步证明 U 是 (2.7) 的古典解.

由强极值原理,若

$$Lu = 0(x \in \Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

则 $u \equiv 0$, 即 $(-L)$ 是可逆的. 因为 L 的值域是 L_2, 所以 $(-L^*)$ 也可逆且 $(-L^*)^{-1} = ((-L)^{-1})^*$. 由 (2.9)

$$\int_\Omega (L^*\phi)Udx = \int_\Omega f(x, U)\phi dx$$

$$= \int_\Omega f(x, U)(-L^*)^{-1}(-L^*)\phi dx$$

$$= \int_\Omega (-L)^{-1} f(x,U)(-L^*)\phi dx$$

故对任意 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega [(-L)^{-1}f(x, U) + U](-L^*\phi)dx = 0$$

于是

$$(-L)^{-1}f(x, U) + U = 0 \tag{2.10}$$

因为 $U(x) \in L_p(\Omega)$ (任意 $p \geqslant 1$), 所以 $f(x, U) \in L_p(\Omega)$. 由定理 3.2.2, $(-L)^{-1}f(x, U) \in W_p^2(\Omega)$, 即 $U(x) \in W_p^2(\Omega)$. 由嵌入定理, $U(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $f(x, U(x)) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 于是由定理 3.2.2, $(-L)^{-1}f(x, U) \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 即 $U \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$. 因此可在(2.10)两边作用 $(-L)$ 得到

$$-LU + f(x, U) = 0$$

又显然有 $U|_{\partial\Omega}=g$，于是 U 是 (2.7) 的古典解。同理可证 $V(x)$ 也是 (2.7) 的古典解。

定理 4.2.6 设 $f\in C^1(\Omega\times[m, M])$ 且又有

1° $\tilde{\psi}(x)\geqslant \underset{\sim}{\psi}(x)$ 分别是 (2.6) 的上、下解，当 $x\in\bar{\Omega}$ 时 $\tilde{\psi}(x)$，$\underset{\sim}{\psi}(x)\in[m, M]$。

2° 以 $\tilde{\psi}(x)$，$\underset{\sim}{\psi}(x)$ 为初值的迭代序列 $T^n\tilde{\psi}$，$T^n\underset{\sim}{\psi}$ 有相同的极限 $w(x)$，其中 T 是定理 3.3.2 中定义的映射，则 $w(x)$ 是 (2.7) 的平衡解，而且若 $\underset{\sim}{\psi}\leqslant\varphi(x)\leqslant\tilde{\psi}$，必有

$$\lim_{t\to+\infty}u_\varphi(x, t)=w(x)$$

证明 因为

$$\underset{\sim}{\psi}\leqslant u_{\underset{\sim}{\psi}}(x, t)\leqslant u_\varphi(x, t)\leqslant u_{\tilde{\psi}}(x, t)\leqslant\tilde{\psi}$$

其中 $\underset{\sim}{\psi}\leqslant\varphi\leqslant\tilde{\psi}$，由引理 4.2.5，存在极限

$$\lim_{t\to+\infty}(u_{\tilde{\psi}}(x, t), u_{\underset{\sim}{\psi}}(x, t))=(U(x), V(x))$$

$U(x)$，$V(x)$ 是 (2.6) 的解，同时又有

$$\underset{\sim}{\psi}\leqslant V\leqslant U\leqslant\tilde{\psi}$$

由推论 3.3.3 得 $V(x)=U(x)=w(x)$，因此

$$\lim_{t\to+\infty}u_\varphi(x, t)=w(x)$$

证毕。

注 1 已经知道存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}T^n\tilde{\psi}=\bar{V}(x)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}T^n\underset{\sim}{\psi}=\underline{V}(x)$ 且 $\bar{V}(x)\geqslant\underline{V}(x)$。在此基础上，若能证明 $\bar{V}(x)\leqslant\underline{V}(x)$，则定理 4.2.6 可被应用。

注 2 对于第二、三边条件的情形也有类似的结论。

例 3 考察初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+\mu u-u^3 & (x\in\Omega)\\ u|_{\partial\Omega}=0\\ u(x, 0)=\varphi(x) & (x\in\bar{\Omega})\end{cases}\tag{2.11}$$

记

$$-\Delta\varphi=\lambda\varphi,\ \varphi|_{\partial\Omega}=0$$

的最小特征值为 λ_1，相应的正特征函数为 $\varphi_1(x)$

$$-\Delta\psi=\mu\psi,\quad \psi|_{\partial\Omega_1}=0$$

的最小特征值是 μ_1，相应的正特征函数为 $\psi_1(x)$，其中 $\Omega_1\supset\bar{\Omega}$. $\varphi(x)$ 满足单调方法的要求.

1° 当 $\mu<\lambda_1$ 时，存在常数 $K>0$ 和 $\alpha>0$，使得 (2.11) 的解满足

$$|u(x,t)|\leqslant Ke^{-\alpha t}\max_{\bar{\Omega}}\psi_1(x)$$

证明参见 § 3.4.2 的例 3.

2° 当 $\mu>\lambda_1$ 时，曾证明 (2.11) 存在唯一正的平衡解 $u^+(x)$ 和唯一负的平衡解 $u^-(x)$. 若 $\varphi(x)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$，$\varphi(x)\not\equiv 0$，则 (2.11) 存在唯一非负解 (非正解 $u(x,t)$)：

$$u(x,t)>0(<0)\quad (x\in\Omega,\ t>0)$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=u^+(x)\ \ (u^-(x))$$

证明　对 $\varphi(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\not\equiv 0$ 情形给出证明. (2.11)的解记为 $u_\varphi(x,t)$. 对充分大的正数 M 和充分小的正数 δ，$\bar{\varphi}(x)=Mu^+(x)$，$\underline{\varphi}(x)=\delta\varphi_1(x)$ 分别是

$$\begin{cases}-\Delta u=\mu u-u^3\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的上解与下解. 若 $\exists\delta>0$，$M>0$，使

$$\underline{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar{\varphi}(x)$$

则 (2.11) 存在唯一非负解 $u_\varphi(x,t)$:

$$u_{\underline{\varphi}}(x,t)\leqslant u_\varphi(x,t)\leqslant u_{\bar{\varphi}}(x,t)$$

因为

$$\lim_{t\to+\infty}u_{\bar{\varphi}}(x,t)=\lim_{t\to+\infty}u_{\underline{\varphi}}(x,t)=u^+(x)$$

所以

$$\lim_{t\to+\infty}u_\varphi(x,t)=u^+(x)$$

当 $\varphi(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\not\equiv 0$ 时，$u_\varphi(x,t)>0$ $(x\in\Omega,\ t>0)$，$\left.\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}<0$. 令 $u_\varphi(x,\sigma)=\varphi^*(x)$ ($\sigma>0$ 为常数)，则

$$\varphi^*(x) > 0(x \in \Omega),\ \varphi^*|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} < 0$$

于是 $\delta > 0$ 充分小，$M > 0$ 充分大使

$$\varphi(x) = \delta\varphi_1(x) \leqslant \varphi^*(x) \leqslant Mu^+(x) = \psi(x)$$

（习题 4.2）。因此

$$\lim_{t\to+\infty} u_{\varphi^*}(x,t) = u^+(x)$$

但

$$u_{\varphi^*}(x,t) = u_\varphi(x,t+\sigma)$$

故

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t) = u^+(x)$$

证毕。

例 4 设 $\bar{u}$ 是

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & (x \in \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的任一解，因 $\Delta\bar{u} = -\bar{u}^3 \leqslant 0$，$\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$，由极值原理得 $\bar{u} \geqslant 0$ $(x \in \Omega)$。若 $\bar{u} \not\equiv 0$，令 $\varphi(x) = \varepsilon\bar{u}(x)$，$\varepsilon > 0$，则

$$-\Delta\varphi - \varphi^3 = \varepsilon(1-\varepsilon)\bar{u}^3$$

当 $\varepsilon > 1$，则 $\varphi(x) = \varepsilon\bar{u}(x)$ 是 (1.14) 的下解。若 $u_\varepsilon(x,t)$ 是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^3 & ((x,t) \in Q_\infty) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解，则 $u_\varepsilon(x,t)$ 对 t 单调上升。因此，$\bar{u}(x)$ 不是渐近稳定的。

4.3 初值问题常数平衡解的稳定性

4.3.1 基本引理

初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) & (-\infty x < +\infty,\ t > 0) & \text{(a)} \\ u(x,0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty) & \text{(b)} \end{cases} \qquad (3.1)$$

的解记为 $u_\varphi(x,t)$，现给出充分条件使得

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=\tau(x)$$

而 $\tau(x)$ 是 (3.1)-(a) 的平衡解。

先引述关于解的导数的内估计的结论。

引理 4.3.1 设 $u(x,t)$ 是 (3.1)-(a)的解，存在常数 $M>0$，使得 $|u(x,t)|\leqslant M(t\geqslant 0,x\in\mathbf{R})$. 则对任意 $A>0$，$\delta>0$，存在常数 $M_1>0$ 使得 $x\in[-A,A]$，$t\in[\delta,+\infty)$ 时

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\leqslant M_1,\quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leqslant M_1$$

$$\sup_{\substack{-A\leqslant x,y\leqslant A\\ \delta\leqslant t,s\leqslant+\infty\\ (x,t)\neq(y,s)}}\frac{|u_{xx}(x,t)-u_{xx}(y,s)|}{|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}}\leqslant M_1$$

引理 4.3.2 设对任意 $x\in\mathbf{R}$，$t\geqslant 0$，(3.1) 的解 $u_\varphi(x,t)$ 有界且对 t 单调上升(下降)则存在极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=\tau(x)$ (在 $\mathbf{R}$ 的每个有界闭区间上一致成立)，$\tau(x)$ 是 (3.1)-(a) 的平衡解而且是 $\mathbf{R}$ 上满足

$$\tau(x)\geqslant\varphi(x)\quad(\tau(x)\leqslant\varphi(x))$$

的最小解(最大解)。

证明　不妨设 $u_\varphi(x,t)=u(x,t)$ 对 t 单调上升，存在极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)=\tau(x)$ 是显然的。

任取 $A>0$，$t_n\to+\infty$，由引理4.3.1知 $\{u(x,t_n)\}$，$\left\{\dfrac{\partial u(x,t_n)}{\partial x}\right\}$，$\left\{\dfrac{\partial^2 u(x,t_n)}{\partial x^2}\right\}$ 在 $[-A,A]$ 一致有界等度连续，再由 Arzela 定理，必有子列 $t_n'\to+\infty$ 和 $w(x)$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty} u(x,t_n')=w(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial u(x,t_n')}{\partial x}=w'(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial^2 u(x,t_n')}{\partial x^2}=w''(x)$$

在 $[-A, A]$ 上一致成立，显然 $w(x)=\tau(x)$，它不随 t_n 而变。因此

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t)=\tau(x)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\tau''(x)$$

对 u 满足的方程两边取极限得

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}=\tau''(x)+f(\tau(x))=0\ (x\in(-A, A])$$

再由 A 的任意性，$\tau(x)$ 是 (3.1)-(a) 的平衡解.

若 $\sigma(x)\geqslant\varphi(x)$ $(x\in \mathrm{R})$ 是 (3.1)-(a) 的平衡解，由比较原理得 $\sigma(x)\geqslant u_\varphi(x,t)$，令 $t\to+\infty$ 得 $\sigma(x)\geqslant\tau(x)$. 证毕.

何时有 $u_\varphi(x,t)$ 对 t 单调有界？不难证明

引理 4.3.3 设 $\varphi(x)$ 是 (3.1)-(a) 的上解(下解)，$f\in C^1$，则对 $\forall$ 固定的 x，(3.1) 的解 $u_\varphi(x,t)$ 对 t 单调下降(上升).

由引理 4.3.2 与 4.3.3 易得

推论 4.3.4 设 (3.1)-(a) 有上、下解 $\bar\varphi(x)$，$\underset{\sim}{\varphi}(x)$ $\underset{\sim}{\varphi}(x)\leqslant\bar\varphi(x)$，$f\in C^1$，则

1° (3.1)-(a) 存在平衡解 $\bar\tau(x)$，$\underset{\sim}{\tau}(x)$，$\bar\tau(x)$ 是不大于 $\bar\varphi(x)$ 的最大平衡解，$\underset{\sim}{\tau}(x)$ 是不小于 $\underset{\sim}{\varphi}(x)$ 的最小平衡解. $\underset{\sim}{\tau}(x)\leqslant\bar\tau(x)$.

2° 对 $\forall\varphi\in C(\mathrm{R})$，若 $\underset{\sim}{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar\varphi(x)$，(3.1) 必有唯一解 $u_\varphi(x,t)$，

$$\underset{\sim}{\varphi}(x)\leqslant u_\varphi(x,t)\leqslant\bar\varphi(x)\quad(x\in R,\ t\geqslant 0)$$

又若 $\underset{\sim}{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\underset{\sim}{\tau}(x)$，必有

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=\underset{\sim}{\tau}(x)$$

若 $\bar\tau(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar\phi(x)$. 必有

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=\bar\tau(x)$$

若 $[\underset{\sim}{\varphi}, \bar\varphi]$ 中 (3.1)-(a) 有唯一平衡解 $\tau(x)$，则

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=\tau(x)$$

讨论平衡解的存在性与稳定性变成了求上，下解 $\tilde{\varphi}(x)$，$\underset{\sim}{\varphi}(x)$ 及讨论平衡解的唯一性，或者直接讨论比较函数 $u_{\tilde{\varphi}}$ 与 $u_{\underset{\sim}{\varphi}}$ 的极限。

下面介绍一种构造比较函数的方法。

引理 4.3.5 设 $f\in C^1[0,1]$，$f(0)=f(1)=0$，$q(x)\in C[a,b]$ 是

$$\begin{cases}q''+f(q)=0\\ q(a)=q(b)=0\end{cases}\tag{3.2}$$

的解 $x\in[a,b]$ 时 $q(x)\in[0,1]$。则初值问题

$$\begin{cases}v_t=v_{xx}+f(v)\\ v(x,0)=\begin{cases}q(x) & (x\in(a,b))\\ 0 & (x\in\mathrm{R}\backslash(a,b))\end{cases}\end{cases}$$

存在唯一解 $v(x,t)\in[0,1]$，它对 t 单调上升的，而且在 R 的每个有界闭区间上

$$\lim_{t\to+\infty}v(x,t)=\tau(x)$$

一致成立，其中 $\tau(x)$ 是

$$\tau''+f(\tau)=0$$

的在整个 R 上满足

$$\tau(x)\geqslant q(x)\qquad(x\in(a,b))$$

的最小非负解。

证明　只须证 $v(x,t)$ 对 t 单调上升。

在 $[a,b]\times[0,+\infty)$ 上利用比较原理得 $v(x,t)\geqslant q(x)$，从而对任意 $h>0$，有

$$v(x,h)\geqslant v(x,0)\qquad(x\in(-\infty,+\infty))$$

再用比较原理得

$$v(x,t+h)\geqslant v(x,t)\qquad(x\in\mathrm{R},t\geqslant0)$$

即 $v(x,t)$ 对 t 单调上升。证毕。

这里

$$\underset{\sim}{q}(x)=\begin{cases}q(x) & (x\in(a,b))\\ 0 & (x\in\mathrm{R}\backslash(a,b))\end{cases}$$

起到了下解的作用，利用它可以构造出对 t 单调上升的比较函数 $v(x,t)$，并证明了平衡解的存在性。

下面讨论这种 $q(x)$ 即边值问题 (3.2) 的解的存性。我们假设：

$$f\in C^1[0,1],\ f(0)=0,\ f'(0)>0 \tag{3.3}$$
$$0<a<1,\ 当\ u\in(0,a)\ 时\ f(u)>0$$

平衡解方程 $q''+f(q)=0$ 的第一积分是

$$\frac{1}{2}q'^2+F(q)=K$$

其中 K 是任意常数，$F(q)=\int_0^q f(s)ds$，对任意 $\varepsilon\in(0,a)$，$F(q)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 严格上升，更有 $F(\varepsilon)>0$，因为 $F'(\varepsilon)=f(\varepsilon)>0$，所以

$$b_\varepsilon=\sqrt{2}\int_0^\varepsilon\frac{dt}{\sqrt{F(\varepsilon)-F(t)}}<+\infty \tag{3.4}$$

由此推得对任意 $\varepsilon\in(0,a)$，

$$\begin{cases}q''+f(q)=0 & \left(\frac{1}{2}q'^2+F(q)=F(\varepsilon)\right)\\ q(0)=0,\ q'(0)=\sqrt{2F(\varepsilon)}\end{cases}$$

在 $[0,b_\varepsilon]$ 上有正解 $q_\varepsilon(x)$：

$$\int_0^{q_\varepsilon(x)}\frac{dt}{\sqrt{2(F(\varepsilon)-F(t))}}=x\quad\left(x\in\left[0,\ \frac{1}{2}b_\varepsilon\right]\right)$$

$q_\varepsilon(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}b_\varepsilon$ 是对称的，于是

$$0\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon,\ q_\varepsilon(0)=q_\varepsilon(b_\varepsilon)=0$$

若令 $F(t)=F(\varepsilon)\sin^2\theta$，则

$$F'(t)dt=2F(\varepsilon)\sin\theta\cos\theta d\theta$$

于是

$$b_\varepsilon=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(t)^{\frac{1}{2}}}{F'(t)}d\theta$$

引理 4.3.6 设 f 满足 (3.3)，则对 $a>\varepsilon>0$，$\exists b_\varepsilon$（由(3.4)给出），使得

1° 边值问题 $\begin{cases} q''+f(q)=0 \\ q(0)=0,\ q(b_\varepsilon)=0 \end{cases}$

$\exists$ 解 $q_\varepsilon(x)$，它关于 $x=\frac{1}{2}b_\varepsilon$ 对称且有 $0\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon$。

2° $\lim\limits_{\varepsilon\to0+} b_\varepsilon=\dfrac{\pi}{\sqrt{f'(0)}}$

证明 $\forall\eta>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<t\leqslant\delta$ 时

$$f'(0)(1-\eta)t<f(t)<f'(0)(1+\eta)t$$

$$\frac{1}{2}f'(0)(1-\eta)t^2<F(t)<\frac{1}{2}f'(0)(1+\eta)t^2$$

于是

$$\left[\frac{1-\eta}{2f'(0)(1+\eta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{F(t)^{\frac{1}{2}}}{F'(t)}=\frac{F(t)^{\frac{1}{2}}}{f(t)}$$

$$\leqslant\left[\frac{1+\eta}{2f'(0)(1-\eta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

因此当 $0<\varepsilon\leqslant\delta$ 时（必有 $0<t\leqslant\delta$）

$$\frac{\sqrt{1-\eta}}{1+\eta}\frac{\pi}{\sqrt{f'(0)}}\leqslant b_\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{f'(0)}}\frac{\sqrt{1+\eta}}{1-\eta}$$

即
$$\lim_{\varepsilon\to0+} b_\varepsilon=\frac{\pi}{\sqrt{f'(0)}}$$

证毕。

4.3.2 常数平衡解的 $(\mathring{C})$ 稳定性

设 $u=u_0$ 是 (3.1)-(a) 的常数平衡解，则 $u=u_0$ 是常微分方程

$$\frac{du}{dt}=f(u) \tag{3.5}$$

的平衡点，两者的稳定性有何联系？

定理 4.3.7 设 $f\in C^1$，$f(u_0)=0$，则 $u=u_0$ 是(3.1)-(a)的 $\mathring{C}$ 稳定（渐近稳定）平衡解的充要条件是：$u=u_0$ 是常微分方程(3.5)的稳定（渐近稳定）平衡点.

证明 设 $u=u_0$ 是(3.5)的稳定平衡点，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $u_\pm(0)=u_0\pm\delta$ 时对应的(3.5)的解 $u_\pm(t)$ 定义于 $[0,+\infty)$ 且满足

$$|u_\pm(t)-u_0|<\varepsilon$$

于是若 $\varphi(x)\in\mathring{C}(-\infty,+\infty)$，$|\varphi(x)-u_0|\leqslant\delta$，则 $u_\pm(t)$ 分别是(3.1)的上、下解，因而(3.1)存在解 $u_\varphi(x,t)$ 满足

$$u_-(t)\leqslant u_\varphi(x,t)\leqslant u_+(t)$$

从而

$$-\varepsilon<u_-(t)-u_0<u_\varphi(x,t)-u_0<u_+(t)-u_0<\varepsilon$$

因此 $u=u_0$ 是(3.1)-(a)的 $\mathring{C}$ 稳定解.

现设 $u=u_0$ 是(3.1)-(a)的 $\mathring{C}$ 稳定解，则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$，当 $\varphi(x)\in\mathring{C}(-\infty,+\infty)$，$|\varphi(x)-u_0|<\delta$ 时，对一切 $t>0$ 有 $|u_\varphi(x,t)-u_0|<\varepsilon$. 当 $|z_0-u_0|<\delta$ 时，取 $\varphi(x)=z_0$，由唯一性，$u_\varphi(x,t)=u(t,z_0)$，$u(t,z_0)$ 是方程(3.5)取初值 $u(0)=z_0$ 的解，于是

$$\|u_\varphi(x,t)-u_0\|=|u(t,z_0)-u_0|<\varepsilon$$

即 $u=u_0$ 是(3.5)的稳定平衡点. 另一结论类似可证. 证毕.

定理 4.3.7 没有回答(3.1)-(a)的常数平衡解的吸引区域. 下面对某些类型的方程讨论这个问题.

我们总是假定：$f\in C^1[0,1]$，$f(0)=f(1)=0$，并分别考虑以下情形.

1° 当 $u\in(0,1)$ 时

$$f(u)>0 \tag{3.6}$$

2° $0<a<1$

当 $u\in(0,a)$ 时 $f(u)>0$，当 $u\in(a,1)$ 时

$$f(u)<0 \tag{3.7}$$

3° $0<a<1$

当 $u\in[0,a)$ 时 $f(u)<0$，当 $u\in(a,1)$ 时

$$f(u) > 0 \tag{3.8}$$

引理 4.3.8 设 $f(u) \in C[\alpha, \beta]$

1° 若 $f(\alpha) = 0$，$u \in (\alpha, \beta]$ 时 $f(u) < 0$，则当 $z_0 \in [\alpha, \beta]$ 时

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, z_0) = \alpha$$

2° 若 $f(\beta) = 0$，$u \in [\alpha, \beta)$ 时 $f(u) > 0$，则当 $z_0 \in [\alpha, \beta]$ 时

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, z_0) = \beta$$

证明留给读者。

定理 4.3.9 1° 设 f 满足(3.6)，任意常数 $\alpha \in (0, 1]$，则当 $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ $(x \in (-\infty, +\infty))$ 时(3.1)存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$ 并有

$$\lim_{t \to +\infty} u_\varphi(x, t) = 1 \text{（对 } x \in \mathrm{R} \text{ 一致）}$$

2° 设 f 满足(3.7)，α 是任意正常数，则当 $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 - \alpha$ 时，(3.1)存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$ 并有

$$\lim_{t \to +\infty} u_\varphi(x, t) = a \quad \text{（对 } x \in \mathrm{R} \text{ 一致）}$$

3° 设 f 满足(3.8)，α 是任意正常数，则当 $0 \leqslant \varphi \leqslant a - \alpha$ 时，(3.1)存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$并有

$$\lim_{t \to +\infty} u_\varphi(x, t) = 0 \quad \text{（对 } x \in \mathrm{R} \text{ 一致）}$$

当 $a + \alpha \leqslant \varphi \leqslant 1$ 时，(3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$ 并有

$$\lim_{t \to +\infty} u_\varphi(x, t) = 1 \quad \text{（对 } x \in \mathrm{R} \text{ 一致）}$$

4.3.3 常数平衡解(逐点收敛意义下)的稳定性

现在我们适当加强 f 的条件，放宽 $\varphi(x)$ 的条件，使得 $t \to +\infty$ 时 $u_\varphi(x, t)$ 趋于 a，0 或 1.

先证一个引理。

引理 4.3.10 设 f 满足(3.7)，$\tau(x)$ 是

$$q'' + f(q) = 0$$

的不恒为零的非负解，则 $\tau(x) \geqslant a$。

证明　若不然，则存在 x_0 使得 $0<\tau(x_0)=\beta<a$，因为 $\tau(x)$ 满足

$$\frac{1}{2}\tau'^2+F(\tau)=k$$

其中常数 $k\geqslant F(\beta)$，又 $(k-F(t))^{-\frac{1}{2}}$ 在 $[0,\beta]$ 可积，所以 $\tau(x)$ 满足

$$x=x_0\pm\int_{\tau(x)}^{\beta}[2(k-F(t))]^{\frac{-1}{2}}dt$$

其中"±"由 $\tau''(x_0)$ 的符号决定．因为 $\int_0^{\beta}[2(k-F(t))]^{-\frac{1}{2}}dt$ 收敛，所以存在 $\tilde{x}$ 使得

$$\tilde{x}-x_0=\pm\int_{\tau(\tilde{x})=0}^{\beta}(2(k-F(t))]^{-\frac{1}{2}}dt$$

因为 $\tau(x)\geqslant 0$．所以 $\tau'(\tilde{x})=0$，由唯一性得 $\tau(x)\equiv 0$，与已知 $\tau(x)\not\equiv 0$ 矛盾，因此 $\tau(x)\geqslant a$．证毕．

定理 4.3.11　设 f 满足 (2.7) 且 $f'(0)>0$，$f'(1)>0$，若 $\varphi(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，但 $\varphi(x)\not\equiv 0$，$\varphi(x)\not\equiv 1$，则 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$ 且

$$\lim_{t\to+\infty}u_\varphi(x,t)=a$$

证明　前面已经指出在 $(0,b_\varepsilon)$ 上存在非负平衡解 $q_\varepsilon(x)$：

$$0\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon,\ q_\varepsilon(0)=q_\varepsilon(b_\varepsilon)=0$$

显然 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$．

若 $\varphi(x)\not\equiv 0$，则对任意 $h>0$，$u_\varphi(x,h)>0$．由引理 4.3.6 知，存在 $\varepsilon_0>0$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时 $b_\varepsilon<\dfrac{2\pi}{\sqrt{f'(0)}}$．取定 $H>\dfrac{2\pi}{\sqrt{f'(0)}}$ 及 $h>0$，则 $\min\limits_{[-H,H]}u_\varphi(x,h)=\delta$．再取 $0<\varepsilon\leqslant\min(\varepsilon_0,\delta)$，则在 $[0,b_\varepsilon]$ 上

$$u_\varphi(x,h)\geqslant\delta\geqslant\varepsilon\geqslant q_\varepsilon(x)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上

$$u_\varphi(x, h) \geqslant \bar{q}_\varepsilon(x) = \begin{cases} q_\varepsilon(x) & (x \in (0, b_\varepsilon)) \\ 0 & (x \notin (0, b_\varepsilon)) \end{cases}$$

由比较定理及基本引理得

$$u_\varphi(x, t+h) \geqslant u_{\bar{q}_\varepsilon}(x, t)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \inf u_\varphi(x, t) \geqslant \lim_{t\to+\infty} u_{\bar{q}_\varepsilon}(x, t) = \tau(x)$$

其中 $\tau(x) \geqslant q_\varepsilon(x)$ $(x \in (0, b_\varepsilon))$，$\tau(x)$ 是 $q'' + f(q) = 0$ 的解。再由引理 4.3.10 知 $\tau(x) \geqslant a$。因此，

$$\lim_{t\to+\infty} \inf u_\varphi(x, t) \geqslant a \tag{3.9}$$

若 $\varphi(x) \not\equiv 1$，$\varphi^* = 1 - \varphi$，$v = 1 - u_\varphi(x, t)$，则 $\varphi^* \not\equiv 0$，$0 \leqslant \varphi^* \leqslant 1$，$v$ 满足

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f^*(v) \\ v(x, 0) = \varphi^*(x) \end{cases}$$

其中 $f^*(v) = -f(1 - v)$

$f^*(v)$ 满足 $f^*(0) = 0$，$f'(0) = f'(1) > 0$

$f^*(v) > 0$ $(v \in (0, 1 - a))$。

利用上面证得的结论可知

$$\lim_{t\to+\infty} \inf v(x, t) = 1 + \lim_{t\to+\infty} \inf(-u_\varphi)$$

$$= 1 - \lim_{t\to+\infty} \sup u_\varphi(x, t) \geqslant 1 - a$$

即

$$\lim_{t\to+\infty} \sup u_\varphi(x, t) \leqslant a \tag{3.10}$$

由 (3.9) 和 (3.10) 得

$$\lim_{t\to+\infty} \sup u_\varphi(x, t) = \lim_{t\to+\infty} \inf u_\varphi(x, t) = a$$

即

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x, t) = a$$

证毕。

利用定理 4.3.11 可以证明

定理 4.3.12 设 f 满足 (3.6) 且 $f'(0) > 0$。若 $\varphi(x) \in C(-\infty, +\infty)$，$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$，$\varphi(x) \not\equiv 0$，则 (3.1) 存在唯一解

$u_\varphi(x,t)$ 且

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=1$$

证明留做练习。

定理 4.3.13 设 f 满足(3.8)。若 $\varphi(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，对某个 $0\leqslant\rho<a$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-\rho]^+dx<\sqrt{\frac{2\pi}{s(\rho)}}e(a-\rho) \text{ 收敛}$$

其中

$$s(\rho)=\sup_{u\in(a,1)}\frac{f(u)}{u-\rho},\ [\mu]^+=\max\{\mu,0\}$$

则(3.1)有唯一解 $u_\varphi(x,t)$，满足

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t)=0 \quad (\text{对 } x\in R \text{ 一致})$$

证明 对于固定的 $\rho\in[0,a)$，$s(\rho)>0$ 是常数。

令 $w(x,t)$ 是

$$\begin{cases}w_t=w_{xx}+s(\rho)w\\ w(x,0)=[\varphi(x)-\rho]^+\geqslant 0\end{cases}$$

的有界解，则 $\tilde{w}=we^{-s(\rho)t}$ 满足

$$\begin{cases}\tilde{w}_t=\tilde{w}_{xx}\\ \tilde{w}(x,0)=[\varphi(x)-\rho]^+\end{cases}$$

由 poisson 公式，

$$w=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{s(\rho)t}\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(\xi)-\rho]^+e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi \qquad (3.11)$$

由于当 $u>\rho$ 时 $s(\rho)\geqslant\dfrac{f(u)}{u-\rho}$，令 $u(x,t)=u_\varphi(x,t)$，$v(x,t)=u(x,t)-\rho$，

则

$$\begin{aligned}v_t-v_{xx}-s(\rho)[v]^+&\leqslant u_t-u_{xx}-f(u)\\ &=0=w_t-w_{xx}-s(\rho)w\end{aligned}$$

令 $D=\{(x,t)|u(x,t)>\rho\}$，在 $\bar{D}$ 上有类似的比较原理，故有

$$[v(x,t)]^+ \leqslant w(x,t)$$

于是

$$u(x,t) \leqslant w(x,t) + \rho$$

由（3.11）

$$u\left(x, \frac{1}{2s(\rho)}\right) \leqslant w\left(x, \frac{1}{2s(\rho)}\right) + \rho$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{s(\rho)}{2\pi}} e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) - \rho]^+ dx + \rho$$

于是存在 ρ'（$\rho < \rho' < a$），使得

$$u\left(x, \frac{1}{2s(\rho)}\right) \leqslant (a - \rho') - \rho = a - (\rho' - \rho)$$

取 $\alpha = \rho' - \rho$，$t_0 = \dfrac{1}{2s(\rho)}$，则 $0 \leq u(x, t_0) < a - \alpha$，由定理 4.3.9 的 3° 得

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t) = 0 \quad （对\ x\in R\ 一致）$$

证毕。

现在假定 f 满足：$f\in C^1[0, 1]$，$f(0) = f(1) = 0$，当 $u\in(0, a)$ 时 $f(u) \leqslant 0$，当 $u\in(a, 1)$ 时 $f(u) > 0$，

$$\int_0^1 f(u)du > 0 \tag{3.12}$$

故存在 $k\in(a, 1)$，

$$F(k) = \int_0^k f(t)dt = 0$$

而且对 $q\in(k, 1)$，有 $F(q) > 0$，$F'(q) = f(q) > 0$

对任意 $\beta\in(k, 1)$，定义

$$b_\beta = \int_0^\beta \{2[F(\beta) - F(s)]\}^{-\frac{1}{2}} ds$$

显然它收敛．考虑初值问题

$$\begin{cases} q'' + f(q) = 0 \\ q(0) = \beta,\ q'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

由方程的第一积分和 b_β 的定义，(3.13) 在 $[-b_\beta, b_\beta]$ 上有解

$q_\beta(x)$:

$$q_\beta(-b_\beta)=q_\beta(b_\beta)=0\quad(0\leqslant q_\beta(x)\leqslant\beta)$$

见图 4-2.1 由于 (3.13) 的解的平移不变性,

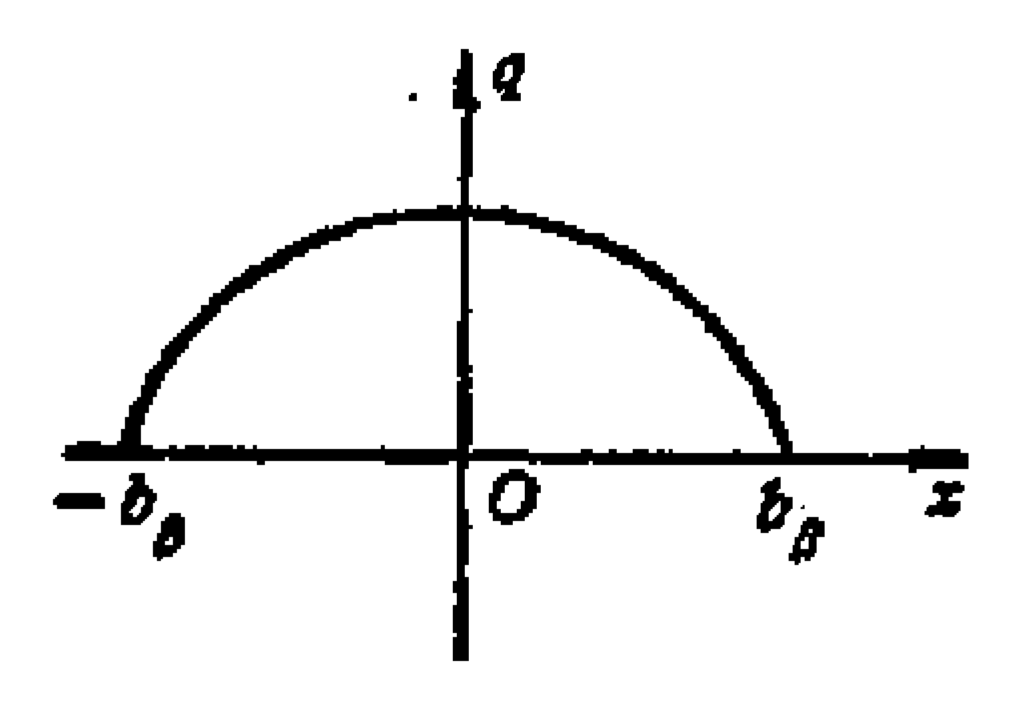


图 4-2.1

$$\begin{cases}q''+f(q)=0\\ q(x_0)=\beta,\ q'(x_0)=0\end{cases}$$

有解 $q_\beta(x-x_0)$ 满足:

$$0\leqslant q_\beta(x-x_0)\leqslant\beta$$

$$(x\in[x_0-b_\beta,x_0+b_\beta])$$

$$q_\beta(x-x_0)|_{x=x_0+b_\beta}=0$$

借助于这个函数我们可得下面的定理.

定理 4.3.14 设 f 满足 (3.12), $\varphi(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$,

$$\varphi(x)\geqslant\begin{cases}q_\beta(x-x_0) & (x_0-b_\beta,\ x_0+b_\beta)\\ 0 & (\mathbf{R}\backslash(x_0-b_\beta,\ x_0+b_\beta))\end{cases}$$

则 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}u_\varphi(x,t)=1$$

证明　初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(v)\\ v(x,0)=\begin{cases}q_\beta(x-x_0) & (x_0-b_\beta,x_0+b_\beta)\\ 0 & R\backslash(x_0-b_\beta,x_0+b_\beta)\end{cases}\end{cases}$$

存在解 $v(x,t)$, 由引理 4.3.5, 存在

$$\lim_{t\to+\infty}v(x,t)=r(x)$$

$r(x)$ 是 $q''+f(q)=0$ 在R上满足 $r(x)\geqslant q_\beta(x-x_0)$ $(x\in[x_0-b_\beta,x+b_\beta])$ 的最小非负解.

显然

$$v(x,t)\leqslant u_\varphi(x,t)\leqslant 1$$

于是

$$q_\beta(x-x_0) \leqslant \tau(x) = \lim_{t\to+\infty} v(x,t)$$
$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} \inf u_\varphi(x,t) \leqslant \lim_{t\to+\infty} \sup u_\varphi(x,t) \leqslant 1$$

类似于引理 4.3.10 可证 $\tau(x) \equiv 1$，因此，

$$\lim_{t\to+\infty} u_\varphi(x,t) = 1$$

证明定理 4.3.11 及定理 4.3.14 用到一个相同的方法：先构造一个平衡解（$q_c(x)$ 和 $q_\beta(x-x_0)$）及其相应的初值问题，然后利用基本引理及比较方法证明稳定性并确定吸引区域。这种方法在文献中称为 Aronson-Weinberger 技巧。

4.4 评　　注

单调方法是讨论平衡解稳定性的一种方法．若 $u_s(x)$ 是系统的平衡解，$\varphi_1(x)$ 是相应的特征值问题的第一特征函数，常常是求形如 $u_s(x)\pm p(t)\varphi_1(x)$ 的上，下解来讨论平衡解的稳定性，并求得局部的吸引区域。

利用上，下解可以证明平衡解的全局稳定性，主要有以下两种情形：

1. 转化为讨论相应的常微分方程。

在 Neumann 齐次边条件下，抛物型方程的初边值问题或初值问题常数平衡解的稳定性可以转化为讨论相应的常微分方程平衡点的稳定性。

2. 基于相应椭圆型方程问题的上，下解的判别方法（定 4.2.6）。

如果相应的椭圆型边值问题有"任意大"的上解 $\phi(x)$及"任意小"的正下解 $\varphi(x)$，并满足定理 4.2.6 的条件，我们可以得到正平衡解的全局稳定性，如 § 4.2.2 的例 3．如果正平衡解是唯一的，那么定理 4.2.6 中的条件 2° 就自然满足，因此，正平衡解的唯一性问题是讨论正平衡解的全局稳定性问题中的一个关键环节．（当然，我们也可用另外方法证明正平衡解的全局稳定性，从而得到正平

衡解的唯一性.)在§3.3.3中给出一类问题,并给出充分条件,保证正平衡解是唯一的.这是通过求上,下解并利用做度定理来证明正平衡解的唯一性. 如果改用 [Sa. 2, p. 40] 所引述的定理 2.7.1 (Serrin) 来证明平衡解的唯一性, 把 § 3.3.3 (3.17) 中的 Laplace 算子改为一般的二阶一致椭圆算子,则定理 3.3.25 仍成立.[Ama. 2] 给出证明方程式平衡解唯一性的另一方法.

平衡解的稳定性与线性化问题的第一特征值有密切联系. 事实上,设 $f \in C^1$, $\bar{u}(x)$ 是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad\qquad (*) \\ \bar{u}(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的平衡解,记它在平衡解 $\bar{u}(x)$ 处的线性化问题

$$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{\partial f(x, \bar{u}(x))}{\partial u} v = \lambda v \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的第一特征值为 λ_1, 相应特征函数 $\varphi_1(x) > 0$ $(x \in \Omega)$, 若 $\lambda_1 > 0$, 则 $\bar{u}(x)$ 是孤立平衡解(第七章中证明这个结论). 进一步利用定理 4.2.6 可证:

定理 若 $\lambda_1 > 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 当

$$|\varphi(x) - \bar{u}(x)| \leqslant \varepsilon\varphi_1(x) \quad (x \in \Omega)$$

时 $(*)$ 存在唯一解 $u(x,t)$,

$$\lim_{t\to+\infty} u(x, t) = \bar{u}(x)$$

证明 只须注意: 令 $\tilde{\psi} = \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi_1(x)$, $\underset{\sim}{\psi} = \bar{u}(x) - \varepsilon\varphi_1(x)$, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时,它们是有序上,下解,又 $\bar{u}(x)$ 是孤立平衡解. 即 $\varepsilon > 0$ 充分小时 $[\bar{u}(x) - \varepsilon\varphi_1(x), \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi_1(x)]$ 中只有唯一平衡解 $\bar{u}(x)$. 于是由定理 4.2.6 立即得结论.

在第十章中,利用抽象理论会得到比这个更强的结论.

因此,在平衡解稳定性问题的讨论中,对线性化特征值问题的研究是十分重要的.

习　题　四

4.1　证明定理 4.2.3。

4.2　设 $u(x)$，$v(x) \in C^1(\bar{\Omega})$，$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$，$v(x) > 0 (x \in \Omega)$，$\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} < 0$，证明：存在常数 $K > 0$，当 $x \in \bar{\Omega}$ 时

$$u(x) \leqslant Kv(x)$$

在习题 4.3—4.5 中，考察线性问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + c(x)u = f(x, t) & ((x, t) \in Q_\infty) \\ u = g(x, t) & ((x, t) \in S_\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (x \in \Omega) \end{cases} \tag{4-1}$$

它满足单调方法的条件。记 λ_0 是

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的主特征值，$\varphi_0(x) > 0$ $(x \in \Omega)$ 是相应的特征函数。

4.3　若 $g(x, t) \equiv 0$，$\lambda_0 > 0$，存在常数 $M > 0$，$r > 0$，使得 $|f(x, t)| \leqslant Me^{-rt}$。证明 (4-1) 存在唯一解 $u(x, t)$ 且满足 $|u(x, t)| \leqslant Ae^{-\alpha t}$，其中 A，α 为正的常数。

4.4　设存在正常数 M_1，M_2，r，β 使得

$$|f(x, t) - f_0(x)| \leqslant M_1 e^{-rt} \quad ((x, t) \in Q_\infty)$$

$$|g(x, t) - g_0(x)| \leqslant M_2 e^{-\beta t} \quad ((x, t) \in S_\infty)$$

又设对应的椭圆型边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f_0(x) \\ u|_{\partial\Omega} = g_0(x) \end{cases}$$

有解 $\bar{u}(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，若 $\lambda_0 > 0$，证明 (4-1) 存在唯一解 $u(x, t)$ 并满足

$$|u(x, t) - \bar{u}(x)| \leqslant Ae^{-\alpha t}$$

其中 A，α 为正的常数。

4.5　设 $f(x, t) \geqslant 0$ $((x, t) \in Q_\infty)$，$g(x, t) \geqslant 0$ $((x, t) \in S_\infty)$，$\varphi(x) \geqslant 0$，$\varphi(x) \not\equiv 0$。证明：若 $\lambda_0 < 0$，$u(x, t)$ 是 (4-1) 的解，则对 Ω 内任一闭子域，一致地有

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = +\infty$$

4.6　设有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda u-au^k & (0<x<\pi,\ t>0)\\ u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & (0<x<\pi)\end{cases} \tag{4-2}$$

其中 $a>0$，$k>1$ 为常数。

1° 证明：当 $\lambda>1$ 时，(4-2) 存在唯一正平衡解 $\bar{u}(x)$：$\bar{u}(x)>0$，$\bar{u}'(0)>0$，$\bar{u}'(\pi)<0$。

2° 证明：当 $\lambda>1$ 时对 $\forall\varphi(x)$，$\varphi(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\not\equiv 0$，(4-2) 存在唯一正解并满足

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t)=\bar{u}(x)\quad (x\in\Omega)$$

4.7 设 $f\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$，$f(0)=0$，$f'(0)<0$，证明：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u)\quad (x\in\mathbb{R}^n,\ t>0)$$

的零解在 X 中是局部渐近稳定的，其中

$$X=\{\varphi(x)\,|\,\varphi(x)\in C(\mathbb{R}^n),\ \varphi(x)\ \text{有界}\}$$

4.8 证明定理 4.3.12。

4.9 设 $u\geqslant 0$ 时 $f(u)$ 连续可微，$f(u)>0$，$\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{f(u)}$ 收敛。证明：对 $\forall\varphi(x)\in C(\mathbb{R}^n)$，有界且 $\varphi(x)\geqslant 0$，当 $\lambda>0$ 时初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+\lambda f(u)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

存在唯一解，其存在区间是有限的。

第五章 抛物型方程组和椭圆型方程组的比较方法及其应用

5.1 概 述

本章讨论弱耦合的反应扩散方程组的初边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_i u_i=f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m) \\ \qquad (x\in\Omega,\ t\in(0,T]) \\ B_i u_i=g_i(x,t)\quad (x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T]) \\ u_i(x,0)=\varphi_i(x)\quad (x\in\Omega) \\ \qquad (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}\tag{1.1}$$

"弱耦合"的意思是指方程式中只是函数的耦合，而没有导数的耦合。还讨论椭圆型方程组的边值问题：

$$\begin{cases}L_i u_i=f_i(x,u_1,\cdots,u_m) & (x\in\Omega) \\ B_i u_i=g_i(x) & (x\in\partial\Omega) \\ (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}\tag{1.2}$$

其中：

$\Omega\subset R^n$ 是有界开区域，$\partial\Omega$ 光滑（$\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$）；

$$L_i\equiv-\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}^{(i)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}b_j^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$-L_i$ 是Ω上的一致椭圆算子；

$$B_i u_i=u_i\tag{1.3}$$

或

$$B_i u_i=\frac{\partial u_i}{\partial n}+b_i(x)u_i\tag{1.4}$$

n 是 $\partial\Omega$ 的外法向。$b_i(x)\geqslant 0$ $(x\in\partial\Omega)$。

L_i, B_i 的系数以及 $g_i(x, t)$ $(g_i(x))$, $\varphi_i(x)$ 具有如第三章所指出的光滑性，并且

$$[g_i(x, 0)=\varphi_i(x)]_{\partial\Omega} \quad ([g_i(x)=\varphi_i(x)]_{\partial\Omega})$$

当边条件是 (1.3) 时，

$$\left[\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial n}+b_i(x)\varphi_i(x)=g_i(x, 0)\right]_{\partial\Omega}$$

$\left(\text{当边条件是 (1.4)时，}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}+b_i\varphi_i=g_i(x)\right]_{\partial\Omega}\right)$

为叙述简洁起见，我们只对 $m=2$ 的情形来叙述。

Σ 是 (u_1, u_2) 空间中的某个有界区域，$f_i(x, t, u_1, u_2)$ 在 $\bar{Q}_T\times\Sigma$ 上对 x, t 是 Hölder 连续，对 u_1, u_2 是 Lipschitz 的，即存在常数 $M>0$，对任意 (x, t), $(y, s)\in\bar{Q}_T=\bar{\Omega}\times[0\times T]$, $(x, y)\in(\bar{\Omega})$, (u_1, u_2), $(v_1, v_2)\in\Sigma$，有

$$\begin{aligned}&|f_i(x, t, u_1, u_2)-f_i(y, s, v_1, v_2)|\\&\quad\leqslant M[|u_1-v_1|+|u_2-v_2|+|x-y|^{\alpha}\\&\qquad+|t-s|^{\alpha/2}]\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}&(|f_i(x, u_1, u_2)-f_i(y, v_1, v_2)|\\&\quad\leqslant M[|u_1-v_1|+|u_2-v_2|+|x-y|^{\alpha}])\end{aligned}$$

以后在书写中常把 $f_i(x, t, u_1, u_2)$ 简写为 $f_i(u_1, u_2)$。

首先我们要把比较方法推广到方程组中去，建立比较与存在定理。象方程式那样构造迭代序列：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}+L_iu_i^{(k)}+Mu_i^{(k)}=f_i(x, t, u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)})\\\qquad+Mu_i^{(k-1)}\\B_iu_i^{(k)}=g_i(x, t)\\u_i^{(k)}(x, 0)=\varphi_i(x)\\(i=1, 2)\end{cases}\tag{1.6}$$

令 $w_i^{(k)}=u_i^{(k)}-u_i^{(k-1)}$，则

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w_1^{(k)}}{\partial t} + L_1 w_1^{(k)} + M w_1^{(k)} = M w_1^{(k-1)} \\
\qquad + f_1(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)}) - f_1(u_1^{(k-2)}, u_2^{(k-1)}) \\
\qquad + f_1(u_1^{(k-2)}, u_2^{(k-1)}) - f_1(u_1^{(k-2)}, u_2^{(k-2)}) \\
\dfrac{\partial w_2^{(k)}}{\partial t} + L_2 w_2^{(k)} + M w_2^{(k)} = M w_2^{(k-1)} \\
\qquad + f_2(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)}) - f_2(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-2)}) \\
\qquad + f_2(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-2)}) - f_2(u_1^{(k-2)}, u_2^{(k-2)}) \\
B_i w_i^{(k)} = 0,\ w_i^{(k)}(x, 0) = 0 \quad (i = 1, 2)
\end{cases}
$$

若 $w_1^{(k-1)} \geqslant 0(\leqslant 0)$，$w_2^{(k-1)} \geqslant 0(\leqslant 0)$，$f_1(u_1, u_2)$ 对 u_2 单调增加，$f_2(u_1, u_2)$ 对 u_1 单调增加，则

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w_i^{(k)}}{\partial t} + L_i w_i^{(k)} + M w_i^{(k)} \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \\
B_i w_i^{(k)} = 0,\ w_i^{(k)}(x, 0) = 0
\end{cases}
$$

于是 $w_1^{(k)} \geqslant 0(\leqslant 0)$，$w_2^{(k)} \geqslant 0(\leqslant 0)$。

若 $w_1^{(k-1)} \geqslant 0(\leqslant 0)$，$w_2^{(k-1)} \leqslant 0(\geqslant 0)$，$f_1(u_1, u_2)$ 对 u_2 单调减少，$f_2(u_1, u_2)$ 对 u_1 单调减少，则

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w_1^{(k)}}{\partial t} + L_1 w_1^{(k)} + M w_1^{(k)} \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \\
B_1 w_1^{(k)} = 0,\ w_1^{(k)}(x, 0) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w_2^{(k)}}{\partial t} + L_2 w_2^{(k)} + M w_2^{(k)} \leqslant 0 \quad (\geqslant 0) \\
B_2 w_2^{(k)} = 0,\ w_2^{(k)}(x, 0) = 0
\end{cases}
$$

于是 $w_1^{(k)} \geqslant 0(\leqslant 0)$，$w_2^{(k)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$。

因此，为使 $u_i^{(k)}$ 对 k 有单调性，我们要求 f_i 对 u_1，u_2 有某种单调性。

设 Σ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的子集，并有定义在 $\bar{Q}_T \times \Sigma$ 上的函数组

$$\{f_i(x, t, u_1, \cdots, u_m)\} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

定义 5.1.1 若 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$f_i$ 关于每个 $u_j (j \neq i)$ 都是单调增加(减少)，则称 f_i 是拟单调增加（减少）的，简称为拟增(减)。若 f_i 关于每个 $u_j (j \neq i)$ 是单调的，则称 f_i 是拟单调的。若

f_i 是拟单调的，但不是拟增也不是拟减，则称之为是混拟单调的。

定义 5.1.2 若对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$f_i$ 都是拟单调的，或都是拟单调增加的，或都是拟单调减少的，则分别称函数组 $\{f_i\}$ 是拟单调的，拟单调增加的，拟单调减少的。若 $\{f_i\}$ 是拟单调的，但不是拟增的，也不是拟减的，则称之为混拟单调的。

定义 5.1.3 若 $\{f_i\}$ 不是拟单调的，则称为非拟单调的。

上面的分析指出：按 (1.6) 的格式进行迭代，函数组 $\{f_i\}$ $(i=1, 2)$ 的拟增或拟减对保证迭代序列的单调性起着极为重要的作用。

我们还要讨论怎样把比较方法推广到混拟单调与非拟单调的情形中去。

在迭代过程中另一重要的问题是选取迭代初值，这就要引进上下解概念。当 $\{f_i\}$ 具有不同的拟单调性（拟增的，或拟减的，或混拟单调的）时，上下解的定义将是不同的，这是方程组比较方法的另一特点。

本章的重点是上、下解的定义与迭代格式，以及对具体问题如何找上、下解。至于迭代序列的存在性，单调性与收敛性的证明与第三章类似，主要是利用线性方程式的最大值原理与线性方程式的解的存在性与正则性理论，对此在本章中就不再说明了。我们还将举例说明怎样利用上、下解讨论平衡解的稳定性问题。

5.2 拟单调增加和拟单调减少情形的比较方法

5.2.1 上、下解的定义与迭代格式

设 (1.1) 是拟单调增加或减少的，我们将定义 (1.1) 的上解 $U(x, t)=(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 和下解 $V(x, t)=(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$，它们至少与 (1.1) 的古典解有相同的光滑性。引进上、下解是为了利用它作为迭代初值 $u_i^{(0)}$ 使得以 (1.6) 为迭代格式时有

$$w_i^{(1)}=u_i^{(1)}-u_i^{(0)} \geqslant 0(\leqslant 0) \quad (i=1, 2)$$

（拟单调增加情形）

或
$$w_1^{(1)} = u_1^{(1)} - u_1^{(0)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$$
$$w_2^{(0)} = u_2^{(1)} - u_2^{(0)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$$
（拟单调减少情形）

于是我们给出下面的定义.

定义 5.2.1 设 $U(x,t)=(\tilde{u}_1(x,t),\ \tilde{u}_2(x,t))$, $V(x,t)=(\underset{\sim}{u}_1(x,t),\ \underset{\sim}{u}_2(x,t))$,满足:

$$B_i\tilde{u}_i - g_i(x,t) \geqslant 0 \geqslant B_i\underset{\sim}{u}_i - g_i(x,t)$$
$$(x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T]) \tag{2.1}$$
$$\tilde{u}_i(x,0) \geqslant \varphi_i(x) \geqslant \underset{\sim}{u}_i(x,0) \quad (x\in\bar{\Omega})$$

1° 若 $\{f_i\}$ 是拟单调增加的,满足

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial t} + L_i\tilde{u}_i - f_i(x,t,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \frac{\partial\underset{\sim}{u}_i}{\partial t} + L_i\underset{\sim}{u}_i - f_i(x,t,\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2) \qquad (x\in\Omega,\ t\in(0,T])$$

则称 U,V 为 (1.1) 的上解和下解.

2° 若 $\{f_i\}$ 是拟单调减少的,满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t} + L_1\tilde{u}_1 - f_1(x,t,\tilde{u}_1,\underset{\sim}{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \dfrac{\partial\underset{\sim}{u}_1}{\partial t} \\ \qquad + L_1\underset{\sim}{u}_1 - f_1(x,t,\underset{\sim}{u}_1,\tilde{u}_2) \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t} + L_2\tilde{u}_2 - f_2(x,t,\underset{\sim}{u}_1,\tilde{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \dfrac{\partial\underset{\sim}{u}_2}{\partial t} \\ \qquad + L_2\underset{\sim}{u}_2 - f_2(x,t,\tilde{u}_1,\underset{\sim}{u}_2) \qquad (x\in\Omega,\ t\in(0,T]) \end{cases}$$

则称 U, V 为 (1.1) 的上解和下解.

对 (1.2) 我们有类似的定义.

定义 5.2.2 设 $U(x)=(\tilde{u}_1(x),\ \tilde{u}_2(x))$, $V(x)=(\underset{\sim}{u}_1(x),\ \underset{\sim}{u}_2(x))$ 满足

$$B_i\tilde{u}_i - g_i(x) \geqslant 0 \geqslant B_i\underset{\sim}{u}_i - g_i(x) \qquad (x\in\partial\Omega)$$

1° 若 $\{f_i\}$ 是拟单调增加的,满足

$$L_i\tilde{u}_i - f_i(x,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \geqslant 0 \geqslant L_i\underset{\sim}{u}_i - f_i(x,\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2)$$
$$(x\in\Omega,\ i=1,2)$$

则称 U,V 是 (1.2) 的上解和下解.

2° 若 $\{f_i\}$ 是拟单调减少的,满足

$$L_1\tilde{u}_1 - f_1(x, \tilde{u}_1, \underline{u}_2) \geqslant 0 \geqslant L_1\underline{u}_1 - f_1(x, \underline{u}_1, \tilde{u}_2) \quad (x \in \Omega)$$
$$L_2\tilde{u}_2 - f_2(x, \underline{u}_1, \tilde{u}_2) \geqslant 0 \geqslant L_2\underline{u}_2 - f_2(x, \tilde{u}_1, \underline{u}_2)$$

则称 U, V 是 (1.2) 的上解和下解.

现在我们假定:

1° (1.1) ((1.2)) 存在有序的上、下解

$$V(x, t) \leqslant U(x, t)$$
$$(V(x) \leqslant U(x))$$

2° 令

$$\textstyle\sum_V^U = \{u \mid u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2,$$
$$V(x, t) \leqslant u \leqslant U(x, t),\ (x, t) \in \overline{Q}_T\}$$
$$(\textstyle\sum_V^U = \{u \mid u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$$
$$V(x) \leqslant u \leqslant U(x),\ x \in \overline{\Omega}\})$$

$\{f_1, f_2\}$在 $\sum_V^U$ 上拟单调增加或拟单调减少。在$Q_T \times \sum_V^U$上(1.5)成立。

当 $\{f_i\}$ 在 $\sum_V^U$ 拟单调增加时,令

$$(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2),\ (\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_i^{(k)}}{\partial t} + L_i\bar{u}_i^{(k)} + M\bar{u}_i^{(k)} = M\bar{u}_i^{(k-1)} \\ \qquad\qquad + f_i(x, t, \bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\ B_i\bar{u}_i^{(k)}|_{\partial\Omega\times(0,T]} = g_i(x, t) \\ \bar{u}_i^{(k)}(x, 0) = \varphi_i(x) \quad (x \in \overline{\Omega}) \quad (i = 1, 2) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{u}_i^{(k)}}{\partial t} + L_i\underline{u}_i^{(k)} + M\underline{u}_i^{(k)} = M\underline{u}_i^{(k-1)} \\ \qquad\qquad + f_i(x, t, \underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) \\ B_i\underline{u}_i^{(k)}|_{\partial\Omega\times(0,T]} = g_i(x, t) \\ \underline{u}_i^{(k)}(x, 0) = \varphi_i(x) \quad (x \in \overline{\Omega}) \quad (i = 1, 2) \end{cases} \tag{2.3}$$

由此确定了

$$\overline{U}^{(k)} = (\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}),\ \underline{V}^{(k)} = (\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$$
$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$

令 $w_i^{(0)} = \bar{u}_i^{(1)} - \bar{u}_i^{(0)} = \bar{u}_i^{(1)} - \tilde{u}_i$, 由上解定义得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t}+L_i w_i^{(0)}+M w_i^{(0)}\leqslant 0\\ B_i w_i^{(0)}\big|_{\partial\Omega\times(0,T]}\leqslant 0,\ w_i^{(0)}(x,0)\leqslant 0\end{cases}$$

于是 $w_i^{(0)}(x,t)\leqslant 0(i=1,2)$. 同理可证

$$\underline{u}_i^{(1)}-\underline{u}_i^{(0)}\geqslant 0\quad(i=1,2)$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\underline{u}_i&\leqslant \underline{u}_i^{(1)}\leqslant \underline{u}_i^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant \underline{u}_i^{(k)}\leqslant \bar{u}_i^{(k)}\\&\leqslant\cdots\leqslant \bar{u}_i^{(2)}\leqslant \bar{u}_i^{(1)}\leqslant \tilde{u}_i\quad(i=1,2)\end{aligned}\tag{2.4}$$

当 $\{f_i\}$ 是拟单调减少时，令

$$(\bar{u}_1^{(0)},\underline{u}_2^{(0)})=(\tilde{u}_1,\underline{u}_2),\ (\underline{u}_1^{(0)},\bar{u}_2^{(0)})=(\underline{u}_1,\tilde{u}_2)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t}+L_1\bar{u}_1^{(k)}+M\bar{u}_1^{(k)}=M\bar{u}_1^{(k-1)}\\ \qquad +f_1(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)},\underline{u}_2^{(k-1)})\\ \dfrac{\partial \underline{u}_2^{(k)}}{\partial t}+L_2\underline{u}_2^{(k)}+M\underline{u}_2^{(k)}=M\underline{u}_2^{(k-1)}\\ \qquad +f_2(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)},\underline{u}_2^{(k-1)})\\ B_1\bar{u}_1^{(k)}\big|_{\partial\Omega\times(0,T]}=g_1(x,t)\\ B_2\underline{u}_2^{(k)}\big|_{\partial\Omega\times(0,T]}=g_2(x,t)\\ \bar{u}_1^{(k)}(x,0)=\varphi_1(x),\ \underline{u}_2^{(k)}(x,0)=\varphi_2(x)\quad(x\in\bar{\Omega})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \underline{u}_1^{(k)}}{\partial t}+L_1\underline{u}_1^{(k)}+M\underline{u}_1^{(k)}=M\underline{u}_1^{(k-1)}\\ \qquad +f_1(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)},\bar{u}_2^{(k-1)})\\ \dfrac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t}+L_2\bar{u}_2^{(k)}+M\bar{u}_2^{(k)}=M\bar{u}_2^{(k-1)}\\ \qquad +f_2(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)},\bar{u}_2^{(k-1)})\\ B_1\underline{u}_1^{(k)}\big|_{\partial\Omega\times(0,T]}=g_1(x,t)\\ B_2\bar{u}_2^{(k)}\big|_{\partial\Omega\times(0,T]}=g_2(x,t)\\ \underline{u}_1^{(k)}(x,0)=\varphi_1(x),\ \bar{u}_2^{(k)}(x,0)=\varphi_2(x)\quad(x\in\bar{\Omega})\end{cases}$$

由此可确定 $(\bar{u}_1^{(k)},\underline{u}_2^{(k)})$ 和 $(\underline{u}_1^{(k)},\bar{u}_2^{(k)})$，它们也满足(2.4).

因此，在 $\{f_i\}$ 是拟增的情形下，存在极限

$$\lim_{k\to+\infty}(\bar{u}_1^{(k)},\bar{u}_2^{(k)})=(\bar{u}_1(x,t),\bar{u}_2(x,v))=\bar{u}(x,t)\tag{2.5}$$

$$\lim_{k\to+\infty}(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) = (\underline{u}_1(x,t), \underline{u}_2(x,t)) = \underline{u}(x,t)$$

可以证明它们是 (1.1) 的解而且满足

$$(\underline{u}_1(x,t), \underline{u}_2(x,t)) = \underline{u}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t)$$
$$\leqslant \bar{u}(x,t) \leqslant \tilde{u}(x,t) = (\tilde{u}_1(x,t), \tilde{u}_2(x,t)) \quad ((x,t) \in \bar{Q}_T)$$

在 $\{f_i\}$ 是拟减情形下，也存在极限

$$\lim_{k\to+\infty}(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) = (\bar{u}_1, \underline{u}_2) = \hat{u}(x,t)$$
$$\lim_{k\to+\infty}(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) = (\underline{u}_1, \bar{u}_2) = \check{u}(x,t)$$

它们也是 (1.1) 的解，而且

$$\underline{u}(x,t) \leqslant \check{u}(x,t),\ \hat{u}(x,t) \leqslant \tilde{u}(x,t) \quad ((x,t) \in \bar{Q}_T)$$

到此，解的存在性定理已经得到. 这里寻找 (1.1) 的上、下解是关键. 由定义知道，对于拟增情形，上解与下解是独立的，它们可以分别被确定. 而对于拟减情形，上解 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 与下解 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是有联系的，但 $(\tilde{u}_1, \underline{u}_2)$ 与 $(\underline{u}_1, \tilde{u}_2)$ 是相互独立的，它们可以分别被确定.

5.2.2 抛物型方程组的最大值原理

为了讨论抛物型方程组初边值问题解的唯一性并建立比较原理，我们先建立抛物型方程组的最大值原理.

给定 m 个一致抛物算子

$$\mathscr{L}_i = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}^{(i)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(i)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (i = 1,\cdots,m)$$

和 m 阶矩阵函数

$$H(x,t) = (h_{ij}(x,t)) \quad (i,j = 1,2,\cdots,m)$$

现在对下列弱耦合抛物不等式组

$$\mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij}u_j \leqslant 0\ (\geqslant 0) \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

建立最大值原理。

我们总是假设 $a_{kl}^{(i)}$, $b_k^{(i)}$, h_{ij} 在 $\overline{Q}_T$ 上连续(实际上只须要求 h_{ij} 在 $\overline{Q}_T$ 上有界),边条件中的 $b_i(x) \geqslant 0$ 且连续。$u(x, t) = (u_1(x, t), \cdots, u_m(x, t))$。

引理 5.2.3 设 $u_i(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$。若

1°
$$h_{ij} \leqslant 0 \quad (j \neq i, i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

2°
$$\mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j < 0 \ (> 0)$$
$$((x, t) \in Q_T, i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.6}$$

3° 当 $x \in \overline{\Omega}$ 时
$$u(x, 0) < 0 \ (> 0)$$

4° $u(x, t)|_{\partial\Omega \times (0,T)} < 0 \ (> 0)$ 或
$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial n} + b_i(x) u_i\right]_{\partial\Omega \times (0,T)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$$

$(i = 1, 2, \cdots, m)$。则
$$u(x, t) < 0 \ (>0) \ ((x, t) \in Q_T)$$

证明 令 $u_i = v_i e^{\alpha t}$, 常数 $\alpha > 0$ 待定. 由 (2.6) 得
$$\mathscr{L}_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \tilde{h}_{ij} v_j < 0 \ ((x, t) \in Q_T, \ (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.7}$$

其中
$$\tilde{h}_{ii} = h_{ii} + \alpha > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$
$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, \cdots, m) \tag{2.8}$$

令 $v(x, t) = (v_1, \cdots, v_m)$, 因为 $v(x, 0) = u(x, 0) < 0 (x \in \overline{\Omega})$, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant t \leqslant \delta$ 时 $v(x, t) < 0$。令
$$A = \{t | t \leqslant T, \text{ 对 } \forall x \in \Omega, \ 0 \leqslant s \leqslant t, \text{ 有 } v(x, s) < 0\}$$

则存在

$$\bar{t}=\sup A$$

且 $0<\bar{t}\leqslant T$。

若引理的结论不对，则

$$v(x,t)\leqslant 0\ \left((x,t)\in Q_{\bar{t}}\right)$$

并存在 $\bar{x}\in\bar{\Omega}$，使得 v 的某分量 v_i 有

$$v_i(\bar{x},\bar{t})=0$$

若 $\bar{x}\in\Omega$，因 v_i 在 $(\bar{x},\bar{t})$ 取到 $Q_{\bar{t}}$ 上的最大值，于是

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}\geqslant 0,\quad \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}=0$$

$$\left.\Sigma a_{kj}^{(i)}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_j}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}\leqslant 0$$

即 $\mathscr{L}_i v_i|_{(\bar{x},\bar{t})}\geqslant 0$。另一方面 $v_j(\bar{x},\bar{t})\leqslant 0$，$v_i(\bar{x},\bar{t})=0$，由(2.8)得

$$\left[\mathscr{L}_i v_i+\sum_{j=1}^{m}\tilde{h}_{ij}v_j\right]\Big|_{(\bar{x},\bar{t})}\geqslant 0$$

与 (2.7) 式矛盾。若 $\bar{x}\in\partial\Omega$ 且 $v_i(x,\bar{t})<0\ (x\in\Omega)$。于是 $v_i(\bar{x},\bar{t})=\max v_i(x,t)$，在 $Q_{\bar{t}}$ 上 $v_i(x,t)<0=v_i(\bar{x},\bar{t})$，

$$0>\mathscr{L}_i v_i+\tilde{h}_{ii}v_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}h_{ij}v_j\geqslant\mathscr{L}_i v_i+\tilde{h}_{ii}v_i$$

由方程式的导数形式的强最大值原理得

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial n}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}>0$$

与假设条件

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial n}+b_i(x)v_i\right]_{(\bar{x},\bar{t})}=\left.\frac{\partial v_i}{\partial n}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}\leqslant 0$$

矛盾。因此，$v(x,t)<0$，即 $u(x,t)<0((x,t)\in Q_T)$。证毕。

定理 5.2.4 设 $u\in C(\bar{Q}_T)$，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$，在 Q_T 内满足

$$\mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j \leqslant 0 \ (\geqslant 0) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

(2.9)

又

$$h_{ij} \leqslant 0 \ (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, m) \qquad (2.10)$$

若 $x \in \Omega$ 时 $u(x, 0) \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$，$B_i u_i|_{\partial\Omega\times(0,T)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$ $(i = 1, \cdots, m)$，则

1° 在 Q_T 内 $u \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$；

2° 若在 $(x_0, t_0) \in Q_T$，$u_\mu(x_0, t_0) = 0$，则对任意 $(x, t) \in \bar{Q}_{t_0}$ 有 $u_\mu(x, t) = 0$。

证明 1° 因 h_{ij} 有界，故存在常数 $\beta > 0$ 使得

$$\beta + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m, (x, t) \in Q_T)$$

令 $v_i = u_i - \varepsilon e^{\beta t}$，则

$$\mathscr{L}_i v_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} v_j = \mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j$$

$$- \varepsilon e^{\beta t} \left[\beta + \sum_{j=1}^{m} h_{ij}\right] < 0$$

$v(x, 0) = (v_1, \cdots, v_m)|_{t=0} < 0$。故由引理 5.2.3 得

$$v < 0 \ ((x, t) \in Q_T)$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$u \leqslant 0 \ ((x, t) \in Q_T)$$

证明 2° 在 Q_T 中

$$0 \geqslant \mathscr{L}_\mu u_\mu + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j = \mathscr{L}_\mu u_\mu + h_{\mu\mu} u_\mu$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} h_{\mu j} u_j \geqslant \mathscr{L}_\mu u_\mu + h_{\mu\mu} u_\mu$$

令 $u_\mu = v_\mu e^{\alpha t}$，取 α 使 $\alpha + h_{\mu\mu} \geqslant 0$，得

$$0 \geqslant \mathscr{L}_\mu v_\mu + (\alpha + h_{\mu\mu}) v_\mu$$

于是由抛物型方程式的强最大值原理得结论。证毕。

同样我们可以得到导数形式的强最大值原理，即

定理 5.2.5 设在 Q_T 中 (2.9) 式成立，H 满足 (2.10)，$u \leqslant 0$ ($\geqslant 0$)。又设 u 的某个分量 u_r 在 $P \in \partial\Omega \times (0, T]$ 处有 $u_r(P) = 0$，在 Q_T 中存在球 B，B 与 $\partial\Omega \times (0, T]$ 在 P 点相切，并且在 B 中 $u_r < 0$ (> 0)。则

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial n}\right|_P > 0 \ (<0)$$

其中 n 表示 P 点处的外法向。

为了把这些结果推广到有非负最大值M的函数 u 上去，只要把同样的方法用到 $V = (u_1 - M, \cdots, u_m - M)$ 上去即可，不过这时还要求H满足

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.11}$$

记 $\vec{M} = (M, M, \cdots, M)$，则有

定理 5.2.6 设 u 满足 (2.9)；$u(x, 0) \leqslant \vec{M}$ $(x \in \Omega)$；$u(x, t)|_{\partial\Omega\times(0,T]} \leqslant \vec{M}$ 或 $\left[\frac{\partial u_i}{\partial n} + b_i(x)u_i\right]_{\partial\Omega\times(0,T]} \leqslant 0$ $(i = 1, \cdots, m)$，H满足(2.10)和(2.11)。

1° 若 $\vec{M} \geqslant \theta$，则在 Q_T 上 $u \leqslant \vec{M}$；

2° 若在内点 $(x_0, t_0) \in Q_T$ 处 $u_r(x_0, t_0) = M$，则在 $\bar{Q}_{t_0}$ 上 $u_r \equiv M$；

3° 若在定理 2.5.2 所述边界点 P 处，$u_r(P) = M$，且在球 $B \subset Q_T$ 中 $u_r < M$，则

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial n}\right|_P > 0$$

注 因为 h_{ij} 有界，通过函数替换

$$v_i = u_i e^{-\alpha t} \ (\alpha > 0)$$

对 v_i 有

$$\mathscr{L}_i v_i + (h_{ii} + \alpha)v_i + \sum_{j(\neq i)=1}^{m} h_{ij} v_j \leqslant 0$$

只要选 $\alpha > 0$ 充分大，则对于

$$\tilde{h}_{ii} = h_{ii} + \alpha,\ \tilde{h}_{ij} = h_{ij}\ (i \neq j)$$

必有

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{h}_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

下面举出最大值原理不成立的例子.

例 1 设有强耦合不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \leqslant 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 9\dfrac{\partial u_1}{\partial x} \leqslant 0 \\ ((x,t) \in Q_1 = (0,1] \times (0,1]) \end{cases}$$

易验算

$$\begin{cases} u_1 = -e^{x+t} \\ u_2 = t - 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

满足上述不等式组且有

$$\begin{cases} u|_{t=0} = (u_1, u_2)|_{t=0} \leqslant 0 \ (x \in [0, 1]) \\ u|_{x=0,1} \leqslant 0 \ (t \in (0, 1]) \end{cases}$$

但

$$u_2|_{x=\frac{1}{2}} = t \geqslant 0$$

因而不可能有最大值原理.

例 2 考虑不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \leqslant 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_1(u_2^2 + 9) \leqslant 0 \end{cases}$$

显然，例 1 中的 u_1, u_2 满足上述不等式 $\left(注意到\ u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)$，因而最大值原理不成立.

事实上，例 1 中的 u_1, u_2 还满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\leqslant 0\\[2mm]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+9u_1\leqslant 0
\end{cases}
$$

因而对这个不等式组，最大值原理也不成立。这时 $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0$，而 $h_{21}=9>0$。不满足条件 (2.10)。

例 2 说明了以上建立的弱耦合抛物不等式组的最大值原理只是一种很特殊的情形，对于一般的弱耦合情形不一定有最大值原理，即使是线性弱耦合的情形，若不满足条件 (2.10) 也不一定有最大值原理。

5.2.3 抛物型方程组初边值问题解的存在唯一性定理与椭圆型边值问题解的存在性定理

定理 5.2.7 设 $U(x,t)$，$V(x,t)$ 分别是 (1.1) 的上、下解，$V(x,t)\leqslant U(x,t)$，$\{f_1,f_2\}$ 在 $\sum_V^U$ 是拟增或拟减的，则 (1.1) 在 $[V(x,t),U(x,t)]$ 中存在唯一解 $u(x,t)$。

证明 1° 先对拟增情形给出证明。

在 (2.5) 中给出的 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$，均满足 (1.1)。先证 $\bar{u}=\underline{u}$。

令 $w_1=\bar{u}_1-\underline{u}_1$，$w_2=\bar{u}_2-\underline{u}_2$，由 $\bar{u}=(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$，$\underline{u}=(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$ 满足的方程得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_i}{\partial t}+L_iw_i&=f_i(\bar{u}_1,\bar{u}_2)-f_i(\underline{u}_1,\underline{u}_2)\\
&=f_i(\bar{u}_1,\bar{u}_2)-f_i(\bar{u}_1,\underline{u}_2)+f_i(\bar{u}_1,\underline{u}_2)-f_i(\underline{u}_1,\underline{u}_2)\\
&\leqslant M(\bar{u}_2-\underline{u}_2)+M(\bar{u}_1-\underline{u}_1)=M(w_1+w_2)
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w_1}{\partial t}+L_1w_1-M(w_1+w_2)\leqslant 0\\[2mm]
\dfrac{\partial w_2}{\partial t}+L_2w_2-M(w_1+w_2)\leqslant 0\\[2mm]
B_1w_1=0,\ B_2w_2=0\\
w_1(x,0)=0,\ w_2(x,0)=0
\end{cases}
$$

由定理 5.2.4 得 $w_1 \leqslant 0$，$w_2 \leqslant 0$，即 $\bar{u}_1 \leqslant \underline{u}_1$，$\bar{u}_2 \leqslant \underline{u}_2$. 又已知 $\bar{u}_1 \geqslant \underline{u}_1$，$\bar{u}_2 \geqslant \underline{u}_2$，因此 $\bar{u}_1 = \underline{u}_1$，$\bar{u}_2 = \underline{u}_2$. 令

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i = \underline{u}_i \quad (i = 1, 2)$$

则 $u(x, t) = (u_1, u_2)$ 是 (1.1) 的解.

现设 $u^*(x, t)$ 是 (1.1) 的任意一个解，满足

$$V \leqslant u^* \leqslant U$$

则 U，u^* 是 (1.1) 的一对上、下解. 由 (2.2)，(2.3) 确定的迭代序列记为 T^kU，T^ku^*. 前面已证

$$\lim_{k\to+\infty} T^k u^* = \lim_{k\to+\infty} T^k U = u(x, t)$$

但 $T^k u^* = u^*(x, t)$，故 $u^* = u$，证毕.

证明 2° 对于拟减情形类似可证.

对于椭圆型边值问题 (1.2) 我们可以类似地得到解的存在性定理，但不一定有唯一性. 可以证明:

定理 5.2.8 设 $U(x)$，$V(x)$ 是(1.2)的一对上、下解，$U(x) \geqslant V(x)$，若 $\{f_1, f_2\}$ 在 $\sum_V^U$ 是拟单调增加的，则 (1.2) 存在最大解 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 和最小解 $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$，使得

$$V(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \bar{u}(x) \leqslant U(x)$$

若 $\{f_1, f_2\}$ 在 $\sum_V^U$ 是拟单调减少的，则 (1.2) 存在解 $\hat{u} = (\bar{u}_1, \underline{u}_2)$，$\check{u} = (\underline{u}_1, \bar{u}_2)$ 并满足

$$V(x) \leqslant \hat{u}(x), \ \check{u}(x) \leqslant U(x)$$

若 (1.2) 还有解 $u(x)$ 满足

$$V(x) \leqslant u(x) \leqslant U(x)$$

则

$$(\underline{u}_1(x), \underline{u}_2(x)) \leqslant u(x) \leqslant (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$$

5.2.4 抛物型方程组的比较原理与上、下解的有序性

定理 5.2.9 设 $\{f_1, f_2\}$ 在 $\sum$ 上拟单调增加或减少，$\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} \in C(\bar{Q}_T \times \sum)$ $(i = 1, 2)$；$U(x, t) = (U_1, U_2)$，$V(x, t) = (V_1, V_2) \in C(\bar{Q}_T)$；当 $(x, t) \in \bar{Q}_T$ 时 U，$V \in \sum$；又 $U(x, 0) \geqslant V(x,$

$0)$ $(x\in\bar{\Omega})$; $B_iU_i\geqslant B_iV_i$ $(x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T])$ $(i=1,2)$，若 $\{f_1,f_2\}$ 是拟增时，

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+L_iU_i-f_i(x,t,U_1,U_2)$$

$$\geqslant\frac{\partial V_i}{\partial t}+L_iV_i-f_i(x,t,V_1,V_2)$$

$$((x,t)\in Q_T)$$

若 $\{f_1,f_2\}$ 是拟减时

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}+L_1U_1-f_1(x,t,U_1,V_2)$$

$$\geqslant\frac{\partial V_1}{\partial t}+L_1V_1-f_1(x,t,V_1,U_2)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}+L_2U_2-f_2(x,t,V_1,U_2)$$

$$\geqslant\frac{\partial V_2}{\partial t}+L_2V_2-f_2(x,t,U_1,V_2)$$

$$((x,t)\in Q_T)$$

则

1° $V(x,t)\leqslant U(x,t)$ $((x,t)\in\bar{Q}_T)$.

2° 当 $V_i(x,0)\not\equiv U_i(x,0)$ 时有 $V_i(x,t)<U_i(x,t)$ $((x,t)\in Q_T)$.

证明　设 $\{f_1,f_2\}$ 是拟增的.

令 $W_i=U_i-V_i(i=1,2)$. 由假设条件得

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}+L_iW_i\geqslant f_i(U_1,U_2)-f_i(V_1,V_2)$$

$$=h_{i1}(x,t)W_1+h_{i2}(x,t)W_2$$

其中

$$h_{ij}=\int_0^1\frac{\partial f_i(V_1+s(U_1-V_1),V_2+s(U_2-V_2))}{\partial u_j}ds$$

又

$$W_i(x,0)\geqslant 0,\ B_iW_i\geqslant 0\ (i=1,2)$$

因为 f_i 拟增，所以在 Σ 上 $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\geqslant 0$ $(i\neq j)$. 于是由定理 5.2.4 得

$W_i \geqslant 0\ (i=1,2)$，即 $U_i \geqslant V_i\ (i=1,2)$。同样利用定理 5.2.4 可得另一结论。

对于拟减情形类似可证。证毕。

推论 5.2.10 设 $\{f_1, f_2\}$ 在$\sum$上拟增或拟减。$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \in C(\bar{Q}_T \times \sum)$。当 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时 $U(x,t)$，$V(x,t) \in \sum$是 (1.1) 的一对上、下解。则定理 5.2.9 的结论成立，即它们一定是有序的。

在实际应用中我们常讨论正解(即非负解)的存在唯一性。

推论 5.2.11 设 $\{f_1, f_2]$ 在 $\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \bar{\mathbb{R}}^1_+$ 是拟增或拟减的。$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \in C(\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+)$。又 (1.1) 存在非负上、下解 $U(x,t)$，$V(x,t)$。则 (1.1) 存在唯一正解 $u(x,t)$，它满足

$$V(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant U(x,t)$$

证明 设 $\{f_1, f_2\}$ 是拟增的。解的存在性由定理 5.2.5 得到。若 (1.1) 有两个正解 $u(x,t)$ 与 $v(x,t)$。则 u，v 是 (1.1) 的上、下解。v，u 也是 (1.1) 的上、下解。由推论 5.2.10 得 $u(x,t)=v(x,t)$。

若 $\{f_1, f_2\}$ 是拟减的。解的存在性仍由定理 5.2.9 得到。现设 (1,1) 有两个正解 (w_1, w_2)，(w_1^*, w_2^*)。在任意给定的 $\bar{Q}_T$ 上有共同上界 M_0。对 (1.1) 作变换

$$v_1 = u_1.\quad v_2 = M_0 - u_2$$

得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_1}{\partial t} + L_1 v_1 = f_1(v_1, M_0 - v_2)\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + L_2 v_2 = -f_2(v_1, M_0 - v_2)\\ B_1 v_1 = g_1,\quad B_2 v_2 = b_i(x) M_0 - g_2(x,t)\\ v_1(x,0) = \varphi_1(x),\quad v_2(x,0) = M_0 - \varphi_2(x)\end{cases}$$

它在 $\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times [0, M]$ 上是拟增的。$(w_1, M_0 - w_2)$ 与 $(w_1^*, M_0\ w_2^*)$ 是它的解。于是

$$w_1 = w_1^*,\ M_0 - w_2 = M_0 - w_2^*$$

因此，$(w_1, w_2)=(w_1^*, w_2^*)$，证毕。

5.3 混拟单调情形的比较方法

为了确定起见，我们假定：在 $\sum$ 上 f_1 是拟单调减少的，f_2 是拟单调增加的。

按迭代格式 (1.6) 每迭代一次确定一对函数，它不适用于混拟单调情形。现在改变迭代格式，使之每迭代一次必须同时确定四个函数：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t}+L_1\bar{u}_1^{(k)}+M\bar{u}_1^{(k)}=M\bar{u}_1^{(k-1)} \\
\qquad +f_1(x, t, \bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) \\
\dfrac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t}+L_2\bar{u}_2^{(k)}+M\bar{u}_2^{(k)} \\
\quad =M\bar{u}_2^{(k-1)}+f_2(x, t, \bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\
\dfrac{\partial \underline{u}_1^{(k)}}{\partial t}+L_1\underline{u}_1^{(k)}+M\underline{u}_1^{(k)} \\
\quad =M\underline{u}_1^{(k-1)}+f_1(x, t, \underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}) \\
\dfrac{\partial \underline{u}_2^{(k)}}{\partial t}+L_2\underline{u}_2^{(k)}+M\underline{u}_2^{(k)} \\
\quad =M\underline{u}_2^{(k-1)}+f_2(x, t, \underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}) \\
[B_i\bar{u}_i^{(k)}=g_i(x, t)]_{\partial\Omega\times(0,T]} \\
[B_i\underline{u}_i^{(k)}=g_i(x, t)]_{\partial\Omega\times(0,T]} \quad (i=1, 2) \\
\bar{u}_i(x, 0)=\varphi_i(x), \ \underline{u}_i(x, 0)=\varphi_i(x) \\
\qquad\qquad (x\in\bar{\Omega}, i=1, 2)
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

这样的迭代格式可以保证：若 $\bar{u}_i^{(1)}\leqslant\bar{u}_i^{(0)}$，$\underline{u}_i^{(1)}\geqslant\underline{u}_i^{(0)}$，则 $\bar{u}_i^{(k)}$ 单调下降，$\underline{u}_i^{(k)}$ 单调上升。（证明与 §5.1 类似。）

为了选取初值，我们引进上、下解 $U(x, t)$ 与 $V(x, t)$。它至少与 (1.1) 的古典解有相同的光滑性。

定义 5.3.1 设 $U(x, t)=(\tilde{u}_1(x, t), \tilde{u}_2(x, t))$，$V(x, t)=(\underline{u}_1(x, t), \underline{u}_2(x, t))$ 满足 (2.1)。若 f_1 是拟单调减少的，f_2 是拟

单调增加的，并且当 $(x, t) \in Q_T$ 时

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + L_1\tilde{u}_1 - f_1(x, t, \tilde{u}_1, \underset{\sim}{u}_2) \geqslant 0$$

$$\geqslant \frac{\partial \underset{\sim}{u}_1}{\partial t} + L_1\underset{\sim}{u}_1 - f_1(x, t, \underset{\sim}{u}_1, \tilde{u}_2)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} + L_2\tilde{u}_2 - f_2(x, t, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \geqslant 0$$

$$\geqslant \frac{\partial \underset{\sim}{u}_2}{\partial t} + L_2\underset{\sim}{u}_2 - f_2(x, t, \underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)$$

则称 U, V 为 (1.1) 的上解和下解。

若 (1.2) 是混拟单调的。我们也可类似引进上解和下解。现在若取初值

$$(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$
$$(\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)$$

按 (3.1) 进行迭代，则必有

$$\bar{u}_i^{(1)} \leqslant \bar{u}_i^{(0)}, \quad \underline{u}_i^{(1)} \geqslant \underline{u}_i^{(0)}$$

从而有

$$\underset{\sim}{u}_i \leqslant \underline{u}_i^{(1)} \leqslant \underline{u}_i^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}_i^{(k)} \leqslant \bar{u}_i^{(k)} \leqslant \cdots$$
$$\leqslant \bar{u}_i^{(2)} \leqslant \bar{u}_i^{(1)} \leqslant \tilde{u}_i$$

于是存在极限：

$$\left.\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \bar{u}_i^{(k)} &= \bar{u}_i(x, t)\\ \lim_{k\to+\infty} \underline{u}_i^{(k)} &= \underline{u}_i(x, t)\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

它们满足：$\bar{u}_i \geqslant \underline{u}_i (i = 1, 2)$，而且

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + L_1\right)\bar{u}_1 = f_1(x, t, \bar{u}_1, \underline{u}_2)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + L_2\right)\bar{u}_2 = f_2(x, t, \bar{u}_1, \bar{u}_2)\\ \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + L_1\right)\underline{u}_1 = f_1(x, t, \underline{u}_1, \bar{u}_2)\end{cases} \qquad ((x, t) \in Q_T)$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+L_2\right)u_2=f_2(x,t,u_1,u_2)\\ B_i\bar{u}_i=B_iu_i=g_i(x,t)\quad(i=1,2)\\ \qquad((x,t)\in\partial\Omega\times(0,T])\\ \bar{u}_i(x,0)=u_i(x,0)=\varphi_i(x)\quad(i=1,2,x\in\bar{\Omega})\end{cases}$$

易证

$$\bar{u}_1=u_1=u_1,\ \bar{u}_2=u_2=u_2$$

从而 (u_1,u_2) 是 (1.1) 的解.

引理 5.3.2 设 (1.1) 存在有序的上、下解

$$V(x,t)\leqslant U(x,t)$$

在 $\bar{Q}_T\times\sum_V^U$ 上 f_1 拟单调减少，f_2 拟单调增加，(1.5) 成立. 则 $\bar{u}_i=u_i$ $(i=1,2)$.

证明　与定理 5.2.7 类似可证.

与拟单调增加或减少情形类似我们可得

定理 5.3.3 设 $\{f_1,f_2\}$ 在 $\sum$ 上是混拟单调的，并满足 (1.5)，当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时 $U(x,t)$，$V(x,t)\in\sum$ 是(1.1)的上、下解. 则

1° $V(x,t)\leqslant U(x,t)((x,t)\in\bar{Q}_T)$. 当 $V_i(x,0)\not\equiv U_i(x,0)$ 时又有 $V_i(x,t)<U_i(x,t)$ $((x,t)\in Q_T)$，

2° (1.1) 在 $[V(x,t),U(x,t)]$ 中存在唯一解 $u(x,t)$.

证明　与定理 5.2.7 类似可证 1° 及 (1.1) 存在解 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))$，$u_i(x,t)=\bar{u}_i(x,t)=u_i(x,t)$ 且

$$V(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant U(x,t)$$

今再证唯一性.

设还有另外一个解 $u^*(x,t)=(u_1^*(x,t),u_2^*(x,t))$

$$V(x,t)\leqslant u^*(x,t)\leqslant U(x,t)$$

显然，$u_i^{(0)}\leqslant u_i^*\leqslant\bar{u}_i^{(0)}$ $(i=1,2)$. 若

$$u_i^{(k)}\leqslant u_i^*\leqslant\bar{u}_i^{(k)}\tag{3.2}$$

则易证

$$u_i^{(k+1)}\leqslant u_i^*\leqslant\bar{u}_i^{(k+1)}$$

于是，对 $\forall k$ (3.2) 成立. 令 $k\to+\infty$ 得

$$u_i^* = u_i$$

即唯一性得证。证毕。

定理 5.3.4 设 $\{f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)\}$ 在 $\sum$ 上是混拟单调的，并满足 (1.5)；当 $x \in \bar{\Omega}$ 时 $U(x), V(x) \in \sum$ 是 (1.2) 的上、下解，$V(x) \leqslant U(x)$，则 (1.2) 至少存在一个解 $u(x)$ 并有

$$V(x) \leqslant u(x) \leqslant U(x)$$

证明 对任意 $v = (v_1(x), v_2(x)) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$，$V(x) \leqslant v(x) \leqslant U(x)$。考察线性问题：

$$\begin{cases} L_i u_i + M u_i = M v_i + f_i(v_1, v_2) & (x \in \Omega) \\ B_i u_i = g_i(x) \quad (x \in \partial\Omega) & (i = 1, 2) \end{cases}$$

它有唯一解 $u = (u_1, u_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$。由此定义一个算子 T: $u = Tv$，取 $E = C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$，它是 Banach 空间。对任意 $u = (u_1, u_2) \in E$，它的范数

$$\|u\|_E = \max(|u_1|_\alpha, |u_2|_\alpha)$$

(1) 先证 T 映 E 中的某闭凸集到自身。

由上、下解定义及方程式的最大值原理得

$$V(x) \leqslant u = Tv \leqslant U(x)$$

由嵌入定理及椭圆型方程式边值问题解的 L_p 估计得知，存在常数 M_1 使得

$$|u_i|_\alpha \leqslant M_1 \quad (i = 1, 2)$$

令

$$S = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mid V(x) \leqslant v(x) \leqslant U(x),\ v(x) \in E,\ \|v\|_E \leqslant M_1\}$$

则 S 是 E 中的闭凸集且 $T(S) \subset S$。

(2) 再证 T 是 E 上的紧算子。

对任意 $v, v^* \in E$，$u = Tv$，$u^* = Tv^*$。令 $w = u - u^*$，则

$$\begin{cases} L_i w_i + M w_i = M(v_i - v_i^*) + f_i(v_1, v_2) - f_i(v_1^*, v_2^*) \\ B_i w_i|_{\partial\Omega} = 0 \\ (i = 1, 2) \end{cases}$$

由 L_p 估计得

$$\|w_i\|_{2,p} \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{2} |v_i - v_i^*|_\alpha$$

其中 p 可任意给定 再由嵌入定理得

$$|w_i|_\alpha \leqslant C_2 \|w_i\|_{2,p} \leqslant C_3 \sum_{i=1}^{2} |v_i - v_i^*|_\alpha$$

因此 T 在 E 上连续. 同样由 L_p 估计与嵌入定理知,对 E 中任意有界集 G, $T(G)$ 是 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集,故是 E 中的列紧集. 这就证明了 T 是 E 上的紧算子.

现在由 Schauder 不动点定理, T 在 S 存在不动点, 它就是 (1.2) 的解. 证毕.

5.4 非拟单调的情形

在实际中还常常遇到 $\{f_1, f_2\}$ 是非拟单调的情形. 这时不能保证迭代序列的单调性. 但是,对于 $v = (v_1, v_2) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T) \times C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, 线性问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + L_i u_i + M u_i = M v_i + f_i(x, t, v_1, v_2) \\ B_i u_i = g_i(x, t) \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x) \\ (i = 1, 2) \end{cases} \tag{4.1}$$

总有唯一解 $u = (u_1, u_2)$, 它确定了一个算子 T:

$$u = Tv$$

若 T 有不动点, 则 (1.1) 存在解 $u(x, t)$. 为了利用 Schauder 不动点定理证明 T 存在不动点. 首先要给出 (4.1) 的解的估计. 为此我们考虑 (1.1) 的辅助问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=H_i(x,t,u_1,u_2)\\
B_iu_i=g_i(x,t)\\
u_i(x,0)=\varphi_i(x)\\
(i=1,2)
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

和

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=h_i(x,t,u_1,u_2)\\
B_iu_i=g_i(x,t)\\
u_i(x,t)=\varphi_i(x)\\
(i=1,2)
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

其中

$$
h_i(x,t,u_1,u_2)\leqslant f_i(x,t,u_1,u_2)\leqslant H_i(x,t,u_1,u_2),
$$
$$
((x,t,u_1,u_2)\in Q_T\times\sum,\ i=1,2)
$$

$\sum$ 是 (u_1,u_2) 平面中某子集．我们分别称 (4.2)，(4.3) 为 (1.1) 的上控制与下控制问题．我们总假定它们是拟增(减)或混拟单调的．这时我们对 (1.1) 也可引进上、下解 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$，$(\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2)$．

定义 5.4.1 设 (H_1,H_2) 在 $\sum$ 上拟增，(h_1,h_2) 在 $\sum$ 上拟减，当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$，$(\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2)\in\sum$ 并满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}+L_1\tilde{u}_1-H_1(x,t,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\geqslant 0\\
\qquad\geqslant\dfrac{\partial\underset{\sim}{u}_1}{\partial t}+L_1\underset{\sim}{u}_1-h_1(x,t,\underset{\sim}{u}_1,\tilde{u}_2)\\
\dfrac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}+L_2\tilde{u}_2-H_2(x,t,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\geqslant 0\\
\qquad\geqslant\dfrac{\partial\underset{\sim}{u}_2}{\partial t}+L_2\underset{\sim}{u}_2-h_2(x,t,\tilde{u}_1,\underset{\sim}{u}_2)
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{cases}
B_i\tilde{u}_i\geqslant g_i(x,t)\geqslant B_i\underset{\sim}{u}_i\quad(x\in\partial\Omega,\ t>0)\\
\tilde{u}_i(x,0)\geqslant\varphi_i(x)\geqslant\underset{\sim}{u}_i(x,0)\quad(x\in\bar{\Omega})\\
(i=1,2)
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

则分别称 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ 和 $(\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2)$ 为 (1.1) 的上解和下解。

定义 5.4.2 设 H_1, h_1 在 $\sum$ 上拟增，H_2, h_2 在 $\sum$ 上拟减. 当 $(x, t)\in \bar{Q}_T$ 时 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)\in \sum$ 并满足

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t}+L_1\tilde{u}_1-H_1(x, t, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\geqslant 0$$

$$\geqslant \frac{\partial \underset{\sim}{u}_1}{\partial t}+L_1\underset{\sim}{u}_1-h_1(x, t, \underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t}+L_2\tilde{u}_2-H_2(x, t, \underset{\sim}{u}_1, \tilde{u}_2)\geqslant 0$$

$$\geqslant \frac{\partial \underset{\sim}{u}_2}{\partial t}+L_2\underset{\sim}{u}_2-h_2(x, t, \tilde{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)$$

和(4.5). 则分别称 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 和 $(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)$ 为(1.1)的上解和下解.

对其它情形可类似定义.

我们也总假定：在 $\sum$ 上，(H_1, H_2)，(h_1, h_2) 与 (f_1, f_2) 一样满足(1.5)并取相同的 Lipschitz 常数 M.

令 $U(x, t)=(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$V(x, t)=(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2)$，易证：若 $V(x, t)\leqslant v(x, t)\leqslant U(x, t)$，则 $V(x, t)\leqslant u(x, t)=Tv\leqslant U(x, t)$. 由嵌入定理及线性抛物型方程解的 L_p 估计知：存在常数 M_1，使得 $u=Tv\in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 且

$$|u_i|^{(\alpha+\frac{\alpha}{2})}\leqslant M_1$$

令

$$E=C(\bar{Q}_T)\times C(\bar{Q}_T),$$

$$S=\{v(x, t)\,|\,v\in E,\ V\leqslant v\leqslant U((x, t)\in \bar{Q}_T),\ |v_i|^{(\alpha+\frac{\alpha}{2})}\leqslant M_1\}$$

则 $T(S)\subset S$ 且在 E 空间中，T 在 S 上是紧算子. 因此 T 存在不动点，即(1.1)存在解. 由此即得

定理 5.4.3 设(1.1)存在上、下解 $U(x, t)$，$V(x, t)$，$V(x, t)\leqslant U(x, t)$. 则(1.1)至少存在一个解 $u(x, t)$ 满足：

$$V(x, t)\leqslant u(x, t)\leqslant U(x, t)$$

对(1.2)可类似引进上、下控制问题. 若(1.2)是非拟单调

的。但它的上、下控制问题是拟增（减）或混拟单调的，则也可类似引进上、下解从而建立与定理 5.4.3 相应的存在定理。

我们常用如下方法引进上、下控制问题：

设 $(\underline{u}_1(x,t),\underline{u}_2(x,t))\leqslant(\tilde{u}_1(x,t),\tilde{u}_2(x,t))$ $((x,t)\in\overline{Q}_T)$

令

$$H_1^+(x,t,u_1,u_2)=\sup_{\underline{u}_2\leqslant\eta\leqslant u_2}f_1(x,t,u_1,\eta)$$

$$H_1^-(x,t,u_1,u_2)=\sup_{u_2\leqslant\eta\leqslant\tilde{u}_2}f_1(x,t,u_1,\eta)$$

$$H_2^+(x,t,u_1,u_2)=\sup_{\underline{u}_1\leqslant\xi\leqslant u_1}f_2(x,t,\xi,u_2)$$

$$H_2^-(x,t,u_1,u_2)=\sup_{u_1\leqslant\xi\leqslant\tilde{u}_1}f_2(x,t,\xi,u_2)$$

$$h_1^+(x,t,u_1,u_2)=\inf_{u_2\leqslant\eta\leqslant\tilde{u}_2}f_1(x,t,u_1,\eta)$$

$$h_1^-(x,t,u_1,u_2)=\inf_{\underline{u}_2\leqslant\eta\leqslant u_2}f_1(x,t,u_1,\eta)$$

$$h_2^+(x,t,u_1,u_2)=\inf_{u_1\leqslant\xi\leqslant\tilde{u}_1}f_2(x,t,\xi,u_2)$$

$$h_2^-(x,t,u_1,u_2)=\inf_{\underline{u}_1\leqslant\xi\leqslant u_1}f_2(x,t,\xi,u_2)$$

则 $\{H_1^+,H_2^+\}$ 与 $\{h_1^+,h_2^+\}$ 在 $[\underline{u}_1,\tilde{u}_1]\times[\underline{u}_2,\tilde{u}_2]$ 上拟增，而 $\{H_1^-,H_2^-\}$ 与 $\{h_1^-,h_2^-\}$ 拟减。我们还可以证明

引理 5.4.4 设 $\Sigma=\prod_{i=1}^{m}[a_i,b_i]$，$-\infty<a_i<b_i<+\infty$，又设 $P(x,t,u)$ 满足：对 $(x,t),(y,s)\in\overline{Q}_T$，$u,v\in\Sigma$，有

$$|P(x,t,u)-P(y,s,v)|\leqslant k[|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}+|u-v|]$$

令

$$P^+(x,t,u)=\sup\{P(x,t,u_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)|a_i\leqslant\xi_i\leqslant u_i,\ i=2,3,\cdots,m\}$$

则 P^+ 也满足

$$|P^+(x,t,u)-P^+(y,s,v)|\leqslant k[|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}+|u-v|] \tag{4.6}$$

证明 我们可以假定 $a_i=0\,(i=1,2,\cdots,m)$，对 $u\in\Sigma$，

令

$$A_u = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid \xi_1 = u_1,\ 0 \leqslant \xi_j \leqslant u_j,\ j = 2, 3, \cdots, m\}$$

则

$$P^+(x, t, u) = \sup_{\xi \in A_u} P(x, t, \xi)$$

因为 A_u 是紧集，P 连续，因此存在 $\xi' \in A_u$ 使得

$$P^+(x, t, u) = P(x, t, \xi')$$

设 $u, v \in \sum$，令 $\xi'_0 = \max(\theta, \xi' + v - u)$，即 $\xi'_0 = (\xi'_{01}, \cdots, \xi'_{0m})$

$$\xi'_{0j} = \max(0, \xi'_j + v_j - u_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

注意到

$$|\xi'_0 - \xi'|^2 = \sum_{j=1}^{m} [\xi'_j - \max(0, \xi'_j + v_j - u_j)]^2$$

易见 $\xi'_0 \in A_v$。若 $\xi'_j + v_j - u_j \geqslant 0$，则 $\xi'_j - \max(0, \xi'_j + v_j - u_j) = u_j - v_j$。若 $\xi'_j + v_j - u_j < 0$，则 $\xi'_j - \max(0, \xi'_j + v_j - u_j) = \xi'_j < u_j - v_j$。于是有

$$|\xi'_0 - \xi'| \leqslant |u - v|$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} P^+(x, t, u) - P^+(x, t, v) &= \sup_{\xi \in A_u} P(x, t, \xi) \\ &\quad - \sup_{\xi \in A_v} P(x, t, \xi) \\ &\leqslant P(x, t, \xi') - P(x, t, \xi'_0) \leqslant k|\xi' - \xi'_0| \leqslant k|u - v| \end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned} &P^+(x, t, u) - P^+(y, s, v) \\ &= P^+(x, t, u) - P^+(y, s, u) + P^+(y, s, u) \\ &\quad - P^+(y, s, v) \\ &P^+(x, t, u) - P^+(y, s, u) \leqslant k[|x - y|^\alpha + |t - s|^{\alpha/2}] \end{aligned}$$

所以 (4.6.) 成立。证毕。

类似可证

引理 5.4.5 设 (f_1, f_2) 在 $\bar{Q}_T \times [\underline{u}_1, \tilde{u}_1] \times [\underline{u}_2, \tilde{u}_2]$ 上满足

(1.5)．则 $(H_1^\pm, H_2^\pm)$ 与 $(h_1^\pm, h_2^\pm)$ 也满足(1.5)．

由引理 5.4.5 及定理 5.4.3 可得

定理 5.4.6 设 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \leqslant (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 在 $\bar{Q}_T$ 连续满足(4.5)和

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + L_i\tilde{u}_i - H_i^+(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \geqslant 0$$

$$\geqslant \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} + L_i\underline{u}_i - h_i^+(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$$

$(i = 1, 2)$，(f_1, f_2) 在 $\bar{Q}_T \times [\underline{u}_1, \underline{u}_2] \times [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]$ 满足(1.5)．则(1.1)存在解 $u(x, t)$ 满足

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \leqslant u(x, t) \leqslant (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$

注 1 实际上可以进一步证明：在定理 5.4.6 的条件下，(1.1)的解是唯一的．参见［Lia］．

注 2 在定理 5.4.6 中，上、下控制系统都是拟增的．对于上、下控制系统是拟减或混拟单调的情形也有类似的结论．

注 3 对于椭圆型边值问题也有类似的结论．

J. Hernandez 对(1.2)(不必要求是拟单调的)给出上、下解的定义如下：

定义 5.4.7 $(\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x))$，$(\underline{u}_1(x), \underline{u}_2(x))$ 有古典解的光滑性称为(1.2)的上、下解：若

$$(\underline{u}_1(x), \underline{u}_2(x)) \leqslant (\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x))$$

$$L_1\underline{u}_1(x) - f_1(x, \underline{u}_1, u_2) \leqslant 0 \leqslant L_1\tilde{u}_1(x) - f_1(x, \tilde{u}_1, u_2) \quad (\forall u_2 \in [\underline{u}_2, \tilde{u}_2])$$

$$L_2\underline{u}_2(x) - f_2(x, u_1, \underline{u}_2) \leqslant 0 \leqslant L_2\tilde{u}_2(x) - f_2(x, u_1, \tilde{u}_2) \quad (\forall u_1 \in [\underline{u}_1, \tilde{u}_1])$$

$$B_i\underline{u}_i|_{\partial\Omega} \leqslant g_i(x) \leqslant B_i\tilde{u}_i|_{\partial\Omega} \quad (i = 1, 2)$$

参见［Her］．对于(1.1)也有类似的定义．在这种定义下也有相应的存在性定理．

若存在这种上、下解．则一定可构造出上、下控制系统，它们可以是拟增的或拟减的，也可以是混拟单调的，$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 和 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 也是相应的上、下解．

5.5 上、下解的构造

本节通过一些具体例子说明常见的构造上下解的方法，从而可以利用上、下解来证明初边值问题整体解的存在性，甚至可证明平衡解的稳定性。

例 1 在 Belousov-Zhabotinski 反应的简化模型中，两种反应物的无量纲化后的浓度满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(D_1\nabla u) = u(a - bu - cv) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (x\in\Omega,\ t>0) \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - \nabla\cdot(D_2\nabla v) = -c_1uv \\
B_1u = g_1(x) \geqslant 0,\ B_2v = g_2(x) \geqslant 0 \\
\qquad\qquad\qquad (x\in\partial\Omega,\ t>0) \\
u(x,0) = \varphi(x) \geqslant 0,\ v(x,0) = \psi(x) \geqslant 0\ (x\in\Omega)
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

其中 $D_i(x)$，$g_i(x)$ 是正函数；a，b，c，c_1 是正常数。

$$f_1(u,v) = u(a - bu - cv)$$
$$f_2(u,v) = -c_1uv$$

在 $u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$ 时是拟减的；在 (u,v) 的任意有限区域是 Lipschitz 的。

现在构造 (5.1) 的非负有序上、下解 $(\tilde{u},\tilde{v})$，$(\underline{u},\underline{v})$：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \nabla\cdot(D_1\nabla\tilde{u}) - \tilde{u}(a - b\tilde{u} - c\underline{v}) \geqslant 0 \\
\qquad \geqslant \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \nabla\cdot(D_1\nabla\underline{u}) - \underline{u}(a - b\underline{u} - c\tilde{v}) \\
\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \nabla\cdot(D_2\nabla\tilde{v}) + c_1\underline{u}\tilde{v} \geqslant 0 \\
\qquad \geqslant \dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \nabla\cdot(D_2\nabla\underline{v}) + c_1\tilde{u}\underline{v} \\
B_1\tilde{u} \geqslant g_1(x) \geqslant B_1\underline{u},\ B_2\tilde{v} \geqslant g_2(x) \geqslant B_2\underline{v} \\
\tilde{u}(x,0) \geqslant \varphi(x) \geqslant \underline{u}(x,0)
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

$$\tilde{v}(x,0) \geqslant \phi(x) \geqslant \underline{v}(x,0)$$

常数上下解

令 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (M_1, M_2) > (0, 0)$，$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = (0, 0)$. 要求它们满足 (5.2)，只须

$$-M_1(a - bM_1) \geqslant 0$$

$$M_1 \geqslant \varphi_M, \bar{h}_1; M_2 \geqslant \phi_M, \bar{h}_2$$

其中

$$\varphi_M = \max_{\bar{\Omega}} \varphi(x), \quad \phi_M = \max_{\bar{\Omega}} \phi(x)$$

$$\bar{h}_i = \sup_{\partial\Omega} \frac{g_i(x)}{b_i(x)}$$

这里假定 $b_i(x) \neq 0$ $(x \in \partial\Omega)$，当第一边值时 $b_i = 1$. 于是 $0 \leqslant \bar{h}_i < +\infty$. 因此. 取

$$M_1 = \max(a/b, \bar{h}_1, \phi_M)$$

$$M_2 = \max(\bar{h}_2, \phi_M)$$

则 $(\tilde{u},\tilde{v}) = (M_1,M_2),(\underline{u},\underline{v}) = (0,0)$ 是 (5.1) 的非负有序上、下解. 当 $b_i(x)$ 在边界上取零值时上述方法不适用.

转化为求解偏微分方程式

现选取 $(\tilde{u}, \tilde{v}) > (0, 0)$，$(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$，使之满足(5.2)，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (D_1 \Delta \tilde{u}) \geqslant \tilde{u}(a - b\tilde{u}) \\ \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t} - \nabla \cdot (D_2 \nabla \tilde{v}) \geqslant 0 \\ B_1\tilde{u} \geqslant g_1(x), \quad B_2\tilde{v} \geqslant g_2(x) \\ \tilde{u}(x,0) \geqslant \varphi(x), \quad \tilde{v}(x,0) \geqslant \phi(x) \end{cases} \tag{5.3}$$

令 $\tilde{u} = K_1 + w_1(x)$，其中 $w_1(x)$ 是边值问题

$$-\nabla \cdot (D_1 \nabla w_1) = 0, \quad B_1 w_1 = g_1(x)$$

的解，当 $b_1(x) \not\equiv 0$ 时，它有唯一解且 $w_1(x) \geqslant 0$. 这时

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (D_1 \nabla \tilde{u}) = 0$$

$$\tilde{u}(a-b\tilde{u})=(w_1+K_1)[(a-b(w_1+K_1)]$$

取 $K_1\geqslant\frac{a}{b}$，φ_M，则 $\tilde{u}=K_1+w_1(x)$ 满足 (5.3)。同样令 $\tilde{v}=K_2+w_2(x)$，其中 $w_2(x)$ 是边值问题

$$-\nabla\cdot(D_2\nabla w_2)=0,\quad B_2w_2=g_2(x)$$

的唯一解(当 $b_2(x)\not\equiv 0$ 时)，且一定有 $w_2(x)\geqslant 0$。若 $K_2\geqslant\psi_M$，则 v 满足 (5.3)。因此

$$(\tilde{u},\tilde{v})=(K_1+w_1(x),\ K_2+w_2(x))$$

$$(\underline{u},\underline{v})=(0,0)$$

分别是 (5.1) 的非负上、下解。

利用第一特征值和特征函数求上、下解。

当 $g_1(x)=g_2(x)=0$ 时，我们选取 $(\tilde{u},\tilde{v})=(p_1(t)\varphi_1(x),p_2(t)\varphi_2(x))$，$(\underline{u},\underline{v})=(0,0)$，使之满足 (5.2)，其中 $\varphi_i(x)$ 是

$$-\nabla\cdot(D_i\nabla u(x))=\lambda u(x),\quad B_iu=0$$

的最小特征值 λ_i 所对应的特征函数。当 $b_i(x)\not\equiv 0$ 时 $\lambda_i>0$。

为此，我们只须要求

$$p_1'+(\lambda_1-a)p_1=0,\ p_1(0)\varphi_1(x)\geqslant\varphi(x)$$

$$p_2'+\lambda_2p_2=0,\qquad p_2(0)\varphi_2(x)\geqslant\psi(x)$$

因此，令

$$(\tilde{u},\tilde{v})=(\rho_1e^{-(\lambda_1-a)t}\varphi_1(x),\ \rho_2e^{-\lambda_2t}\varphi_2(x))$$

$$(\underline{u},\underline{v})=(0,0)$$

其中 ρ_1,ρ_2 是任意给定的正数。若

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho_1\varphi_1(x),\ 0\leqslant\psi(x)\leqslant\rho_2\varphi_2(x)$$

则 $(\tilde{u},\tilde{v})$，$(\underline{u},\underline{v})$ 是(5.1)的有序非负上、下解。

总结上面的讨论，我们得到

定理 5.5.1 设 $\varphi(x)\geqslant 0$，$\psi(x)\geqslant 0$，$g_i(x)\geqslant 0$，$b_i(x)\not\equiv 0\ (i=1,2)$，则存在正常数 M_1，M_2，使得 (5.1) 有唯一正解满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant M_1,\ 0\leqslant v(x,t)\leqslant M_2$$

此外，若 $g_1(x)=g_2(x)=0$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho_1\varphi_1(x)$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant$

$\rho_2\varphi_2(x)$，则

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant \rho_1 e^{-(\lambda_1-a)t}\varphi_1(x)$$
$$0 \leqslant v(x,t) \leqslant \rho_2 e^{-\lambda_2 t}\varphi_2(x)$$

定理 5.5.1 指出：当 $a < \lambda_1$ 时，零平衡解是指数渐近稳定的。

利用常微分方程组的解作上下解

最后考察 (5.1) 的 Neumann 边条件的情形，即

$$B_1 u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0,\ B_2 v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

这时 (5.1) 有非负常数平衡解：$(a/b, 0)$，$(0, \mu)$，其中 $\mu \geqslant 0$ 是任意常数。在这种情形，只依赖于 t 的函数自然满足边条件。因此我们可取常微分方程组的解为上、下解。

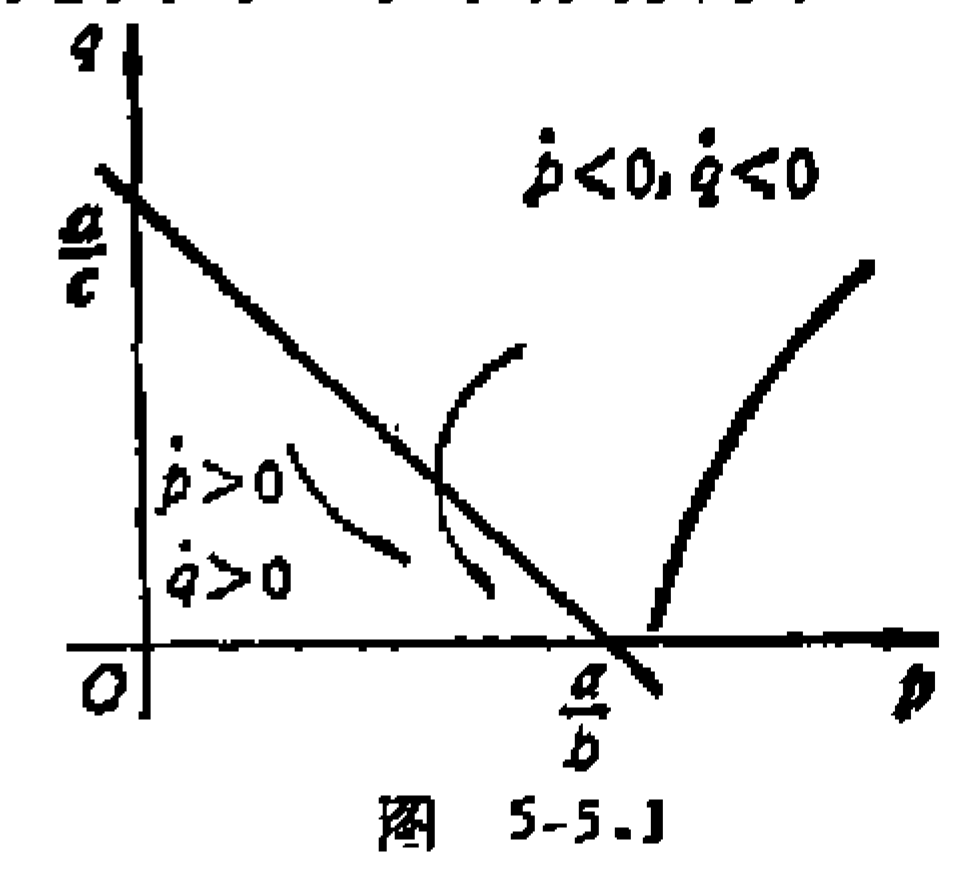


图 5-5.1

考察常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = p(a - bp - cq) \\ \dfrac{dq}{dt} = -c_1 qp \\ p(0) = p_0,\ q(0) = q_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

由 pq 相平面上向量场的分布图易知：只要 $p_0 > 0$，$q_0 \geqslant 0$，则 (5.4) 的解满足

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{a}{b},\ \lim_{t\to+\infty} q(t) = 0$$

我们把 (5.4) 的解记为 $p(t; p_0, q_0)$，$q(t; p_0, q_0)$。

令 $\min\limits_{\bar{\Omega}} \varphi(x) = \varphi_m$，$\max\limits_{\bar{\Omega}} \varphi(x) = \varphi_M$

$\min\limits_{\bar{\Omega}} \psi(x) = \psi_m$，$\max\limits_{\bar{\Omega}} \psi(x) = \psi_M$

先设 $\varphi_m > 0$，则

$$(p(t; \varphi_M, \psi_m),\ q(t; \varphi_m, \psi_M))$$
$$(p(t; \varphi_m, \psi_M),\ q(t; \varphi_M, \psi_m))$$

是 (5.1) 的非负有序上、下解。于是 (5.1) 存在唯一解 $(u(x,t), v(x,t))$：

$$p(t;\varphi_m,\phi_M)\leqslant u(x,t)\leqslant p(t;\varphi_M,\phi_m)$$
$$q(t;\varphi_M,\phi_m)\leqslant v(x,t)\leqslant q(t;\varphi_m,\phi_M)$$

由此立即得到

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t)=\frac{a}{b},\quad \lim_{t\to+\infty} v(x,t)=0$$

若 $\varphi_m=0$，但只要 $\varphi(x)\not\equiv 0$，则当 $t>0$ 时 $u(x,t)>0$. 取 $\delta>0$，则 $\min\limits_{\bar{\Omega}} u(x,\delta)>0$，以此为初值仍可证明

定理5.5.2 设 $B_1u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$，$B_2v=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0$. 若 $0\leqslant\varphi(x)$，$\varphi(x)\not\equiv 0$，$0\leqslant\phi(x)$，则(5.1)存在唯一解 $(u(x,t),v(x,t))$ 满足:

$$\lim_{t\to+\infty}(u(x,t),v(x,t))=\left(\frac{a}{b},0\right)$$

此定理表明：$\left(\dfrac{a}{b},0\right)$ 是全局渐近稳定的，$(0,\mu)$ 是不稳定的.

问题(5.1)的非负平衡解稳定性的讨论可参看 [Pao 1, pp. 187—191].

例2 在生物学中，满足 Michaelis-Menten 饱和定律的一个简单的双分子自催化反应扩散模型是:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-D_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=uv-\dfrac{u}{1+qu}=f_1(u,v)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0<x<1,\ t>0)\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-D_2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-uv+A=f_2(u,v)\\ u(0,t)=u(1,t)=u_0\\ v(0,t)=v(1,t)=v_0\\ u(x;0)=\varphi(x)\geqslant 0\quad (0\leqslant x\leqslant 1)\\ v(x,0)=\phi(x)\geqslant 0\end{cases}\tag{5.5}$$

其中 u, v, A 都表示浓度，是非负的；A 是常数；$q>0$ 是参数. u_0, v_0 是

$$\begin{cases} uv - \dfrac{u}{1+qu} = 0 \\ -uv + A = 0 \end{cases}$$

的解，即 $u_0 = \dfrac{A}{v_0}$，$v_0 = 1 - qA$，$0 < qA < A$。

当 $u \geqslant 0$，$v \geqslant 0$ 时

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = u \geqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -v \leqslant 0$$

即 $\{f_1, f_2\}$ 是混拟单调的．在 $u \geqslant 0$，$v \geqslant 0$ 的任意有界区域上 f_1, f_2 是 Lipschitz 的．

现在要找非负有序的上、下解对 $(\tilde{u}, \tilde{v})$，$(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v})$ 有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - D_1 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \tilde{u}\tilde{v} + \dfrac{\tilde{u}}{1+q\tilde{u}} \geqslant 0 \\ \qquad \geqslant \dfrac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial t} - D_1 \dfrac{\partial^2 \underset{\sim}{u}}{\partial x^2} - \underset{\sim}{u}\underset{\sim}{v} + \dfrac{\underset{\sim}{u}}{1+q\underset{\sim}{u}} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - D_2 \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \underset{\sim}{u}\tilde{v} - A \geqslant 0 \\ \qquad \geqslant \dfrac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial t} - D_2 \dfrac{\partial^2 \underset{\sim}{v}}{\partial x^2} + \tilde{u}\underset{\sim}{v} - A \\ \tilde{u}|_{0,1} \geqslant u_0 \geqslant \underset{\sim}{u}|_{0,1}, \quad \tilde{v}|_{0,1} \geqslant v_0 \geqslant \underset{\sim}{v}|_{0,1} \\ \tilde{u}|_{t=0} \geqslant \varphi \geqslant \underset{\sim}{u}|_{t=0}, \quad \tilde{v}|_{t=0} \geqslant \psi \geqslant \underset{\sim}{v}|_{t=0} \end{cases} \tag{5.6}$$

令 $(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = (0, 0)$，显然它是下解．令 $\tilde{v}$ 是下面线性问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - D_2 \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} - A = 0 \\ \tilde{v}|_{0,1} = v_0 \\ \tilde{v}|_{t=0} = \psi(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

显然它有唯一解 $\tilde{v}(x, t)$，由引理 3.1.10，$\tilde{v} \geqslant 0$。

求出 $\tilde{v}(x, t)$ 后，再找 $\tilde{u}$。$\tilde{u}$ 是下列问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}-D_1\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}-\tilde{v}(x,t)\tilde{u}=0\\ \tilde{u}\big|_{0,1}=u_0\\ \tilde{u}\big|_{t=0}=\varphi(x)\geqslant 0\end{cases}$$

显然，这个问题也有唯一解．由引理 3.1.10，$\tilde{u}\geqslant 0$。这样求得 $(\tilde{u},\tilde{v})$，$(\underline{u},\underline{v})=(0,0)$ 满足 (5.6)，是 (5.5) 的有序上、下解对．因此，(5.5)至少存在一个解．

5.6 非常数平衡解的稳定性

我们也可用上、下解讨论平衡解的稳定性并给出吸引区域．下面举例说明。

设 $(u_s(x),v_s(x))$ 是 (5.5) 的非负平衡解，即满足

$$\begin{cases}-D_1u_s''=u_sv_s-\dfrac{u_s}{1+qu_s}\quad(0<x<1)\\ -D_2v_s''=-u_sv_s+A\\ u_s\big|_{0,1}=u_0,\ v_s\big|_{0,1}=v_0.\end{cases}\tag{6.1}$$

现讨论它的稳定性和吸引区域．

想法极其简单，我们希望求两个正函数 $p_1(t)$、$p_2(t)$，使得

$$\tilde{u}=p_1(t)\varphi_1(x)+u_s(x),\ \tilde{v}=p_2(t)\varphi_1(x)+v_s(x)$$
$$\underline{u}=u_s(x)-p_1(t)\varphi_1(x),\ \underline{v}=v_s(x)-p_2(t)\varphi_1(x)$$

正好构成一组有序上、下解对，其中 $\varphi_1(x)$ 是

$$\begin{cases}-y''=\lambda y\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

的最小特征值 $\lambda_1=\pi^2>0$ 所对应的特征函数，$\varphi_1(x)=\sin\pi x$。

有序是显然的．再按定义看一看 $p_1(t)$ 应满足什么条件，是否有解。

逐个考察 $\tilde{u}$，$\tilde{v}$，$\underline{u}$，$\underline{v}$ 满足的不等式．

$$(u_s(x)+p_1(t)\varphi_1(x))_t-D_1(u_s(x)+p_1(t)\varphi_1(x))_{xx}$$
$$-(u_s(x)+p_1(t)\varphi_1(x))(v_s(x)+p_2(t)\varphi_1(x))$$

$$+\frac{\tilde{u}}{1+q\tilde{u}}\geqslant 0$$

的充分条件是

$$p_1'\varphi_1 - D_1 u_t'' - p_1 D_1 \varphi_1'' - u_t v_t + \frac{u_t}{1+qu_t}$$
$$-(p_1 v_t + p_2 u_t)\varphi_1 - p_1 p_2 \varphi_1^2 \geqslant 0 \tag{6.2}$$

因为

$$\frac{\tilde{u}}{1+q\tilde{u}} - \frac{u_t}{1+qu_t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{1+qu}\right)\Big|_{u^*}(\tilde{u}-u_t)$$
$$= \frac{1}{(1+qu)^2}\Big|_{u^*}(\tilde{u}-u_t) \geqslant 0$$

(6.2)，即

$$p_1' + \lambda_1 D_1 p_1 - (p_1 v_t + p_2 u_t) \geqslant p_1 p_2 \varphi_1 \tag{6.3}$$

$$(u_t - p_1\varphi_1)_t - D_1(u_t - p_1\varphi_1)_{xx}$$
$$-(u_t - p_1\varphi_1)(v_t - p_2\varphi_1) + \frac{u}{1+qu} \leqslant 0$$

的充分条件是

$$-p_1'\varphi_1 - \lambda_1 D_1 p_1 \varphi_1 + (p_1 v_t + p_2 u_t)\varphi_1 - p_1 p_2 \varphi_1^2 \leqslant 0$$

即

$$p_1'\varphi_1 + \lambda_1 D_1 p_1 \varphi_1 - (p_1 v_t + p_2 u_t)\varphi_1 \geqslant p_1 p_2 \varphi_1^2$$

与(6.3)式相同。

再看另外两个不等式，

$$0 \leqslant (v_t + p_2\varphi_1)_t - D_2(v_t + p_2\varphi_1)_{xx}$$
$$- A + (u_t - p_1\varphi_1)(v_t + p_2\varphi_1)$$
$$= p_2'\varphi_1 - D_2 v_t'' + \lambda_1 D_2 p_2 \varphi_1 - A + u_t v_t$$
$$-(p_1 v_t - p_2 u_t)\varphi_1 - p_1 p_2 \varphi_1^2$$

即

$$p_2' + \lambda_1 D_2 p_2 + (p_2 u_t - p_1 v_t) \geqslant p_1 p_2 \varphi_1 \tag{6.4}$$

$$0 \geqslant (v_t - p_2\varphi_1)_t - D_2(v_t - p_2\varphi_1)_{xx} - A$$
$$+ (u_t + p_1\varphi_1)(v_t - p_2\varphi_1)$$

即 (6.4).

若令 $p_1(t)=p_2(t)=p(t)$，则充分条件为

$$p'+[\lambda_1 D_1-u_t-v_t]p\geqslant p^2$$
$$p'+[\lambda_1 D_2-v_t]p\geqslant p^2$$

若存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$\begin{cases}\lambda_1 D_1-u_t-v_t\geqslant\varepsilon\\ \lambda_1 D_2-v_t\geqslant\varepsilon\end{cases}\tag{6.5}$$

则有充分条件

$$p'+\varepsilon p\geqslant p^2$$

因此，我们可取

$$p'+\varepsilon p=p^2$$

的解

$$p(t)=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+\left(\frac{1}{p(0)}-\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{\varepsilon t}}\tag{6.6}$$

其中 $0<p(0)<\varepsilon$.

若已知 $u_t\geqslant 0$，$v_t\geqslant 0$，易证

$$0\leqslant u_t\leqslant u_0+\frac{D_2}{D_1}v_0+\frac{A}{8D_1}$$

$$0\leqslant v_t\leqslant v_0+\frac{D_1}{D_2}u_0+\frac{A}{8D_2}$$

于是 (6.5) 的充分条件是

$$\begin{cases}\lambda_1 D_1-u_t-v_t\geqslant\lambda_1 D_1-u_0-v_0-\dfrac{D_2}{D_1}v_0\\ \qquad-\dfrac{D_1}{D_2}u_0-\dfrac{A}{8D_1}-\dfrac{A}{8D_2}\geqslant\varepsilon\\ \lambda_1 D_2-v_t\geqslant\lambda_1 D_2-v_0-\dfrac{D_1}{D_2}v_0-\dfrac{A}{8D_2}\geqslant\varepsilon\end{cases}\tag{6.7}$$

最简单的情形是：取 $D_1=D_2=D$，则只要 D 充分大，(6.7) 一定成立. 因此我们证明了

定理 5.6.1 设 $(u_s(x), v_s(x))$ 是(5.5)的非负平衡解，$D_1 = D_2 = D$. 任给 $\varepsilon > 0$，若

$$\lambda_1 D - 2(u_s + v_0) - \frac{A}{4D} \geqslant \varepsilon$$

则只要

$$u_s(x) - p(0)\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant u_s(x) + p(0)\varphi_1(x)$$

$$v_s(x) - p(0)\varphi_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant v_s(x) + p(0)\varphi_1(x) \quad (6.8)$$

就有 (5.5) 的解 $(u(x, t), v(x, t))$ 满足

$$|u(x, t) - u_s(x)| \leqslant p(t)\varphi_1(x)$$

$$|v(x, t) - v_s(x)| \leqslant p(t)\varphi_1(x)$$

其中 $p(t)$ 由 (6.6) 给出，$0 < p(0) < \varepsilon$，即 (u_s, v_s) 是渐近稳定的. (6.8) 属于吸引区域.

5.7 评 注

对于方程组来说，单调方法的一个特点是：要求右端函数组 $\{f_i(x, t, u_1, \cdots, u_m)\}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 即反应项具有某种拟单调性. 记 $u_i^{(k)}$ 为解分量 u_i 的第 k 次迭代，$u_i^{(0)}$ 为迭代初值. 若 $u_i^{(k)} \leqslant u_i^{(k-1)}$ $(\geqslant)$，则有了拟单调性就能保证 $u_i^{(k+1)} \leqslant u_i^{(k)}$ $(\geqslant)$. 为了保证第一次迭代 $u_i^{(1)} \leqslant u_i^{(0)}$ $(\geqslant)$，这就导致引进上、下解，并以上、下解作为初值. 方程组单调方法的另一个特点是，上、下解的定义依赖于右端函数的拟单调性.

本章虽然只对 $m = 2$ 的情形进行了论述. 但方法与结论对于 $m > 2$ 的情形都是适用的. 设 $\sum$ 是 R^m 的子集. 与 $m = 2$ 一样，对于一般的 $\sum$ 中的拟单调系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + L_i u_i = f_i(x, t, u_1, \cdots, u_m) & ((x, t) \in Q_T) \\ B_i u_i = g_i(x, t) & ((x, t) \in S_T) \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x) & (x \in \bar{\Omega}) \\ (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

可以引进上、下解.

若 $\tilde{u}=(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_m)$ 与 $\underline{u}=(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m)$ 有古典解的光滑性,则当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时 $\tilde{u},\underline{u}\in\sum$, 对 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial t}+L_i\tilde{u}_i\geqslant f_i\ (x,t,u_1,\cdots,u_{i-1},\tilde{u}_i,u_{i+1},\cdots,u_m)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad((x,t)\in Q_T)\\ B_i\tilde{u}_i\geqslant g_i(x,t)\qquad\qquad\qquad\qquad((x,t)\in S_T)\\ \tilde{u}_i(x,0)\geqslant\varphi_i(x)\qquad\qquad\qquad\qquad(x\in\bar{D})\end{cases}$$

其中当 $j\neq i$ 时

$$u_j=\begin{cases}\tilde{u}_j\ \text{若}\ f_i\ \text{对}\ u_j\ \text{单调上升}\\ \underline{u}_j\ \text{若}\ f_i\ \text{对}\ u_j\ \text{单调下降}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\underline{u}_i}{\partial t}+L_i\underline{u}_i\leqslant f_i(x,t,u_1,\cdots,u_{i-1},\underline{u}_i,u_{i+1},\cdots,u_m)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad((x,t)\in Q_T)\\ B_i\underline{u}_i\leqslant g_i(x,t)\qquad((x,t)\in S_T)\\ \underline{u}_i(x,0)\leqslant\varphi_i(x)\qquad(x\in\bar{D})\end{cases}$$

其中当 $j\neq i$ 时

$$u_j=\begin{cases}\tilde{u}_j\ \text{若}\ f_i\ \text{对}\ u_j\ \text{单调下降}\\ \underline{u}_j\ \text{若}\ f_i\ \text{对}\ u_j\ \text{单调上升}\end{cases}$$

则称 $\tilde{u}$ 与 $\underline{u}$ 分别是该系统的上解与下解.

在 $\tilde{u}$ 与 $\underline{u}$ 满足的不等式组中有以下情形:

1° $\tilde{u}$ 与 $\underline{u}$ 各自满足一个不等式组(拟增系统).

2° $\tilde{u}$ 与 $\underline{u}$ 的 2m 个分量可分为两组(每组m个分量)各自满足一个不等式组(可作变换化为拟增系统).

3° $\tilde{u}$ 与 $\underline{u}$ 的 2m 个分量满足一个不等式组. 它们必须同时被确定.

对于椭圆形方程组也有类似的定义.

抛物型方程与椭圆型方程的单调方法是类似的，但它们有以下区别:

1° 抛物型方程初边值问题的上、下解 $\tilde{u}$ 与 $\underline{u}$ 是有序的: $\tilde{u}\geqslant$

u。而椭圆型边值问题的上、下解一般没有这种有序性。

2° 抛物型方程组情形. 迭代序列的极限一定是定解问题的解，因为可以利用某一类抛物型方程组的最大值原理. 椭圆型方程组情形(除了拟增系统及可化为拟增的系统外)，迭代序列的极限不一定是定解问题的解，因为椭圆型方程组没有可以利用的最大值原理. 但这时利用 Schauder 不动点定理仍可证明：上、下解的存在性保证解的存在性.

3° 上、下解的存在性对于抛物型方程的定解问题不仅保证解的存在性而且还保证解的唯一性. 对于椭圆型方程的定解问题只能保证解的存在性而不能保证唯一性.

对于抛物型方程的初边值问题，上、下解的存在性不仅保证上、下解之间的解是唯一的.而且还保证在拟单调区域上解是唯一的。对拟增系统及可化为拟增系统的情形本章中已经证明过，而对于其它的拟单调系统实际上在 [Lia] 中给出了证明.

不论是抛物型的还是椭圆型的，如果系统本身不具有拟单调性.但它的上、下控制系统具有拟单调性. 我们可以把单调方法推广到这种情形. 在[Lia]中给出构造拟单调的上、下控制系统的方法，并给出上、下解的定义。它不仅证明了上、下解的存在保证了原系统解的存在,而且对抛物型方程组情形还证明了解的唯一性.

利用单调方法可以讨论方程组平衡解的全局稳定性以及方程组的解关于时间 t 的渐近性态. 它有以下几种主要方法:

1. 转化为讨论相应的常微分方程。

在 Neumann 齐次条件下，抛物型方程组的初边值问题常数平衡解的稳定性问题可以转化为讨论相应的常微分方程组的平衡点的稳定性. 对于二维拟增(拟减)系统. 可归结为常微平面系统并利用 Poincare-Bendixson 定理来讨论. 至于二维混拟单调系统,却要归结为四维的常微系统.

高维情形如三维拟增系统或可化为拟增的系统或其它拟单调系统的讨论,可参见 [LiZ1, 2, XSX].

2. 可化为方程式的或高维方程组化为低维方程组的情形。

如果对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}-d_i\Delta u_i=f_i(u_1,u_2,u_3) & ((x,t)\in Q_\infty)\\ B_iu_i=0 & ((x,t)\in S_\infty)\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x) & (x\in\Omega)\end{cases}$$

我们能证明它的解 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}u_i(x,t)=0\ (i=2,3,\text{对 }x\in\Omega\text{ 一致})$$

或 $$\lim_{t\to+\infty}u_3(x,t)=0,\ \text{对 }x\in\Omega\text{ 一致})$$

在适当条件下我们可以证明

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=(w_1(x),0,0)$$

其中 $w_1(x)$ 满足

$$\begin{cases}-d_1\Delta w_1=f_1(w_1,0,0)\\ B_1w_1=0\end{cases}$$

或

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=(w_1(x),w_2(x),0)$$

其中 $w_1(x)$, $w_2(x)$ 满足

$$\begin{cases}-d_i\Delta w_i=f_i(w_1,w_2,0)\\ B_iw_i=0\\ (i=1,2)\end{cases}$$

[Yan] 中给出了这方面的一个例子.

3. 基于相应的椭圆型问题的上、下解的判别方法.

考察

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=f_i(x,u_1,u_2) & (x\in\Omega,t>0)\\ B_iu_i=g_i(x) & (x\in\partial\Omega,t>0)\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x) & (x\in\Omega)\\ (i=1,2)\end{cases}\tag{1}$$

及相应的椭圆型方程组的边值问题

$$
\begin{cases}
L_i u_i = f_i(x, u_1, u_2) & (x \in \Omega) \\
B_i u_i = 0 & (x \in \partial\Omega) \\
(i = 1, 2)
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 f_i, g_i, φ_i 满足上、下解方法中的条件．我们容易证明

定理 设当 $x \in \Omega$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$ 时 (2) 是拟增(或拟减)系统，又设：

1° (2) 有上、下解 $(\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x)) \geqslant (\underline{\varphi}_1(x), \underline{\varphi}_2(x)) \geqslant (0,0)$,

2° 当 (2) 是拟增的时 $T^m(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ 与 $T^m(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2)$ 当 $m \to +\infty$ 时有相同的极限 $w(x) = (w_1(x), w_2(x))$ (当 (2) 是拟减的时 $T^m(\bar{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2)$, $T^m(\underline{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ 有相同的极限 $w(x)$)，其中 T 是单调方法中的迭代算子．则对 $\forall \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in S$

$$
S = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)),
$$
$$
\underline{\varphi}_i(x) \leqslant \varphi_i(x) \leqslant \bar{\varphi}_i(x) \quad x \in \Omega, i = 1, 2\}
$$

(1) 存在唯一正解 $u_\varphi(x, t)$ 并满足

$$
\lim_{t \to +\infty} u_\varphi(x, t) = w(x)
$$

条件 2° 等价于在 S 中 (2) 存在唯一解.

对于高维的拟增系统和可化为拟增的系统也有类似的定理.

[Mar] 和 [CMa] 就是用这种方法讨论了方程组的正平衡解的全局稳定性.

习 题 五

在 5.1 题至 5.3 题中，考察方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - a\Delta u_1 = -\alpha u_1 u_2 \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - b\Delta u_2 = -\beta u_1 u_2
\end{cases}
\quad ((x, t) \in Q_T)
\tag{5.1}
$$

其中 a, b, α, β 为正的常数，$T \leqslant +\infty$.

5.1 设 $u_1, u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 满足(5.1)．令 $\Gamma = S_T \cup (\bar{\Omega} \times \{0\})$，若 $u_i|_\Gamma \geqslant 0 (i = 1, 2)$．求证：

$$0 \leqslant u_i(x, t) \leqslant \max_{\Gamma} u_i \qquad (i = 1, 2, (x, t) \in \bar{Q}_T)$$

5.2 设 $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ 是(5.1)在 $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ 上的非负解，满足 $u_i|_{\partial\Omega} = 0 (i = 1, 2, t \geqslant 0)$. 求证

$$\lim_{t \to +\infty} (u_1(x, t), u_2(x, t)) = (0, 0) \text{ (对 } x \in \bar{\Omega} \text{ 一致)}$$

5.3 设 $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ 是(5.1)在 $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ 上的解，满足：

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (i = 1, 2, t > 0)$$

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, x \in \bar{\Omega})$$

(1) 证明存在常数 $M_1, M_2 > 0$,

$$0 \leqslant u_i(x, t) \leqslant M_i \quad (i = 1, 2, (x, t) \in Q_\infty)$$

(2) 令 $\bar{\varphi}_i = \max_{\Omega} \varphi_i(x)$, $\underline{\varphi}_i = \min_{\Omega} \varphi_i(x)$, 若 $\alpha\underline{\varphi}_2 > \beta\bar{\varphi}_1$, 求证：$t \to +\infty$ 时依指数规律一致地有 $u(x, t) \to 0$.

5.4 设

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(U), \quad U(\pm 1) = 0 \tag{5.2}$$

的任一正解 $U(x, t)$ 满足：$\lim_{t \to +\infty} U(x, t) = 0 \ (|x| \leqslant 1)$. 又设

$$g(v) \leqslant -\mu v \quad (v \geqslant 0)$$

μ 是正常数.

$$\varphi(u, v) \geqslant 0 \quad (u \geqslant 0, v \geqslant 0)$$

$$\psi(u, v) \leqslant Kuv \quad (0 \leqslant u \leqslant M, v \geqslant 0)$$

K 是正常数. 求证：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - \varphi(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(v) + \psi(u, v)$$

的任一正解 $(u(x, t), v(x, t))$ 满足：

$$\lim_{t \to +\infty} (u(x, t), v(x, t)) = (0, 0).$$

在 5.5 题至 5.11 题中，考察边值问题：

$$\begin{cases} -\sigma_i \Delta u_i = u_i[a_i + f_i(u_1, u_2)] & (x \in \Omega) \\ u_i = g_i(x) \geqslant 0 & (x \in \partial\Omega) \\ i = 1, 2 \end{cases} \tag{5.3}$$

和初边值问题。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t}-\sigma_i\Delta u_i=u_i[a_i+f_i(u_1,u_2)] & (x\in\Omega,\ t>0)\\
u_i=g_i(x) & (x\in\partial\Omega,\ t>0)\\
u(x,0)=\psi_i(x) & (x\in\bar{\Omega})\\
(i=1,2)
\end{cases}
\tag{5.4}
$$

其中 $a_i,\sigma_i\ (i=1,2)$ 是正常数，$g_i(x)\geqslant 0\ (x\in\partial\Omega)$，$\psi_i(x)\geqslant 0\ (x\in\Omega)$ $(i=1,2)$ 并满足单调方法中的假定。$f_i:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}^1(i=1,2)$ 满足：

$$f_i(0,0)=0,\ \frac{\partial f_i(u_1,u_2)}{\partial u_j}<0\quad (u_1,u_2\geqslant 0)$$

存在正常数 c_1,c_2，

$$a_1+f_1(c_1,0)\leqslant 0,\ a_2+f_2(0,c_2)\leqslant 0$$

记 λ_0 是

$$
\begin{cases}
-\Delta u=\lambda u & (x\in\Omega)\\
u=0 & (x\in\partial\Omega)
\end{cases}
\tag{5.5}
$$

的最小特征值，相应的正特征函数为 $\phi_0(x)$。

5.5 设 $g_i(x)\not\equiv 0\ (i=1,2)$。

(1) 若 $(u_1(x),u_2(x))\geqslant(0,0)$ 是 (5.3) 的解，证明：$u_i(x)>0(x\in\Omega,i=1,2)$。

(2) 证明 (5.3) 存在一个解 $(u_1(x),u_2(x))$ 满足：

$$u_i(x)>0\quad (x\in\Omega,i=1,2).$$

5.6 证明 (5.4) 存在唯一正解且是有界的。

5.7 设 $a_i<\sigma_i\lambda_0$，$g_i(x)|_{\partial\Omega}=0\ (i=1,2)$。

(1) 若 $(u_1(x),u_2(x))\geqslant(0,0)$ 是 (5.3) 的解，证明：

$$u_i(x)\equiv 0\quad (x\in\Omega,i=1,2)$$

(2) 若 (u_1,u_2) 是 (5.4) 的解，证明

$$\lim_{t\to+\infty}u_i(x,t)=0\quad (i=1,2)$$

且对 $x\in\bar{\Omega}$ 一致。

5.8 设 $a_i>\sigma_i\lambda_0$，$g_i(x)=0\ (i=1,2)$。又设存在正常数 M_1,M_2 使得

$$a_1-\sigma_1\lambda_0+f_1(0,M_2)>0,\ a_1+f_1(M_1,0)<0$$
$$a_2-\sigma_2\lambda_0+f_2(M_1,0)>0,\ a_2+f_2(0,M_2)<0$$

证明(5.3)存在解 $(u_1(x), u_2(x))$ 满足:

$$u_i(x) > 0 \quad (x \in \Omega, i = 1, 2)$$

5.9 设 $g_1(x) \equiv 0$, $g_2(x) > 0$ $(x \in \partial\Omega)$. 又设 $a_1 < \sigma_1\lambda_1$. 若 $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ 是(5.4)的解,证明:

(1) $\lim\limits_{t \to +\infty} u_1(x, t) = 0$.

(2) $\exists \delta > 0$ 及 $T > 0$, 当 $t \geqslant T$ 时 $u_2(x, t) \geqslant \delta$.

5.10 设 $g_1(x) \equiv 0$, $g_2(x) > 0$ $(x \in \partial\Omega)$, $a_1 < \sigma_1\lambda_1$.

(1) 证明(5.3)存在唯一非负解 $(u_1^*(x), u_2^*(x))$, 且 $u_1^*(x) \equiv 0$, $u_2^*(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega})$.

(2) 设 $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ 是(5.4)的解. 利用基于相应椭圆方程上、下解的判别方法,证明

$$\lim_{t \to +\infty} (u_1(x, t), u_2(x, t)) = (0, u_2^*(x))$$

5.11 设 $g_1(x) \equiv 0$, $g_2(x) > 0$ $(x \in \partial\Omega)$, $a_1 < \sigma_1\lambda_1$.

(1) 若 $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ 是(5.4)的解,且 $u_2^*(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega})$ 是

$$\begin{cases} -\sigma_2 \Delta u_2 = u_2[a_2 + f_2(0, u_2)] & (x \in \Omega) \\ u_2 = g_2(x) & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

的解. 证明存在正常数 p, q, r, s, T, 使得

$$\lim_{t \to +\infty} u_1(x, t) = 0 \quad (\text{对 } x \in \bar{\Omega} \text{ 一致})$$

$$\beta(t) u_2^*(x) \leqslant u_2(x, t) \leqslant \alpha(t) u_2^*(x) \quad (t \geqslant T, x \in \bar{\Omega})$$

其中

$$\alpha(t) = 1 + pe^{-qt}, \quad \beta(t) = 1 - re^{-st}.$$

(2) 利用5.11(1),证明(5.3)存在唯一非负解.

第六章　不变区域及其应用

在前一章我们曾对特殊的弱耦合抛物不等式组建立了最大值原理，并由此对具有某种拟单调性的弱耦合抛物方程组建立了比较原理．这是我们建立这类抛物型方程组初边值问题解的存在唯一性的基础．

但是，对于一般的弱耦合方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

就不知道是否有最大值原理和比较原理．

我们分析一下最大值原理和比较原理的作用：一是可以得到解的最大模估计，从而为用 Schauder 或 Leray-Schauder 等不动点定理来证明解的存在性创造了条件；二是证明解的唯一性．

对于一般的方程组既然最大值原理不一定成立，那么能否舍此求彼呢？即能否保留一个作用而舍去另一个作用呢？这就是本章要讲的不变区域的主要思想．

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开区域．$\exists T$，$0<T\leqslant+\infty$，使得

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

在 $\bar{Q}_T$ 上存在解 $u(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t))$．

$$\Gamma=[\bar{\Omega}\times\{0\}]\cup[\partial\Omega\times(0,T]]$$

称为 Q_T 的抛物边界．

闭集$\Sigma\subset\mathbf{R}^m$ 称为解 $u(x,t)$ 的(正)不变区域：若$u(x,t)|_\Gamma\subset\Sigma$ 时即有 $u(x,t)\in\Sigma(\forall(x,t)\in Q_T)$．

建立不变区域 Σ，就是对解建立了另一类型的先验估计(不是用初始与边界数据来估计)，这对证明解的存在性起着重要的作用，但不一定能用之来证明唯一性．

6.1 反应扩散方程组的不变矩形

在第一章定理 1.2.7 中,对常微分方程组建立了不变矩形，这一结果可以推广到反应扩散方程组的情形。这一节仍然是单调方法的一个应用。

考虑如下问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m) & ((x,t)\in Q_T)\\ u_i(x,t)=g_i(x,t) \text{ 或 } \dfrac{\partial u_i}{\partial n}=0 & ((x,t)\in S_T)\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x) & (x\in\bar{\Omega},\ i=1,2,\cdots,m)\end{cases} \tag{1.1}$$

它满足第五章中所给的条件.

定理 6.1.1 记

$$\Sigma_a^b=\bigcap_{i=1}^{m}[a_i,b_i]\ (-\infty<a_i<b_i<+\infty)$$

设

1° 当 $(x,t)\in Q_T$, $u\in\Sigma_a^b$ 时

$$f_i(x,t,u)|_{u_i=a_i}\geqslant 0$$

$$f_i(x,t,u)|_{u_i=b_i}\leqslant 0\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

2° 当 $x\in\Omega$ 时 $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_m(x))\in\Sigma_a^b$; 若是 Dirichlet 边条件,还设

3° 当 $(x,t)\in S_T$ 时 $(g_1(x,t),\cdots,g_m(x,t))\in\Sigma_a^b$

则 (1.1) 的解

$$u(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t))\in\Sigma_a^b((x,t)\in\bar{Q}_T).$$

证明 令

$$\bar{f}_i(x,t,u)=\sup_{a_j\leqslant\lambda_j\leqslant u_j} f_i(x,t,\xi_1,\cdots,\xi_m)|_{\xi_i=u_i}$$

$$(j=1,2,\cdots,m,\ j\neq i)$$

$$\underline{f}_i(x,t,u)=\inf_{a_j\leqslant\lambda_j\leqslant b_j} f_i(x,t,\xi_1,\cdots,\xi_m)|_{\xi_i=u_i}$$

$$(j=1,2,\cdots,m,\ j\neq i)$$

考察 (1.1) 的上、下控制系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=\bar{f}_i(x,t,u) & ((x,t)\in Q_T)\\ u_i(x,t)=g_i(x,t)\ \text{或}\ \dfrac{\partial u_i}{\partial n}=0 & ((x,t)\in S_T)\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x) & (x\in\bar{\Omega})\ (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}\tag{1.2}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+L_iu_i=\underline{f}_i(x,t,u) & ((x,t)\in Q_T)\\ u_i(x,t)=g_i(x,t)\ \text{或}\ \dfrac{\partial u_i}{\partial n}=0 & ((x,t)\in S_T)\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x) & (x\in\bar{\Omega})\ (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}\tag{1.3}$$

它们在 $\sum_a^b$ 上均是拟增系统. 显然 $\tilde{u}=(b_1,\cdots,b_m)$ 是(1.2)的上解, $\underline{u}=(a_1,\cdots,a_m)$ 是 (1.3) 的下解. $\tilde{u}$, $\underline{u}$ 构成 (1.1) 的上、下解,于是

$$a_i\leqslant u_i(x,t)\leqslant b_i\quad((x,t)\in\bar{Q}_T,\ i=1,2,\cdots,m)$$

即 $u(x,t)\in\sum_a^b((x,t)\in\bar{Q}_T)$. 证毕.

定理 6.1.1 中的条件 1° 的几何意义是: 在 $\partial\sum_a^b$ 上,向量 $f=(f_1,\cdots,f_m)$或与 $\partial\sum_a^b$ 相切或指向$\sum_a^b$ 的内部. 这里 $\sum_a^b$ 就是(1.1)的不变矩形.

例 1 Hodgkin-Huxley 方程 ([CCS], [Has]), 有时也叫做神经传导方程

$$\begin{cases}cu_t=\dfrac{1}{R}u_{xx}+g(u,v,w,z)\\ v_t=\varepsilon_1v_{xx}+g_1(u)(h_1(u)-v)\\ w_t=\varepsilon_2w_{xx}+g_2(u)(h_2(u)-w)\\ z_t=\varepsilon_3z_{xx}+g_3(u)(h_3(u)-z)\end{cases}\tag{1.4}$$

其中 c, R 是正常数, $\varepsilon_i(i=1,2,3)$ 是非负常数,

$$g(u,v,w,z)=k_1v^3w(c_1-u)+k_2z^4(c_2-u)+k_3(c_3-u)$$

$k_i > 0 (i = 1, 2, 3)$, $c_1 > c_3 > 0 > c_2$ 是常数.

$$g_i(u) > 0,\ 1 > h_i(u) > 0 \quad (i = 1,2,3).$$

在这个模型中，v, w, z 表示化学浓度，因而是非负的. 而 u 表示电势. (1.4) 是 A. L. Hodgkin, A. F. Huxley 等人研究电信号在鱿鱼的轴突中传播的生理现象时导出的一个数学模型.

我们来求 (1.4) 的不变矩形

$$\Sigma = \{(u, v, w, z) | \bar{c}_1 \leqslant u \leqslant \bar{c}_2,\ 0 \leqslant v \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant w \leqslant \beta,\ 0 \leqslant z \leqslant \gamma\} \tag{1.5}$$

其中 $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, α, β, γ 是待定的常数.

容易验证:

$$g_1(u)(h_1(u) - v)|_{v=0} > 0$$

$$g_1(u)(h_1(u) - v)|_{v=\alpha} < g_1(u)(1 - \alpha) \leqslant 0$$

只要 $\alpha \geqslant 1$. 类似地，只要 β, $\gamma \geqslant 1$, 有

$$g_2(u)(h_2(u) - w)|_{w=0} > 0$$

$$g_2(u)(h_2(u) - w)|_{w=\beta} < 0$$

$$g_3(u)(h_3(u) - z)|_{z=0} > 0$$

$$g_3(u)(h_3(u) - z)|_{z=\gamma} < 0$$

当 $0 \leqslant v \leqslant \alpha$, $0 \leqslant w \leqslant \beta$, $0 \leqslant z \leqslant \gamma$ 时

$$\frac{1}{c} g(u, v, w, z)|_{u=\bar{c}_1}$$

$$= \frac{1}{c}[k_1 v^3 w(c_1 - \bar{c}_1) + k_2 z^4(c_2 - \bar{c}_1) + k_3(c_3 - \bar{c}_1)] \geqslant 0$$

只要 $\bar{c}_1 \leqslant c_3$ (也就有 $\bar{c}_1 < c_3 < c_1$);

$$\frac{1}{c} g(u, v, w, z)|_{u=\bar{c}_2} \leqslant 0$$

只要 $\bar{c}_2 \geqslant c_1$.

因此，只要 $\bar{c}_1 \leqslant c_2$, $\bar{c}_2 \geqslant c_1$, α, β, $\gamma \geqslant 1$, (1.5) 就是 (1.4) 的不变矩形.

例 2 Belousov-Zhabotinskii 反应的 Field-Noyes 方程([Ty] p.43)

$$\begin{cases} E\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon_1 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \xi + \eta - q\xi^2 - \xi\eta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \eta + 2h\rho - \xi\eta \\ p\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_3 \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \xi - \rho \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 ξ, η, ρ 是无量纲化的化学浓度，$E, q, h, p > 0$，$\varepsilon_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$ 是常数。

下面我们求形如

$$\Sigma = \{(\xi, \eta, \rho) \mid 0 \leqslant \xi \leqslant a,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b,\ 0 \leqslant \rho \leqslant c\} \tag{1.7}$$

的不变矩形。

容易验证：当 $(\xi, \eta, \rho) \in \Sigma$ 时，

$$\frac{1}{E}(\xi + \eta - q\xi^2 - \xi\eta)|_{\xi=0} = \eta \geqslant 0$$

$$\frac{1}{E}(\xi + \eta - q\xi^2 - \xi\eta)|_{\xi=a}$$

$$= \frac{1}{E}[a(1 - qa) + \eta(1 - a)] \leqslant 0$$

其中取 $a \geqslant \max\left(1, \dfrac{1}{q}\right)$；

$$(-\eta + 2h\rho - \xi\eta)|_{\eta=0} = 2h\rho \geqslant 0$$

$$(-\eta + 2h\rho - \xi\eta)|_{\eta=b} = 2h\rho - b(1 + \xi)$$

$$\leqslant 2hc - b \leqslant 0$$

其中取 $b \geqslant 2hc$；

$$\frac{1}{p}(\xi - \rho)|_{\rho=0} \geqslant 0$$

$$\frac{1}{p}(\xi - \rho)|_{\rho=c} \leqslant \frac{1}{p}(a - c) \leqslant 0$$

其中取 $c \geqslant a$。

这就证明了：若 $a \geqslant \max\left(\dfrac{1}{q}, 1\right)$，$c \geqslant a$，$b \geqslant 2hc$，则(1.7)

是 (1.6) 的不变矩形。

例 3 神经传导的 Fitz Hugh-Nagumo 方程

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f(v) - u \\ u_t = \varepsilon u_{xx} + \sigma v - \gamma u \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $\sigma, \gamma > 0, \varepsilon \geqslant 0$ 均为常数。 $f(v) = v(v-\beta)(1-v), 0 < \beta < 1$。这是 Hodgkin-Huxley 方程组的一个简化模型。

在这个例子中我们要给出一个不变矩形的几何构造法。

在图 6-1.1 中画出了 $f(v) - u = 0$, $\sigma v - \gamma u = 0$ 的曲线和直线，并标明了使 $f(v) - u > 0 (< 0)$, $\sigma v - \gamma u > 0 (< 0)$ 的区域。图中还画出了一个矩形 $ABCD$，上底 AD 取得它位于 $\sigma v - \gamma u = 0$ 之上，即 $\sigma v - \gamma u|_{AD} \leqslant 0$，而使 $\sigma v - \gamma u|_{BC} > 0$。两个侧边 AB, CD 均取为 $v =$ 常数，使得 $f(v) - u|_{AB} > 0$, $f(v) - u|_{CD} < 0$。若取

$$\Sigma = \text{矩形} ABCD$$

则在 $\partial\Sigma$ 上 $F = (f(v) - u, \sigma v - \gamma u)$ 指向 Σ 内或与 $\partial\Sigma$ 相切。因此，Σ 是 (1.8) 的不变矩形。照此，我们可以构造任意大的这种不变矩形。

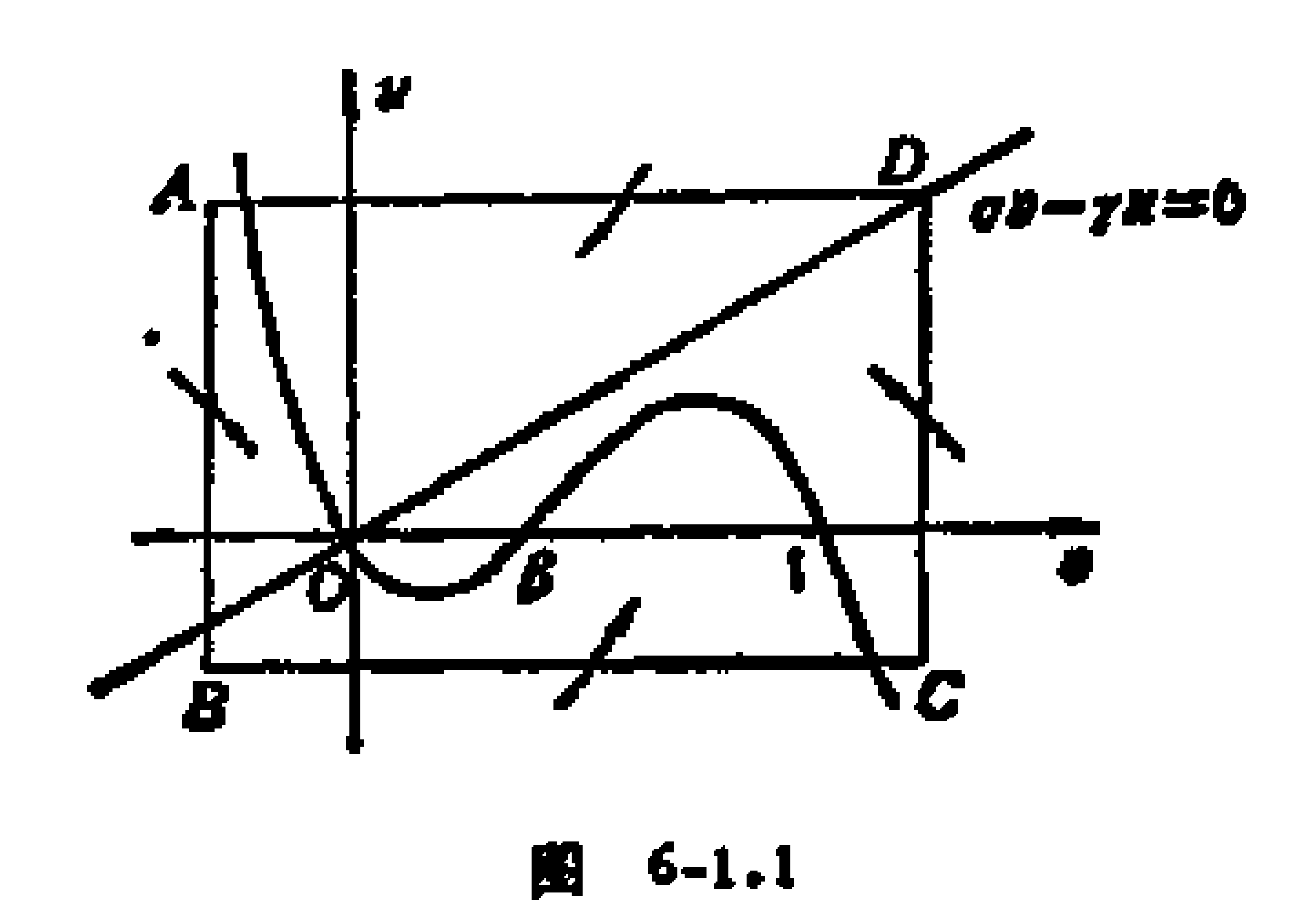


图 6-1.1

6.2 反应扩散方程组的不变区域

设 $a_{ij}^{(\mu)} = a_{ij}$, $b_i^{(\mu)} = b_i$, 即 $L_\mu = L$ 不依赖于 μ。考虑

$$L_\mu u_\mu = f_\mu(x, t, u) \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.1}$$

或写作

$$Lu = f(x, t, u)$$

其中

$$u = (u_1, \cdots, u_m), \quad f = (f_1, \cdots, f_m)$$

设Σ是 $\mathbf{R}^m$ 中的凸集,我们把

$$\Sigma_\rho = \{u \mid u \in \mathbf{R}^m, \operatorname{dist}(u, \Sigma) < \rho\} \quad (\rho > 0)$$

叫做Σ的平行集(图 6-2.1),其中 dist (u, Σ) 是点 u 与集合Σ的距离.

定理 6.2.1(H.F.Weinberger,1975[We]) 设 $\Sigma \subset \mathbf{R}^m$ 是有界闭凸集,有如下性质:若存在 $\varepsilon > 0$,使得对 $\forall \rho \in (0, \varepsilon)$,平行集 Σ_ρ 有性质:$P(u^*)$ 是 Σ_ρ 的边界 $\partial\Sigma_\rho$ 上任意一点 u^* 处的单位外法向量,对于 $\forall (x, t) \in Q_T$ 和 $u^* \in \partial\Sigma_\rho$ 有

$$P(u^*) \cdot f(x, t, u^*) < 0 \qquad (2.2)$$

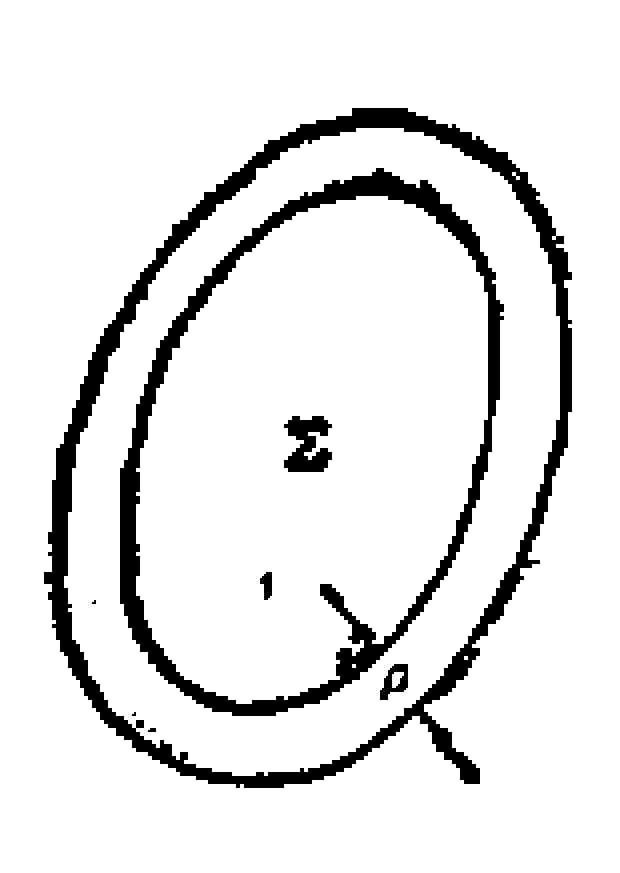


图 6-2.1

则Σ是(2.1)的解 $u(x, t)$ 的不变区域.

证明　用反证法.若不然.则$\exists(\bar{x},\bar{t}) \in Q_T$,而 $u(\bar{x},\bar{t}) \bar{\in} \Sigma$.从而$\exists \rho \in (0, \varepsilon)$,使得 $u(\bar{x},\bar{t}) \bar{\in} \bar{\Sigma}_\rho$.因为 $u|_\Gamma \subset \Sigma$,所以 $u|_\Gamma$ 上每一点是 Σ_ρ 的内点.因为当 $x \in \bar{\Omega}$ 时 $u(x,0) \in \Sigma \subset \Sigma_\rho$,由 $u(x, t)$ 的连续性知道,一定存在 $t^* > 0$,使得 $\forall (x, t) \in Q_{t^*}$, $u(x,t) \in \Sigma_\rho$.取这种 t^* 的上确界,仍记为 t^*.当 $(x, t) \in Q_{t^*}$ 时 $u(x, t) \in \Sigma_\rho$,一定存在 $x^* \in \Omega$,使 $u(x^*, t^*) = u^* \in \partial\Sigma_\rho$.

由假定有

$$P(u^*) \cdot f(x^*, t^*, u^*) < 0 \qquad (2.3)$$

又因为 Σ_ρ 是凸集,因而 Σ_ρ 位于过 u^* 的Σ_ρ 的切平面的一侧(见图 6-2.2).因而

$$(u - u^*) \cdot p(u^*) \leqslant 0 \quad (\forall u \in \Sigma_\rho)$$

$\left(\text{即 } u - u^* \text{ 和 } P(u^*) \text{ 的夹角不小于 } \frac{\pi}{2}\right)$,即

$$u \cdot P(u^*) \leqslant u^* \cdot P(u^*)$$

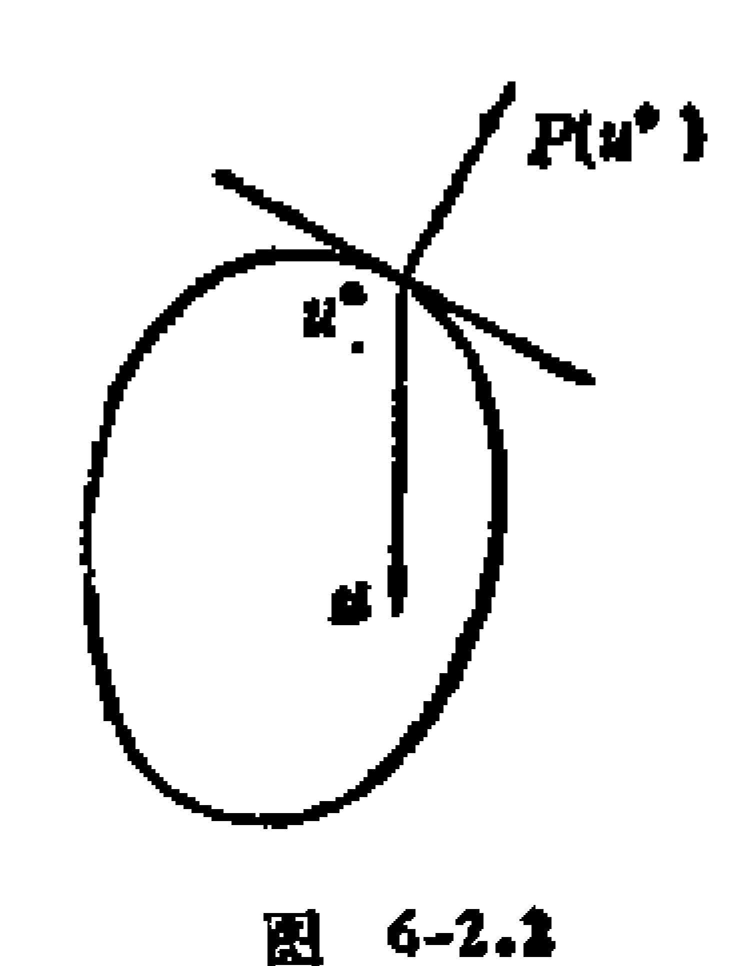


图 6-2.2

这就是说标量 $u(x,t)\cdot P(u^*)$ 在 (x^*, t^*) 处达到它在 Q_{t^*} 上的最大值。

把向量 $P(u^*)$ 与方程组 (2.1) 作内积得 $P(u^*)\cdot u(x, t)$ 满足的方程

$$L(P\cdot u) = P\cdot f$$

因为 $P(u^*)\cdot u(x, t)$ 在 (x^*, t^*) (Q_{t^*} 的内点)上达到最大值，故

$$L(P\cdot u)|_{(x^*,t^*)} = P\cdot f|_{(x^*,t^*)} \geqslant 0$$

与 (2.3) 矛盾. 证毕.

条件 (2.2) 通常称为切触条件 (tangency condition).

例 4 ([Sm], [BDG]) 在液态的超导性研究中提出了下列方程组

$$u_t = D\Delta u + (1 - |u|^2)u \tag{2.4}$$

其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T$, $\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)^T$,

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m),\ d_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} d_i > 0$$

由定理 6.1.1 知,

$$\Sigma_1 = \bigcap_{i=1}^{m} [-C_i, C_i],\ \Sigma_2 = \bigcap_{i=1}^{m} [0, C_i]$$

$$\Sigma_3 = \bigcap_{i=1}^{m} [-C_i, 0]$$

均是 (2.4) 的不变矩形，其中常数 $C_i \geqslant 1$.

当 $d_1 = d_2 = \cdots = d_m > 0$ 时. 令

$$\Sigma_c = \{u | u\in \mathbf{R}^m,\ |u|^2 \leqslant C\}\quad (C \geqslant 1),$$

$$f(u) = (1 - |u|^2)u$$

对 $\forall \varepsilon > 0$. 当 $u \in \partial\Sigma_{c+\varepsilon}$ 时

$$P(u)\cdot f(u) = [1 - (C + \varepsilon)^2] < 0$$

其中 $P(u)$ 是 $u \in \partial\Sigma_{c+\varepsilon}$ 处 $\Sigma_{c+\varepsilon}$ 的单位外法向量. 因此由定理 6.2.1 知，Σ_c 是 (2.4)的不变区域.

定理 6.2.1 中的Σ究竟是什么不具体，因而不好使用. 在应用中希望Σ是一些性质比较具体的凸区域.

下面我们将对更一般的耦合抛物型方程组给出较具体的凸区域Σ．为书写简单，假定空间变量只有一个，即设$n=1$．考虑下列方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-D(u,x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+M(u,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(u,t) & ((x,t)\in Q_T)\\
u(x,0)=\varphi(x) & (x\in\Omega)\\
u(x,t)=g(x,t)\ \text{或}\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & ((x,t)\in S_T)
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

其中Ω是$\mathbf{R}^1$中的有界开区间．$D(u,x)$，$M(u,x)$都是$m\times m$阶矩阵函数，D是对称正定矩阵，我们总假设存在$T>0(T\leqslant+\infty)$，使得(2.5)在Q_T上有解$u(x,t)$．

设$G_i(v)$是$\mathbf{R}^m$中开集U到$\mathbf{R}^1$的光滑函数，对$i\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\nabla G_i=\left(\dfrac{\partial G_i}{\partial u_1},\cdots,\dfrac{\partial G_i}{\partial u_m}\right)\neq\theta$，满足$G_i(v)\leqslant 0(v\in U)$的点集是一个“半空间”．我们考虑由有限个这样的“半空间”交出来的$\mathbf{R}^m$中的区域Σ．

$$
\Sigma=\bigcap_{i=1}^{N}\{v\mid v\in U,\ G_i(v)\leqslant 0\}
\tag{2.6}
$$

我们要来讨论在什么条件下Σ可能成为(2.5)解的不变区域．

定义 6.2.2 光滑函数$G:\mathbf{R}^m\to R^1$在$v_0\in\mathbf{R}^m$叫做拟凸的(quasi-convex)，若由$\forall\eta\in R^m$，$\nabla G(v_0)\cdot\eta=0$能推出$\eta^T D^2G(v_0)\cdot\eta\geqslant 0$，其中

$$
D^2G(v_0)=\left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_i\partial v_j}\right)\bigg|_{v=v_0}
$$

是$G(v)$在v_0的 Hesse 矩阵．

定理 6.2.3 (Chueh-Conley-Smoller，1977，[CCS]) 设Σ由(2.6)定义．记

$$
\Sigma_\varepsilon=\bigcap_{i=1}^{N}\{v\mid v\in U,\ G_i(v)\leqslant\varepsilon\}
$$

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对 $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，$\forall t \in (0, T]$，$\forall v_0 \in \partial\sum_\varepsilon$，$\forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 下列条件成立：

1° 对 $\forall x \in \Omega$，$\nabla G_i(v_0)$ 是 $D(v_0, x)$，$M(v_0, x)$ 的左特征向量，即 $\exists \mu$ 和 λ，使得

$$\nabla G_i(v_0) D(v_0, x) = \mu \nabla G_i(v_0)$$

$$\nabla G_i(v_0) M(v_0, x) = \lambda \nabla G_i(v_0)$$

2° 若 $\nabla G_i(v_0) D(v_0, x) = \mu \nabla G_i(v_0) (\mu \neq 0)$，则 G_i 在 v_0 是拟凸的；

3° $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0, t) < 0$。

$u(x, t)$ 是 (2.5) 的解，对于 Dirichlet 边条件情形，若 $u(x, t)|_\Gamma \subset \sum$，则 $u(x,t) \in \sum((x, t) \in Q_T)$；对于 Neumann 边条件情形，若 $u(x, 0) \in \sum(x \in \Omega)$，则 $u(x, t) \in \sum((x, t) \in Q_T)$。

证明　用反证法。若不然，则 $\exists \bar{t} \in (0, T]$，$\bar{x} \in \Omega$，$\exists i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使得

$$G_i(u(\bar{x}, \bar{t})) >$$

于是 $\exists \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，

$$G_i(u(\bar{x}, \bar{t})) > \varepsilon$$

对此 i 与 ε。令

$$t_0 = \inf\{\bar{t} | \bar{t} \in (0, T], \exists \bar{x} \in \Omega, G_i(u(\bar{x}, \bar{t})) > \varepsilon\}$$

因为 $G_i(u(x, 0)) \leqslant 0$，所以 $\exists t^* > 0$，当 $0 \leqslant t \leqslant t^*$ 时 $G_i(u(x, t)) < \varepsilon (\forall x \in \Omega)$。因此 $t_0 > 0$。由 t_0 定义，一定存在 $x_0 \in \bar{\Omega}$，使得

$$G_i(u(x, t)) \leqslant \varepsilon \quad (\forall x \in \Omega, 0 \leqslant t \leqslant t_0) \tag{2.7}$$

$$G_i(u(x_0, t_0)) = \varepsilon \tag{2.8}$$

对于 Dirichlet 边条件情形，一定有 $x_0 \in \Omega$。

若能推出

$$\left.\frac{\partial G_i(u(x, t))}{\partial t}\right|_{(x_0, t_0)} < 0 \tag{2.9}$$

则与 (2.7)，(2.8) 矛盾。从而证明了本定理。

为证 (2.9)，首先计算 $\frac{\partial G_i(u(x, t))}{\partial t}$。利用 $u(x, t)$ 是解，得

$$\frac{\partial G_i(u(x,t))}{\partial t} = \nabla G_i(u(x,t))\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \nabla G_i\left[D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - M\frac{\partial u}{\partial x} + f(u,t)\right]$$

利用条件 1° 得

$$\left.\frac{\partial G_i(u(x,t))}{\partial t}\right|_{(x_0,t_0)} = \left[\mu\nabla G_i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right.$$

$$\left. - \lambda\nabla G_i\frac{\partial u}{\partial x} + \nabla G_i\cdot f(u,t)\right]_{(x_0,t_0)} \tag{2.10}$$

若令 $h(x) = G_i(u(x,t_0))$. 由 (2.7) (2.8) 知，$x = x_0$ 是 $h(x)$ 在 Ω 上的最大值点，若 $x_0\in\Omega$，则

$$h'(x_0) = 0,\ h''(x_0) \leqslant 0$$

从而有

$$h'(x_0) = \nabla G_i(u(x,t))\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,t_0)} = 0 \tag{2.11}$$

$$h''(x_0) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T D^2G_i(u(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}\right.$$

$$\left. + \nabla G_i(u(x,t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{(x_0,t_0)} \leqslant 0 \tag{2.12}$$

由条件 2°,

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T D^2G_i(u(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{(x_0,t_0)} \geqslant 0$$

从而有

$$\nabla G_i(u(x,t))\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_0,t_0)} \leqslant 0 \tag{2.13}$$

由矩阵 D 的正定性推出 $\mu>0$. 最后由 (2.10),(2.11),(2.13) 及条件 3° 证得 (2.9)，对 Neumann 边条件情形的证明留做习题. 证毕.

注 1 由定理 6.2.3 的证明可见，定理中的假设 2° 和 3° 可以用下列假设 2′ 和 3′ 来代替:

2′ 若 $\nabla G_i(v_0)D(v_0,x) = \mu\nabla G_i(v_0)$ ($\mu\neq 0$)，则 G_i 在 v_0 是

强凸的，即若 $\nabla G_i(v_0)\cdot\eta=0$，则有 $\eta^T D^2 G_i(v_0)\eta>0$；

3′ $\nabla G_i(v_0)\cdot f(v_0,t)\leqslant 0$。

注 2 若 D 和 M 是对角矩阵，又取 $G_i(v)=v_i-c$，c 是某常数，则 $\nabla G_i=(0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)$ 是 D 和 M 的左特征向量，μ，$\lambda\ne 0$。$G_i(v)$ 处处拟凸。因此半空间

$$\{v\,|\,v_i-c\leqslant 0\}$$

是方程 (2.5) 的不变区域，只要对充分小的 $\varepsilon>0$，

$$f_i(v_1,\cdots,v_{i-1},c+\varepsilon,v_{i+1},\cdots,v_m,t)<0$$

注 3 若 $D=I$，$M=I$ 是单位矩阵，则任何由 (2.6) 给出的 $\mathbf{R}^m$ 中的凸闭域 Σ 都是 (2.5) 的不变区域，只要对充分小的 $\varepsilon>0$，

$$\nabla G_i\cdot f|_{\partial\Sigma_\varepsilon}<0,\ \text{或}\ \nabla G_i\cdot f|_{\partial\Sigma}<0$$

$$(i=1,2,\cdots,N)$$

注 4 对于边条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$，不变区域 Σ 的含意是：若初值 $u(x,0)\in\Sigma(x\in\Omega)$，则 (2.5) 的解 $u(x,t)\in\Sigma((x,t)\in Q_T)$。

例 5 考察方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\Delta u_i+u_i[a_{i1}(u_1-u_1^*)+a_{i2}(u_2-u_2^*)$$
$$+a_{i3}(u_3-u_3^*)]\quad(i=1,2,3)\tag{2.14}$$

其中 $u_i^*>0\ (i=1,2,3)$ 是常数，a_{ij} 是常数。记

$$A=(a_{ij})_{3\times 3}$$

设 $\dfrac{1}{2}(A+A^T)$ 是负定矩阵。我们来求它的不变区域。

记

$$f_i(u_1,u_2,u_3)=u_i\sum_{j=1}^{3}a_{ij}(u_j-u_j^*)$$

$$f(u)=(f_1(u),f_2(u),f_3(u))$$

取 $G(u)$ 使得

$$\nabla G(u)=\left(\frac{u_1-u_1^*}{u_1},\ \frac{u_2-u_2^*}{u_2},\ \frac{u_3-u_3^*}{u_3}\right)$$

即

$$G(u)=\sum_{i=1}^{3}\left(u_i-u_i^*-u_i^*\ln\frac{u_i}{u_i^*}\right)$$

则

$$\nabla G(u)\cdot f(u)=u^T\left[\frac{1}{2}(A+A^T)\right]u<0\quad(u\neq 0)$$

其中 $u^T=(u_1,u_2,u_3)$.

易验证：对 $\forall c>0$.

$$\sum_c=\{u\mid G(u)\leqslant c\}$$

是闭凸区域，因此 $\sum_c$ 是 (2.14) 的不变区域.

在许多应用中，向量场 f 满足的是较弱的条件 3′ 即 $\nabla G_i\cdot f|_{\partial\Sigma}\leqslant 0$，即在 $\partial\sum$ 的某些地方 ∇G_i 和 f 相切(向量场 f 不是严格指向 $\sum$ 内的)．例如，在生态方程中考虑群体的密度，化学反应中的反应浓度常常满足 (2.5)，其中的 f 是

$$f(u)=(u_1M_1(u),u_2M_2(u),\cdots,u_mM_m(u)).$$

因此，若取 $G_i(u)=-u_i$，$\sum=\{u\mid G_i(u)\leqslant 0\}$，则

$$\partial\sum=\{u\mid u_i=0\}$$

而

$$\nabla G_i=(0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0),\ \nabla G_i\cdot f|_{u_i=0}=0$$

由生物学和化学可知显然有 $u_i\geqslant 0$ (密度、浓度是非负的)．但我们不能利用前面的定理得到这个结论．为把定理 6.2.3 推广到这种情形．我们引进 (2.5) 的解关于 f 是连续依赖的假定．

定义 6.2.4 称方程组 (2.5) 是 f 稳定的，若 f_l 及其导数在 $\mathbf{R}^m$ 的 $\forall$ 子集上一致收敛到 f 及其相应的导数．记 u_l 和 u 分别是 (2.5) 相应于 f_l 和 f 的解．若 u 存在，则 l 充分大时 u_l 存在，而在 Ω 的一个稠密集上存在 u_l 的一个子列收敛到 u.

定理 6.2.5 设 (2.5) 是 f 稳定的，定理 6.2.3 中的条件除 3° 换成

3′ $\forall 0<t\leqslant T$，$\forall v_0\in\partial\sum$ 有 $\nabla G_i(v_0)\cdot f(v_0,t)\leqslant 0$

外成立．则定理 6.2.3 的结论仍成立.

证明 可以构造一个光滑向量场 $h(v)$ 使得 $\nabla G_i \cdot h(v)|_{\partial\Sigma} < 0$。考虑

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + M\frac{\partial v}{\partial x} + f + \frac{1}{l}h\left(\text{即令 } f_l = f + \frac{1}{l}h\right)$$

初边条件与 (2.5) 相同. 当 l 充分大时存在解 u_l. 因为

$$\nabla G_i \cdot \left(f + \frac{1}{l}h\right)\Big|_{\partial\Sigma} \leqslant \frac{1}{l}[\nabla G_i \cdot h]_{\partial\Sigma} < 0$$

由定理 6.2.3 知 $u_l \in \Sigma$, 因此 $u \in \Sigma$. 证毕.

6.3 比较定理. $t \to +\infty$ 时解的渐近行为

我们知道可以通过比较定理来研究方程式或方程组解的渐近行为. 比较函数(上、下解)实际上也给出了初边值问题解的不变区域. 本节通过与反应扩散方程相应的常微分方程的解来估计反应扩散方程的解, 从而建立一种比较定理. 我们将建立两个比较定理,一个可由方程组的极值原理得到,另一个则由不变区域的一般理论得到.

考虑 Neumann 边条件下的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u, t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_m)$, $D = \text{diag}\,(d_1, \cdots, d_m)$, $d_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, $\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)$, $f(u, t) = (f_1(u, t), \cdots, f_m(u, t))$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x))$.

我们假设

1° $\Sigma = \bigcap\limits_{i=1}^{m}[a_i, b_i]$ $(-\infty < a_i < b_i < +\infty)$. 对 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $u \in \Sigma$,

$$f_i|_{u_i=a_i} \geqslant 0, \quad f_i|_{u_i=b_i} \leqslant 0$$

2° 对 $\forall T > 0$, $u, v \in \sum$, $s, t \in [0, T]$, 存在常数 K_T,

$$|f(u, t) - f(v, s)| \leqslant K_T[|t-s|^\alpha + |u-v|]$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

3° $\varphi(x) \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi(x) \in \sum(\forall x \in \bar{\Omega})$.

显然,$\sum$是 (3.1) 的不变矩形.

把集合 $N_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ 分解为两个互不相交的集合 σ_M 和 σ_m, 即 $\sigma_M \cup \sigma_m = N_m$, $\sigma_M \cap \sigma_m = \varnothing$. 例如, 可取 $\sigma_M = \{N_m$ 中的奇数$\}$. $\sigma_m = \{N_m$ 中的偶数$\}$. 定义函数 $\bar{f}_i$, $\underline{f}_i$ 如下:

$$\bar{f}_i(u, t) = \begin{cases} \sup\limits_{a_j \leqslant \xi_j \leqslant u_j} \{f_i(\xi)|_{\xi_i=u_i} | j = 1, 2, \cdots, m, j \neq i\}, & 若\ i \in \sigma_M \\ \sup\limits_{u_j \leqslant \xi_j \leqslant b_j} \{f_i(\xi)|_{\xi_i=u_i} | j = 1, 2, \cdots, m, j \neq i\}, & 若\ i \in \sigma_m \end{cases}$$

$$\underline{f}_i(u, t) = \begin{cases} \inf\limits_{a_j \leqslant \xi_j \leqslant u_j} \{f_i(\xi)|_{\xi_i=u_i} | j = 1, 2, \cdots, m, j \neq i\}, & 若\ i \in \sigma_M \\ \inf\limits_{u_j \leqslant \xi_j \leqslant b_j} \{f_i(\xi)|_{\xi_i=u_i} | j = 1, 2, \cdots, m, j \neq i\}, & 若\ i \in \sigma_m \end{cases}$$

易见若 $i \in \sigma_M (i \in \sigma_m)$, 则 $\bar{f}_i$ 是拟增(拟减)的,而 $\underline{f}_i$ 是拟减(拟增)的.

现令

$$h(v, t) = (h_1(v, t) \cdots, h_m(v, t))$$

$$h_i(v, t) = \begin{cases} \bar{f}_i(v, t) & (若\ i \in \sigma_M) \\ \underline{f}_i(v, t) & (若\ i \in \sigma_m) \end{cases}$$

由于 σ_M 取法的不同,向量函数共有 2^m 个.

下面我们要做的是把常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = h(v, t) \\ v_i(0) = v_i^0 \end{cases} \tag{3.2}$$

的解与 (3.1) 的解进行比较,建立一个比较定理. 这里

$$v_i^0 = \begin{cases} \sup\limits_{\bar{\Omega}} \varphi_i(x) & (若 i \in \sigma_M) \\ \inf\limits_{\Omega} \varphi_i(x) & (若 i \in \sigma_m) \end{cases} \tag{3.3}$$

显然，(3.2) 的解是存在唯一的，且 Σ 是它的不变矩形。

定理 6.3.1 (比较定理) 在本节一开始的各项假设下，(3.1) 的解 $u(x,t)$ 与 (3.2) 的解 $V(t)$ 有下列关系

$$\left.\begin{array}{ll} u_i(x,t)\leqslant V_i(t) & (\text{若 } i\in\sigma_M) \\ V_i(t)\leqslant u_i(x,t) & (\text{若 } i\in\sigma_m)\end{array}\right\}(x,t)\in\Omega\times[0,+\infty)$$

证明留作习题(利用拟增系统的比较原理)

现再定义 f_i^+，f_i^- 如下：

$$\begin{aligned} f_i^+(u,t)=\sup\{f_i(\xi)|_{\xi_i=u_i};\ & a_j\leqslant\xi_j\leqslant u_j,\ \text{若 } j\in\sigma_M,\ j\neq i; \\ & u_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j,\ \text{若 } j\in\sigma_m,\ j\neq i\} \\ f_i^-(u,t)=\inf\{f_i(\xi)|_{\xi_i=u_i};\ & a_j\leqslant\xi_j\leqslant u_j,\ \text{若 } j\in\sigma_M,\ j\neq i; \\ & u_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j,\ \text{若 } j\in\sigma_m,\ j\neq i\}\end{aligned}$$

易见，若 $j\neq i$，$j\in\sigma_M$，($j\in\sigma_m$)，则 f_i^+ 关于 u_j 是非减(非增)的，f_i^- 关于 u_j 是非增(非减)的，当 $\sigma_M\neq\varnothing$，$\sigma_m\neq\varnothing$ 时，f_i^+，f_i^- 均是混拟单调的。

现令

$$H_{\sigma_M}(v,t)=(H_1(v,t),\cdots,H_n(v,t))$$

$$H_i(v,t)=\begin{cases} f_i^+(v,t) & (\text{若 } i\in\sigma_M) \\ f_i^-(v,t) & (\text{若 } i\in\sigma_m)\end{cases}$$

考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}=H_{\sigma_M}(v,t) \\ v(0)=v_i^0 \end{cases} \tag{3.4}$$

v_i^0 由 (3.3) 给出。显然 (3.4) 存在唯一解 $v(t)$，并以 Σ 为不变矩形。下面我们将 (3.1) 的解 $u(x,t)$ 与(3.4)的解 $v(t)$ 进行比较建立一个比较定理。

定理 6.3.2 (比较定理) 在本节一开始的各项假定下，又设 (3.1) 是 t 稳定的。则 (3.1) 的解 $u(x,t)$ 和 (3.4) 的解 $v(t)$ 有下列关系：

$$u_i(x,t) \leqslant v_i(t) \quad (\text{若 } i\in\sigma_M,\ (x,t)\in\Omega\times[0,+\infty))$$
$$v_i(t) \leqslant u_i(x,t) \quad (\text{若 } i\in\sigma_m,\ (x,t)\in\Omega\times[0,+\infty))$$

证明　令 $w=(w_1,\cdots,w_m)$，其中

$$w_i=\begin{cases}u_i-v_i & (\text{若 } i\in\sigma_M)\\ v_i-u_i & (\text{若 } i\in\sigma_m)\end{cases}$$

再令

$$G(w,t)=(g_1(w,t),\cdots,g_m(w,t))$$
$$g_i(w,t)=\begin{cases}f_i(u,t)-H_i(v,t) & (\text{若 } i\in\sigma_M)\\ H_i(v,t)-f_i(u,t) & (\text{若 } i\in\sigma_m)\end{cases}$$

因为若 $i\in\sigma_M$，则 $u_i=w_i+v_i$，若 $i\in\sigma_m$，则 $u_i=v_i-w_i$，而 $v_i=v_i(t)$，所以 g_i 实际上是 w 和 t 的函数。w 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=D\Delta w+G(w,t)\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)}=0\end{cases}\tag{3.5}$$

由 (3.1) 及 (3.3) 知 $w(x,0)\leqslant 0(\forall x\in\bar{\Omega})$。

令

$$\Sigma_0=\{(w_1\cdots,w_m)\,|\,w_j\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,m\}$$

我们证明 Σ_0 是 (3.5) 的不变区域。

设 $i\in\sigma_M$。当 $w_j\leqslant 0\ (j=1,\cdots,m,\ j\neq i)$，$w_i=0$ 时

$$\begin{aligned}g_i(w,t)&=f_i(u,t)-H_i(v,t)\\&=f_i(u,t)-f_i^+(v,t)\\&\leqslant f_i^+(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_m,t)\\&\quad -f_i^+(v_1,\cdots,v_{i-1},u_i,v_{i+1},\cdots,v_m,t)\\&\leqslant 0.\end{aligned}$$

当 $i\in\sigma_m$ 时同样可证，$w_j\leqslant 0\ (j=1,2,\cdots,m,\ j\neq i)$，$w_i=0$ 时 $g_i(w,t)\leqslant 0$。因此 Σ_0 是 (3.5) 的不变区域，即证明了定理的结论。证毕。

作为定理的应用举下面的例子。

例 5（猎手——食饵系统Predator-prey systems）　我们研究

生态学中只考虑两个种群的捕食和被捕食的相互作用. 例如猫和老鼠,熊猫和箭竹等等. 我们理想化地认为种群是连续分布的. 且满足下列方程组

$$
\begin{cases}
u_t = \alpha\Delta u + uM(u, v) \\
v_t = \beta\Delta v + vN(u, t)
\end{cases}
((x, t)\in \Omega \times \mathbf{R}^+,\ \Omega\subset\mathbf{R}^n \text{ 有界})
$$

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega\times\mathbf{R}^+} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega\times\mathbf{R}^+} = 0 \\
u(x, 0) = u_0(x) \geqslant 0,\ v(x, 0) = v_0(x) \geqslant 0
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

其中 $\alpha, \beta > 0$ 是常数.

$$M(u, v) = (u - d)(1 - u) - cv,$$

$$N(u, v) = -\mu - av + cu$$

$\left(c, \mu, a \text{ 都是正常数}, 0 < d < 1,\ d < \dfrac{\mu}{c} < 1\right)$. 若把 Ω 设想为一个孤立的岛. 则岛上的猫和老鼠既不能进也不能出, 即"流量"等于零的 Neumann 边条件.

$$\frac{\partial M}{\partial v} = -c < 0,\ \frac{\partial N}{\partial u} = c > 0$$

这是混拟单调的情形. 易证上解 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (M_1, M_2), M_1, M_2 > 0$ 适当大; 下解 $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$. 从而由上、下解方法可证

$$\sum = \{(u, v) | 0 \leqslant u \leqslant M_1,\ 0 \leqslant v \leqslant M_2\}$$

是(3.6)的不变区域(图 6-3.1). 由上、下解方法可证明只要 $u_0(x)$,

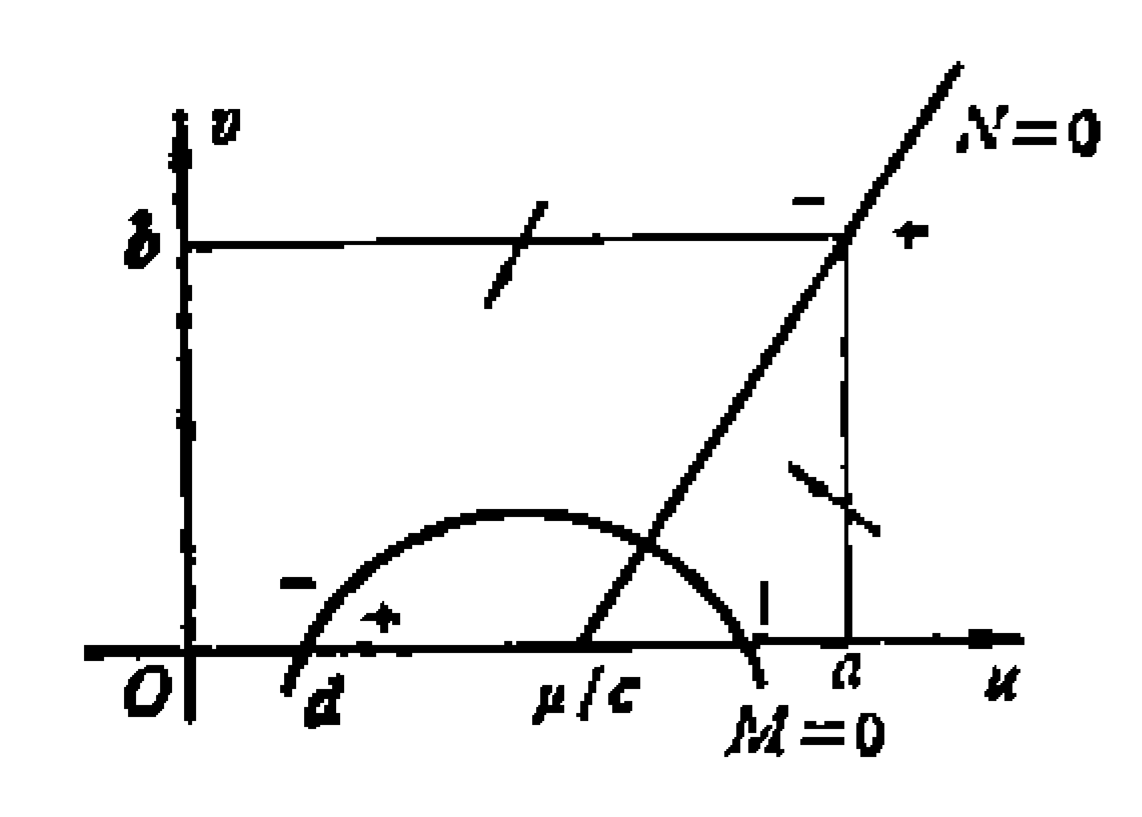


图 6-3.1

$v_0(x) \in \sum$, 则存在 (3.6) 的唯一解 $(u(x, t), v(x, t)) \in \sum$.

现在我们要来应用定理 6.3.1. 现在 $m=2$，即

$$f=(f_1, f_2)=(uM(u, v), vN(u, v))$$

$N_2=\{1, 2\}$. 因此 σ_M 有四种可能

(1) $\sigma_M=\{1\}$，　　(2) $\sigma_M=\{2\}$

(3) $\sigma_M=\{1, 2\}$，　　(4) $\sigma_M=\varnothing$

分别作出这四种情形的 $H_{\sigma_M}(u, v)$.

(1) $\sigma_M=\{1\}$，则 $\sigma_m=\{2\}$

$$f_1^+(u, v)=\sup_{v\leq\xi\leq M_1} f_1(u, \xi)=u\sup_{v\leq\xi\leq M_1} M(u, \xi)$$

$$f_2^+(u, v)=\sup_{0\leq\xi\leq u} f_2(\xi, v)=v\sup_{0\leq\xi\leq u} N(\xi, v)\equiv vN^+(u, v)$$

$$f_1^-(u, v)=\inf_{v\leq\xi\leq M_2} f_1(u, \xi)=u\cdot\inf_{v\leq\xi\leq M_1} M(u, \xi)$$

$$\equiv uM^-(u, v)$$

$$f_2^-(u, v)=\inf_{0\leq\xi\leq u} f_2(\xi, v)=v\inf_{0\leq\xi\leq u} N(\xi, v)$$

因而

$$H_{\sigma_M}=H_{(1)}=(f_1^+, f_2^-)$$

(2) $\sigma_M=\{2\}$. 同样计算知

$$H_{(2)}=(f_1^-, f_2^+)$$

(3) $\sigma_M=\{1, 2\}$

$$H_{(1,2)}=(f_1^+, f_2^+)$$

其中

$$f_1^+=u\sup_{0\leq\xi\leq v} M(u, \xi)\equiv uM^+(u, v)$$

所以可以写成

$$H_{(1,2)}=(uM^+, vN^+)$$

(4) $\sigma_M=\varnothing$

$$H_\varnothing=(f_1^-, f_2^-)=(uM^-, vN^-)$$

其中

$$N^-(u, v)=\inf_{u\leq\xi\leq M_1} N(\xi, v)$$

我们把向量场

$$(uM^+, vN^+), (uM^-, vN^-)$$

分别叫做与方程组(3.6)中的向量场 $f=(uM, vN)$ 相应的关于 Σ 的极大、极小向量场.

考虑

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=uM^+(u, v)\\ \dfrac{dv}{dt}=vN^+(u, v)\\ u(0)=\sup\limits_{\bar{D}} u_0(x)\\ v(0)=\sup\limits_{\bar{\Omega}} v_0(x)\end{cases}$$

由定理 6.3.1 我们有估计

$$0\leqslant u(x, t)\leqslant u^+(t), 0\leqslant v(x,t)\leqslant v^+(t)((x, t)\in \Omega\times \mathbf{R}^+)$$

由图 6-3.2 可获得解的一些定性性质. 例如,若 $u_0(x)<d$, 则有 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x, t)=\lim\limits_{t\to\infty}v(x, t)=0$. 这个结论有很直观的生态学上的解释,即食饵(例如老鼠)少到一定程度的话,那么食饵本身将趋于绝灭,从而导致猎手趋于绝灭.

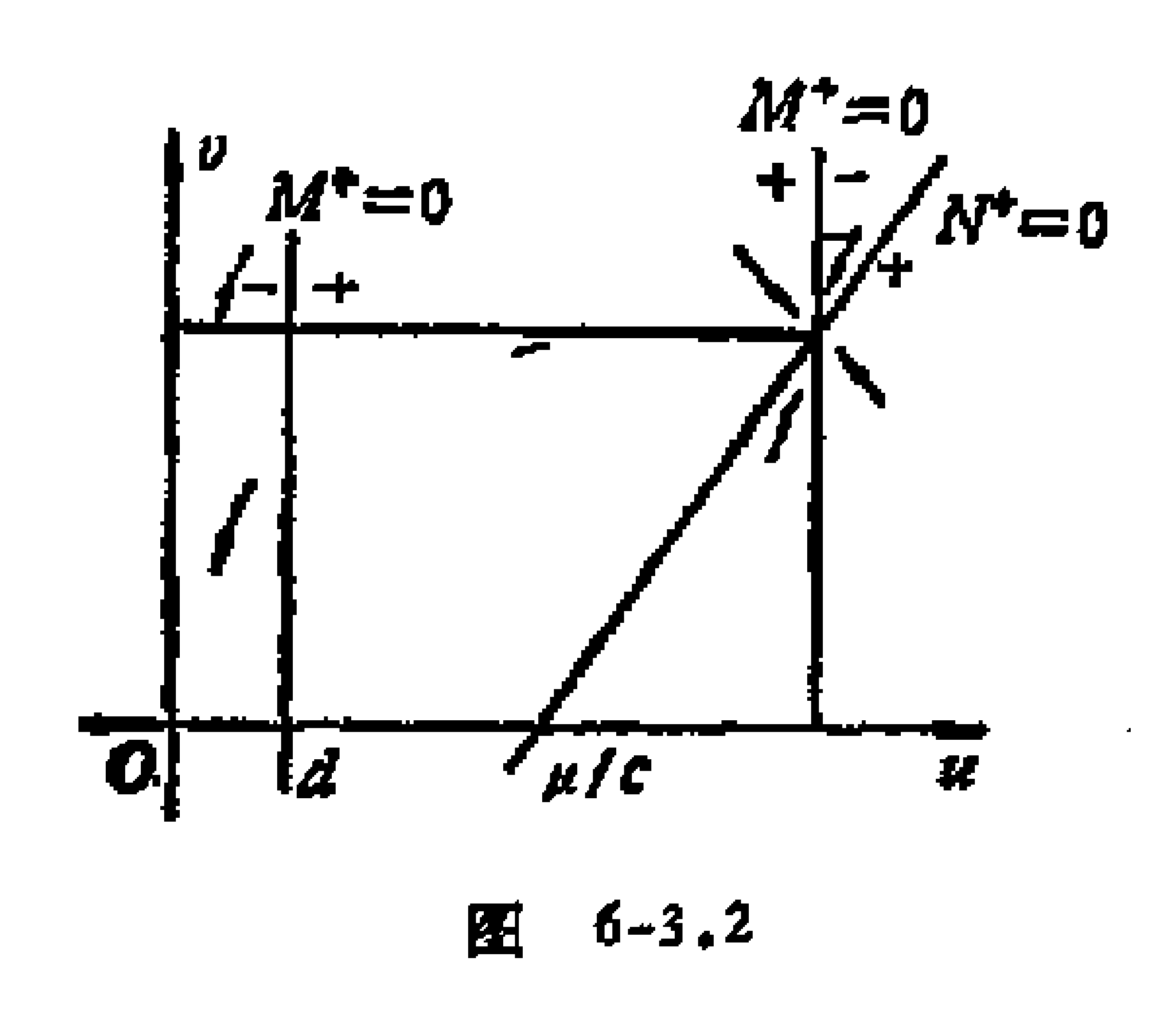


图 6-3.2

6.4 反应扩散方程的局部解和整体解

在一些情形下比较容易证明反应扩散方程组局部解的存在唯

一性，如果存在不变区域，则可以得到整体解的存在唯一性．本节我们仅以一个简单例子来说明这点．这里我们考虑的是一种方法的框架，而不去计较条件的强弱．

我们以考虑 Cauchy 问题为例．在 $m=1$ 的情形我们知道若取基本空间为

$$B=\{w(x)\,|\,w(x)\text{ 为 R 上有界，一致连续函数，}\lim_{|x|\to\infty}|w|=0\}\text{（为简单计，令 } n=1\text{）}$$

非齐次热传导方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_t=au_{xx}+f(x,t) & ((x,t)\in \mathrm{R}\times\mathrm{R}^+\text{ 或 }\mathrm{R}\times[0,T])\\ u(x,0)=u_0(x) & (x\in\mathrm{R})\end{cases}\tag{4.1}$$

$f(x,t)$ 有界光滑．则其解可表为

$$u(x,t)=G(x-y,t)*u_0(y)+\int_0^t G(x-y,t-s)*f(y,s)ds$$

其中

$$G(x-y,t-s)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a(t-s)}\right\}$$

$$G(x-y,t-s)*f(y,s)=\int_{\mathrm{R}}G(x-y,t-s)f(y,s)dy$$

$$G(x-y,t)*u_0(y)=\int_{\mathrm{R}}G(x-y,t)u_0(y)dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\int_{\mathrm{R}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4at}\right\}u_0(y)dy$$

现在我们来考虑反应扩散方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u) & ((x,t)\in\mathrm{R}\times\mathrm{R}^+\text{ 或 }\mathrm{R}\times(0,T))\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{4.2}$$

其中 $m>1$，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$，$u_0(x)=(u_1^0(x),u_2^0(x),\cdots,u_m^0(x))$，$D=\mathrm{diag}\,(d_1,d_2,\cdots,d_m)$，$d_i>0\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为

常数. $f(u)=(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_m(u))$, $f(u):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 光滑并满足 Lipschitz 条件,即

$$\|f(u)-f(v)\|_B\leqslant K\|u-v\|_B \tag{4.3}$$

令

$$g_i(x-y,t-s)=\frac{1}{\sqrt{4\pi d_i(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4d_i(t-s)}\right\}$$
$$(i=1,2,\cdots,m)$$
$$G(x-y,t-s)=\mathrm{diag}\,(g_1(x-y,t-s),g_2(x-y,t-s),\cdots,g_m(x-y,t-s))$$

可以证明 $u(x,t)\in C([0,T];B)$ 是 (4.2) 的解当且仅当 $u(x,t)$ 满足下列积分方程

$$u(x,t)=G(x-y,t)*u_0(y)+\int_0^t G(x-y,t-s)*f(u(y,s))ds \tag{4.4}$$

于是我们可以证明解的局部存在定理.

定理 6.4.1 设 $u_0(x)\in B$, $f(0)=0$. 则存在 $t_0>0$, t_0 只依赖于 f 和 $\|u_0\|_B$, 使得 (4.2) 在 $C([0,t_0];B)$ 中有唯一解, 并有 $\|u\|_B\leqslant 2\|u_0\|_B$.

证明 若对 $t\in\mathbf{R}^+$ (或 $[0,T]$), $u(x,t)\in C([0,T];B)$, 则常把 $u(x,t)$ 记为 $u(t)$. 对于 $t_0=\frac{1}{2K}>0$ (K 即 (4.3) 中的 Lipschitz 系数). 定义集合

$$S=\{u\,|\,u\in C([0,t_0];B),\|u(t)-G(x-y,t)*u_0(y)\|_B\leqslant\|u_0\|_B,0\leqslant t\leqslant t_0\}$$

则 S 是非空闭的(因为 $u\equiv 0$ 属于 S).

定义映射 A:

$$Av(t)=G(x-y,t)*u_0(y_0)+\int_0^t G(x-y,t-s)*f(v(y,s))ds$$
$$v(t)=v(x,t)\in S$$

A把 S 映到 S。注意到 $0\in S_0$, $f(0)=0$, 有

$$\|Av(t)-G*u_0\|_B\leqslant\left\|\int_0^t G(x-y,t-s)*[f(v(y,s))\right.$$
$$\left.-f(0)]ds\right\|_B\leqslant K\|v\|_B t$$

由于 $v\in S$,

$$\|v\|_B-\|G*u_0\|_B\leqslant\|v(t)-G(x-y,t)*u_0(y)\|_B\leqslant\|u_0\|_B$$
$$\|v\|_B\leqslant\|G*u_0\|_B+\|u_0\|_B\leqslant 2\|u_0\|_B$$

因此

$$\|Av(t)-G*u_0\|_B\leqslant 2Kt_0\|u_0\|_B\leqslant\|u_0\|_B$$

这里我们已经用到了：当 $t>0$ 时 $\int_{\mathbf{R}} g_t(x-y,t)dy=1$，以及 $2Kt_0=1$。

其次证明 A 在 S 上是压缩算子. 设 u, $v\in S$, 则

$$\|Au(t)-Av(t)\|_B\leqslant\int_0^t\|G(x-y,t-s)*[f(u(y,s))$$
$$-f(v(y,s))]\|_B dt\leqslant Kt_0\|u(t)-v(t)\|_B$$
$$=\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|_B$$

因为 $\frac{1}{2}<1$，所以 A 在 S 上是压缩的. 应用压缩映象原理推出 A 在 S 中有唯一不动点，即 (4.4) 也即 (4.2) 在 S 中有唯一解.

如果对于 $\forall T>0$, (4.2) 的解在 $\mathbf{R}\times[0,T]$ 上有一先验估计

$$\|u(t)\|_B\leqslant C$$

C 只依赖于 $\|u_0\|_B$，那么我们可以证明下面的整体解的存在唯一性定理.

定理 6.4.2 设 $u_0\in B$, $f(0)=0$, 对于 $\forall T>0$ (4.2)的解在 $\mathbf{R}\times[0,T]$ 上有先验估计.

$$\|u(t)\|_B\leqslant C(\|u_0\|_B)$$

则对于 $\forall T>0$, (4.2) 在 $\mathbf{R}\times[0,T]$ 上有唯一解

$$u(x,t)=u(t)\in B$$

证明　取 S 为

$$S=\{u \mid u\in C([0,t_0];B),\ \|u(t)-G*u_0\| \leqslant C(\|u_0\|_B),\ 0\leqslant t\leqslant t_0\}$$

这里 K 仍是 (4.3) 中 f 的 Lipschitz 系数，$t_0=\dfrac{1}{2K}$ 只依赖于 f 和 C。

由定理 6.4.1 知在 $\mathbf{R}\times[0,t_0]$ 上 (4.2) 存在唯一解 $u(t)\in B$。以 $u(x,t_0)\in S$ 为新的初值又可以用同样方法求得在 $\mathbf{R}\times[t_0,2t_0]$ 上也有唯一解。如此重复下去即可得解在 $\mathbf{R}\times[0,T]$ 上的存在唯一性。定理证毕。

推论 6.4.3　若对于 $\forall T>0$，在 $\mathbf{R}\times[0,T]$ 上 (4.2) 有一有界的不变区域，则 (4.2) 在 $\mathbf{R}\times[0,T]$ 上有唯一解。

证明　一定存在 $C>0$，使得 (4.2) 的解 $u(t)$

$$\|u(t)\|_B\leqslant C$$

由本定理即得所要结论。

6.5 评　　注

由于得到了有界的不变区域就得到了反应扩散方程组解本身的先验估计，所以自从 H. Weinberger 的文章[We]发表后，引起了广泛的兴趣，曾有不少人从事非线性抛物型和椭圆型方程组的不变区域的研究。对应用来说首先要讨论 $\mathbf{R}^m$ 中什么样的具体区域可能成为相应的抛物型或椭圆型方程组的不变区域，这方面的代表性结果是 1977 年发表的 [CCS]（已总结在 J. Smoller 的书 [Sm] 中）. 但是有两个问题. 一个是 ∇G_i 是否是矩阵 D、M 的左特征值不好验证；另一个是很多问题中只满足弱切触条件，即 $\nabla G_i\cdot f\leqslant 0$。但是由于物理学、化学和生物学中提出的相当一部分反应扩散方程中的 D 和 M 是对角形的，因而若只考虑矩形不变区域的话，$\nabla G_i=(0,0,\cdots,\overset{(i)}{1},\cdots,0,0)$ 当然是 D 和 M 的左特征向量，

于是，我们所考虑的问题是否满足强切触条件就成了关键．为了把强切触条件减弱为弱切触条件，在 [We] 中是利用了存在性理论的方法来处理的．而在 [CCS] 中则引入了 f 稳定的条件，实际上这是一种解关于右端的连续依赖性的条件．这些条件在具体问题中也是难于应用的．由于这些原因使不变区域的求得和应用受到了限制．

也有人对更复杂的强耦合的方程组，例如

$$u_t^k - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u^k_{x_ix_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u^k_{x_i} + f^k(x,t,u,\nabla u)$$

$$(k=1,2,\cdots,m)$$

的不变区域进行过研究，见 [RW]，[Lem]，其中还研究了抽象椭圆型方程的不变区域． 在 [We]，[CCS] 中还研究了不变区域是 $\mathbf{R}^m$ 中的闭凸集以及定理 6.2.3 中的一些条件是否是必要条件等问题．[Ama]曾利用不变区域研究过一类方程组的周期解的存在性．

本章的目的主要是介绍不变区域的主要思想及其应用．有兴趣作进一步研究的读者可参看本评注中提到的有关论文以及这些论文中提到的各种文献．

习　题　六

6.1 对 Neumann 边条件情形证明定理 6.2.3．

6.2 证明定理 6.3.1．

6.3 考察常微分方程组

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_1,\cdots,u_m,t) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

其中 $f\in C^1$．令

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{N} \{u \mid u=(u_1,\cdots,u_m),\ u\in U,\ G_i(u)\leqslant 0\}$$

$G_i(u)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中开集 U 到 $\mathbb{R}^1$ 的光滑函数，$\nabla G_i \neq \theta$. 证明 $\sum$ 是不变区域的充要条件是

$$\nabla G_i \cdot f(u,\ t) \leqslant 0$$
$$(\forall u \in \partial \sum,\ \forall t \geqslant 0)$$

第七章　平衡解的存在性与分叉问题——度理论的应用

考虑反应扩散方程的平衡解的存在性与稳定性时，我们可将它化为讨论 Banach 空间中算子方程

$$\Phi(u)=\theta$$

的解的存在性与稳定性。如果反应扩散方程中包含某些参数，那么相应的算子方程中也就含有某些参数。因此，我们将考虑含参数的算子方程

$$\Phi(\lambda, u)=\theta$$

其中 $\Phi: \Lambda\times E_1\to E_2$，$\Lambda$，$E_1$，$E_2$ 是 Banach 空间，θ 是零元素。

人们感兴趣的常常是以下几个问题：

(1) 对于给定的参数，方程解的存在性与解的个数。

(2) 解是否稳定？

(3) 解随参数的变化情况，即所谓分叉问题。

本章仅就方程解的存在性与多解问题及分叉(bifurcation)问题作初步讨论而暂不讨论解的稳定性问题。

讨论上述问题的方法是多种的，例如第三章中曾用上、下解方法讨论了一个简单的分叉问题（§3.3.3），本章只介绍怎样用度理论讨论这些问题，另外一些方法将在以后给出。

我们的重点放在度理论的应用上，在引进度的概念和讨论度的性质时较多地借助于直观。若要进一步了解度理论，可参看[LQ]。

7.1　度的定义

7.1.1　有限维空间中的 Brouwer 度

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集，$f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是连续函数。p 是 $\mathbb{R}^n$ 中的

定点，考察方程

$$f(x)=p \tag{1.1}$$

我们将引进与方程（1.1）的解是否存在及解的个数有关的度的概念。先从两个具体例子开始，给出度的直观背景，然后引进 C^1 函数的度，最后引进连续函数的度。

例 1 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是有界开区域。映射

$$f(z):\bar{\Omega}\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$$

由一个不恒为常数的解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

所表示，其中 $z=x+iy$，这里以复数代表 $\mathbf{R}^2$ 中的点。

由复变函数论中的 Rouché 定理知，若 $p\notin f(\partial\Omega)$，则 $f(z)-p$ 在 Ω 内零点的个数为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)-p}dz\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}d\ln(f(z)-p)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}d\ln|f(z)-p|+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}d\arg(f(z)-p)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}d\arg(f(z)-p)\\
&=\frac{1}{2\pi}[\,z\text{ 沿 }\partial\Omega\text{ 变化时，辐角 }\arg(f(z)-p)\text{ 的改变量}]\\
&=z\text{ 绕 }\partial\Omega\text{ 一圈时 }f(z)\text{ 沿 }f(\partial\Omega)\text{ 绕 }p\text{ 点的圈数}
\end{aligned}$$

例 2 $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y)):\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^2$，$f(x,y)\in C^2(\bar{\Omega})$，$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是有界开区域。$p=(p_1,p_2)\in\mathbf{R}^2$，$(x,y)\in\partial\Omega$ 时 $f(x,y)\neq p$，这时在 $\partial\Omega$ 上每一点都有确定的方向向量

$$T(x,y)=\frac{f(x,y)-p}{|f(x,y)-p|}$$

其中 $|\cdot|$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的模。把方向向量的起点都放在 p 点，当 (x,y) 沿 $\partial\Omega$ 转一周回到原处时，$T(x,y)$ 绕 p 点便转过了 j 圈，即 $2\pi j$

角度。j 为某整数，逆时针方向时 $j>0$，否则 $j<0$（图7-1.1）。

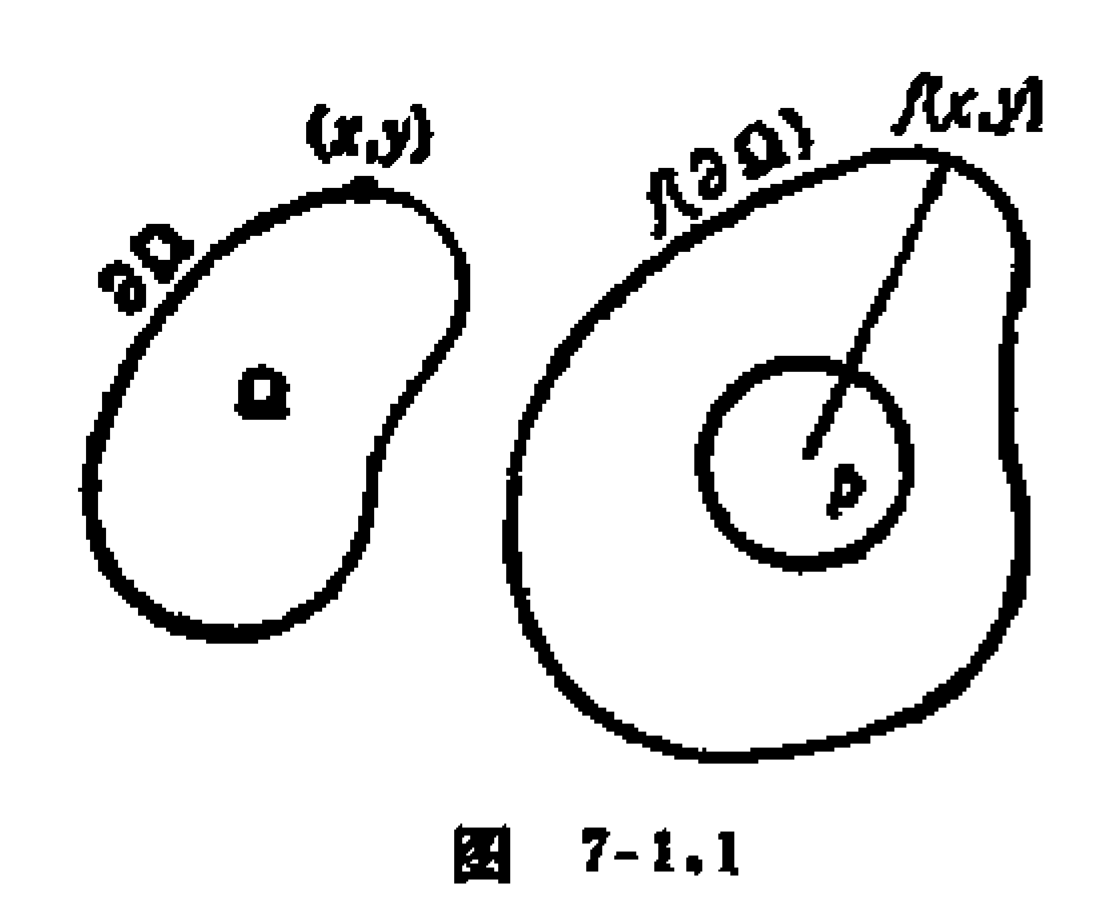


图 7-1.1

角度 $2\pi j$ 也是曲线 $f(\partial\Omega)$ 对 p 点所张的角度，我们可以计算它。

$$
\begin{aligned}
j &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} d\ \operatorname{arctg}\ \frac{v(x,y)-p_2}{u(x,y)-p_1} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{[u(x,y)-p_1]dv(x,y)-[v(x,y)-p_2]du(x,y)}{[u(x,y)-p_1]^2+[v(x,y)-p_2]^2}
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

其中 $p=(p_1,p_2)$。进一步假设 $f(x,y)-p$ 在 Ω 内有 m 个零点：(x_i,y_i)，$J(x_i,y_i)\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，其中 $J(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的 Jacobi 行列式。于是

$$
j=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\int_{f(L_i)}\frac{(u-p_1)dv-(v-p_2)du}{(u-p_1)^2+(v-p_2)^2} \tag{1.3}
$$

L_i 是仅包含零点 (x_i,y_i) 的小区域的边界。在此小区域内 $J(x,y)$ 与 $J(x_i,y_i)$ 同号。根据 Jacobi 行列式的几何意义，在变换 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 下，若 $J(x,y)>0(<0)$，则 $f(L_i)$ 与 L_i 有相同(相反)的定向，于是

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{f(L_i)}\frac{(u-p_1)dv-(v-p_2)du}{(u-p_1)^2+(v-p_2)^2} = \operatorname{sign} J(x_i,y_i)
$$

因此，我们得到了 j 的表达式 (1.2)，(1.3) 以及

$$
j=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sign}J(x_i,y_i) \tag{1.4}
$$

这个整数 i 就是我们所要引进的"度"，它在一定程度上反映了方程 $f(x, y) - p = \theta$ 的解的情况。

由以上背景，我们分以下几步引进 $\mathbf{R}^n$ 中连续函数的度。我们以 $|\cdot|$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的模。

（一）p 不是临界值时 C^1 函数的度。

定义 7.1.1 若 $f(x) = p$，称 x 为 f 的一个 p 点，记 $f^{-1}(p)$ 为 f 在 $\bar{\Omega}$ 上 p 点的集合。

定义 7.1.2 设 f 在 $\bar{\Omega}$ 可导。若 $x \in \bar{\Omega}$，$J_f(x) = 0$，其中 $J_f(x)$ 是 $f(x)$ 的 Jacobi 行列式，则称 x 为 f 的临界点，相应的 $f(x)$ 为 f 的临界值，f 在 $\bar{\Omega}$ 上的临界点的集合记为 $Z_f(\bar{\Omega})$ 或 Z_f，相应的临界值集合记为 $f(Z_f)$。

引理 7.1.3 设 f 在 $\bar{\Omega}$ 可导，$p \bar{\in} f(Z_f)$。若 $f^{-1}(p)$ 非空，则 $f^{-1}(p)$ 是有限集。

证明留给读者。

根据引理 7.1.3，我们可给出

定义 7.1.4 设 $f \in C^1(\bar{\Omega})$，$p \bar{\in} f(\partial\Omega) \cup f(Z_f)$。称整数

$$d(f, \Omega, P) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign} J_f(x) & (f^{-1}(p) \text{ 为有限集}) \\ 0 & (f^{-1}(p) \text{ 为空集}) \end{cases}$$

为 f 在 p 点关于开集 Ω 的（Brouwer）度。

例 2 给出了 $\mathbf{R}^2$ 中 $f \in C^2(\bar{\Omega})$ 时 $d(f, \Omega, p)$ 的几何意义与积分表达式。例 2 的 i 就是 $d(f, \Omega, p)$。

例 3 由定义立即可得。若 I 是 $\mathbf{R}^n$ 中的恒同映射，$F_c x = x_0$，x_0 为 $\mathbf{R}^n$ 中的定点，则

$$d(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & (p \in \Omega) \\ 0 & (p \bar{\in} \bar{\Omega}) \end{cases}$$

$$d(-I, \Omega, p) = \begin{cases} (-1)^n & (-p \in \Omega) \\ 0 & (-p \bar{\in} \bar{\Omega}) \end{cases}$$

$$d(I - F_c, \Omega, \theta) = \begin{cases} 1 & (x_0 \in \Omega) \\ 0 & (x_0 \bar{\in} \bar{\Omega}) \end{cases}$$

其中 θ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元素。

（二） p 是临界值时 C^1 函数的度。

引理 7.1.5 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，$p\bar{\in}f(\partial\Omega)$ 但 $p\in f(Z_f)$，点 p 到 $f(\partial\Omega)$的距离记为$\rho(p,f(\partial\Omega))$，则$\exists q\bar{\in}f(Z_f)$，$|p-q|<\rho(p,f(\partial\Omega))$，且当 $q_i\bar{\in}f(Z_f)$，$|q_i-p|<\rho(p,f(\partial\Omega))$ $(i=1,2)$ 时，有

$$d(f,\Omega,q_1)=d(f,\Omega,q_2)$$

证明略。

由这个引理可给出下面的定义。

定义 7.1.6 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，$p\bar{\in}f(\partial\Omega)$，$p\in f(Z_f)$，则对 $\forall q\bar{\in}f(Z_f)$，$|p-q|<\rho(p,f(\partial\Omega))$ 时 $d(f,\Omega,q)$ 不依赖于 q，称它为 f 在 p 点关于开集 Ω 的(Brouwer)度，记为 $d(f,\Omega,p)$。

例 4 在 $\mathbf{R}^1$ 中 $f(x)=x^m$，m 为自然数，$J=(a,b)$ 包含原点，求 $d(f,J,\theta)$。

解 $f(x)=0$ 有唯一解 $x=0$，即 f 有唯一零点 $x=0$。当 $m\neq 1$ 时，$x=0$ 是 f 的临界点，$f(0)=0$ 是临界值。对$\forall\varepsilon$，$\varepsilon<\min(|f(a)|,|f(b)|)$，考察方程

$$f(x)=\varepsilon$$

当 m 为偶数时，若 $\varepsilon>0$，有两个解：$x_1=\sqrt[m]{\varepsilon}$，$x_2=-\sqrt[m]{\varepsilon}$，

$$\operatorname{sign}f'(x_1)=1$$

$$\operatorname{sign}f'(x_2)=-1$$

若 $\varepsilon<0$，则无解。因此，

$$d(f,J,\theta)=d(f,J,\varepsilon)=0$$

当 m 为奇数时，方程有唯一解 $x_1=\sqrt[m]{\varepsilon}$，

$$\operatorname{sign}f'(x_1)=1$$

因此

$$d(f,J,\theta)=d(f,J,\varepsilon)=1$$

（三） 连续函数的度。

连续函数 f 可用 C^1 中的函数来逼近，所有充分接近 f 的 C^1 函数又有相同的度，因此可用它来定义连续函数 f 的度。

引理 7.1.7 设 $f\in C(\bar{\Omega})$，$p\bar{\in}f(\partial\Omega)$. 又设 $f_i\in C^1(\bar{\Omega})$，$\|f-f_i\|_{c(\bar{\Omega})}<\rho(p,f(\partial\Omega))(i=1,2)$. 则 $p\bar{\in}f_i(\partial\Omega)(i=1,2)$，且

$$d(f_1,\Omega,p)=d(f_2,\Omega,p)$$

其中 $\|\cdot\|_{c(\bar{\Omega})}$ 表示 $C(\bar{\Omega})$ 空间中的模.

证明略.

定义 7.1.8 设 $f\in C(\bar{\Omega})$，$p\bar{\in}f(\partial\Omega)$. 则对 $\forall g\in C^1(\bar{\Omega})$ 满足 $\|f-g\|_{c(\bar{\Omega})}<\rho(p,f(\partial\Omega))$，$d(g,\Omega,p)$ 不依赖于 g，称它为 f 在 p 点关于开集 Ω 的 (Brouwer) 度，记为 $d(f,\Omega,p)$.

上面的讨论适用于任意有限维线性赋范空间.

7.1.2 Banach 空间中的 Leray-Schauder 度

设 E 是 Banach 空间，Ω 是 E 中的有界开集，$F:\bar{\Omega}\to E$ 是紧算子. 现在我们将对 $\Phi=I-F$ 引进度的概念，其中 I 是 E 中的恒同算子. E 中的范数记为 $\|\cdot\|$.

我们由以下几步来实现这一目的.

(一) 在 $\bar{\Omega}$ 上 F 可用有限维空间中的紧算子来任意逼近.

引理 7.1.9 $\forall\varepsilon>0$，存在有界连续算子 $F_\varepsilon:\bar{\Omega}\to E^{N}(\varepsilon)$，使得 $\Omega_\varepsilon=\Omega\cap E^{N(\varepsilon)}$ 非空且

$$\|Fu-F_\varepsilon u\|<\varepsilon\quad(u\in\bar{\Omega})$$

其中 $E^{N(\varepsilon)}$ 是 E 的有限维 ($N(\varepsilon)$ 维)子空间，因而 F_ε 在 $\bar{\Omega}$ 上是紧算子.

证明 因 $F(\bar{\Omega})$ 是列紧集，$\forall\varepsilon>0$，存在元素 $u_1,\cdots,u_m$，使得对每个 $u\in F(\bar{\Omega})$，至少对某个 u_i，$\|u-u_i\|<\varepsilon$. 令

$$P_\varepsilon u=\sum_{i=1}^{m}\mu(u)u_i\Big/\sum_{i=1}^{m}\mu_i(u)\quad(u\in F(\bar{\Omega}))$$

其中

$$\mu_i(u)=\begin{cases}\varepsilon-\|u-u_i\| & (\|u-u_i\|<\varepsilon)\\ 0 & (\|u-u_i\|\geq\varepsilon)\end{cases}$$

显然 P_ε 连续且

$$\|P_\varepsilon u\| \leqslant \max(\|u_1\|, \cdots, \|u_m\|) \quad (u \in F(\bar{\Omega}))$$

即在 $F(\bar{\Omega})$ 上有界。P_ε 的值域属于由 $\{u_1, \cdots, u_m, u^*\}$ 张成的有限维子空间 $E^{N(\varepsilon)}$，其中 u^* 是 Ω 中的某元素，因而 Ω_ε 非空。

令 $F_\varepsilon = P_\varepsilon F$，则 $F_\varepsilon: \bar{\Omega} \to E^{N(\varepsilon)}$ 是有界连续的，因而是紧的且

$$\|Fu - F_\varepsilon u\| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m} \mu_i(F(u))\right]^{-1}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \mu_i(F(u))[F(u) - u_i]\right\| < \varepsilon \quad (u \in \bar{\Omega})$$

证毕。

（二）定义有限维逼近算子 $\Phi_\varepsilon = I - F_\varepsilon$ 的度。

引理 7.1.10 设 $M \subset E$ 是有界闭集，$F: M \to E$ 是紧算子，$\Phi = I - F$，$p \notin \Phi(M)$。则

$$\inf_{u \in M} \|\Phi(u) - p\| = h > 0$$

证明 若不然，则 $\exists u_n \in M$，$\Phi u_n \to p$。$\{u_n\}$ 是有界集，故 Fu_n 是列紧集，不妨设 $Fu_n \to v$，于是 $u_n = \Phi u_n + Fu_n \to p + v$，$(p + v) - F(p + v) = p$。这里 $p + v$ 是属于 M，因为 M 是闭的。这表明 $p \in \Phi(M)$，与假设矛盾。证毕。

由引理 7.1.10 知，若 $p \bar{\in} \Phi(\partial\Omega)$，则 $\inf\limits_{u \in \partial\Omega} \|\Phi u - p\| = h_0 > 0$。对 $\forall \varepsilon$，$0 < \varepsilon \leqslant h_0$，存在紧算子 $F_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \to E^{N(\varepsilon)}$ 其中 $E^{N(\varepsilon)}$ 包含 p，而且

$$\|Fu - F_\varepsilon u\| < \varepsilon \quad (u \in \bar{\Omega})$$

于是 $u \in \partial\Omega_\varepsilon$ 时

$$\|\Phi_\varepsilon u - p\| \geqslant \|\Phi u - p\| - \|\Phi u - \Phi_\varepsilon u\| > h_0 - \varepsilon \geqslant 0$$

因此可以定义 Brouwer 度 $d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p)$。

（三）有限维逼近算子 Φ_ε 的度 $d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p)$ 是常数。

引理 7.1.11 设 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leqslant h_0$。相应地有紧算子

$$F_{\varepsilon_i}: \bar{\Omega} \to E^{N(\varepsilon_i)}, \quad \|Fu - F_{\varepsilon_i} u\| < \varepsilon_i \quad (u \in \bar{\Omega})$$

$$\Phi_{\varepsilon_j} = I - F_{\varepsilon_j},\ \Omega_{\varepsilon_j} = \Omega \cap E^{N(\varepsilon_j)}$$

则

$$d(\Phi_{\varepsilon_1}, \Omega_{\varepsilon_1}, p) = d(\Phi_{\varepsilon_2}, \Omega_{\varepsilon_2}, p)$$

我们可利用 Brouwer 度的性质来证明这个引理，将在下一节给出这个引理的证明。

定义 7.1.12 设 $p \bar{\in} \Phi(\partial\Omega)$，则当

$$0 < \varepsilon < h_0 = \inf_{u \in \Phi(\partial\Omega)} \|\Phi u - p\|$$

时 $d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p)$ 为常数，称它为 Φ 在 p 点关于开集 Ω 的 (Leray-Schauder) 度，记为 $d(\Phi, \Omega, p)$。

例 5 按定义容易证明如下的 Leray-Schauder 度

$$d(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & (p \in \Omega) \\ 0 & (p \bar{\in} \bar{\Omega}) \end{cases}$$

$$d(I - F_c, \Omega, \theta) = \begin{cases} 1 & (u_0 \in \Omega) \\ 0 & (u_0 \bar{\in} \bar{\Omega}) \end{cases}$$

其中 $F_c u = u_0$，u_0 为 E 中的某元素，θ 为 E 中的零元素。

7.2 度的性质

设 E 是 Banach 空间，$\Omega \subset E$ 是有界开集。若 $E = E^m$ 是 m 维的，$\Phi: \bar{\Omega} \to E^m$ 是连续算子。若 E 是无穷维的，$\Phi = I - F$ 其中 $F: \bar{\Omega} \to E$ 是紧算子。只要 $p \bar{\in} \Phi(\partial\Omega)$，均可定义 $d(\Phi, \Omega, p)$。本节考虑度的一些性质。

对于 Brouwer 度的性质我们不做严格证明，只利用 E^2 中 C^1 函数加以说明，以便理解这些性质。对于 Leray-Schauder 度的性质，可以通过逼近算子的 Brouwer 度的性质而得到。

(一) 度与方程解的存在性。

定理 7.2.1 设 $d(\Phi, \Omega, p) \neq 0$，则 $\Phi u = p$ 在 Ω 内存在解。

在 R^2 中，若 $\Phi(x, y) = (u(x,y), v(x,y)) \in C^1(\bar{\Omega})$，$d(\Phi, \Omega, p)$ 由 (1.2) 式给出。若在 Ω 上 $\Phi(x, y) \neq p (p = (p_1, p_2))$，则由

Green 公式得

$$d(\Phi,\Omega,p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Phi(\partial\Omega)}\frac{(u-p_1)dv-(v-p_2)du}{(u-p_1)^2+(v-p_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Phi(\Omega)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-p_1}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v-p_2}{r^2}\right)\right]dudv=0$$

其中 $r^2=(u-p_1)^2+(v-p_2)^2$.

若已证明对 Brouwer 度定理 7.2.1 成立，则易证对 Leray-Schauder 度，定理 7.2.1 也成立。

若 $p\bar{\in}\bar{\Omega}$，则由引理 7.1.10 知，$h_0=\inf\limits_{\Omega}\|\Phi u-p\|>0$，当 $0<\varepsilon\leqslant h_0$ 时，对 $\forall u\in\bar{\Omega}$，

$$\|\Phi_\varepsilon u-p\|\geqslant\|\Phi u-p\|-\|\Phi u-\Phi_\varepsilon u\|>h_0-\varepsilon\geqslant 0$$

即 $p\bar{\in}\Phi_\varepsilon(\bar{\Omega})$，于是 $d(\Phi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=0$。再由度的定义得

$$d(\Phi,\Omega,p)=d(\Phi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=0$$

(二) 度对区域的可加性。

定理 7.2.2 设 Ω 是有界开集，$\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2$，$\Omega_1$，$\Omega_2$ 是 Ω 的不相交开子集。$p\bar{\in}\Phi(\partial\Omega_i)$ $(i=1,2)$，则

$$d(\Phi,\Omega,p)=d(\Phi,\Omega_1,p)+d(\Phi,\Omega_2,p)$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中，$\Phi(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$，若 Ω_1，Ω_2 无公共边界(如图 7-2.1(a))，则

$$d(\Phi,\Omega,p)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{[u(x,y)-p_1]dv(x,y)-[v(x,y)-p_2]du(x,y)}{[u(x,y)-p_1]^2+[v(x,y)-p_2]^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_1}+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_2}$$

$$=d(\Phi,\Omega_1,p)+d(\Phi,\Omega_2,p)$$

若 Ω_1，Ω_2 有公共边界 (图 7-2.1(b))，则 Ω 的边界就不含这段了，但在 $\partial\Omega_1$ 与 $\partial\Omega_2$ 上的积分相加时公共部分刚好相消。

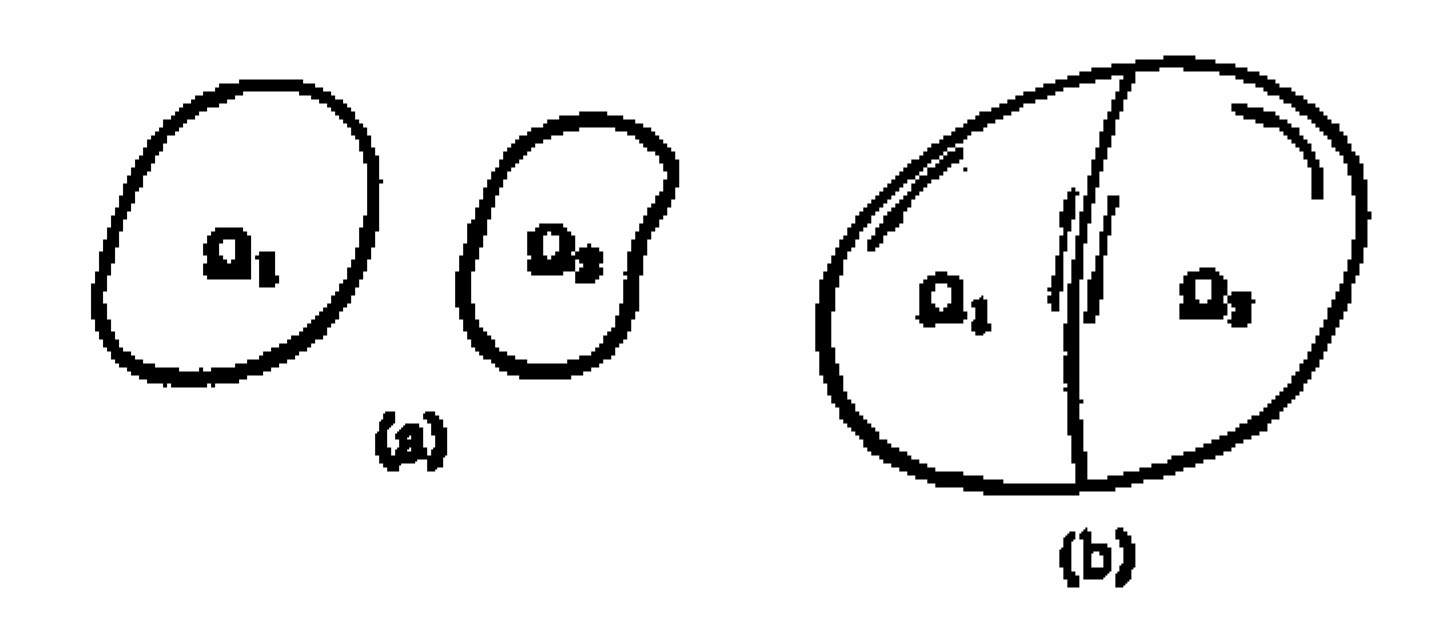


图 7-2.1

现在利用 Brouwer 度对区域的可加性来证明 Leray-Schauder 度对区域的可加性。

注意 $\partial\Omega\subset\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，存在 $h_0>0$，使得

$$\|\Phi u-p\|\geqslant h_0\quad(u\in\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)$$

对任意 $0<\varepsilon\leqslant h_0$，可作 $E^{N(\varepsilon)}$ 及 $\Phi=I-F$ 的有限维逼近算子 $\Phi_\varepsilon=I-F_\varepsilon$。于是 $p\bar{\in}\Phi_\varepsilon(\partial\Omega_\varepsilon)$，$p\bar{\in}\Phi(\partial\Omega_{i\varepsilon})$ $(i=1,2)$，其中 $\Omega_\varepsilon=\Omega\cap E^{N(\varepsilon)}$，$\Omega_{i\varepsilon}=\Omega_i\cap E^{N(\varepsilon)}$，显然

$$\bar{\Omega}_\varepsilon=\bar{\Omega}_{1\varepsilon}\cup\bar{\Omega}_{2\varepsilon},\quad\Omega_{1\varepsilon}\cap\Omega_{2\varepsilon}=\phi$$

由 Brouwer 度对区域的可加性得

$$d(\Phi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=d(\Phi_\varepsilon,\Omega_{1\varepsilon},p)+d(\Phi_\varepsilon,\Omega_{2\varepsilon},p)$$

由度的定义

$$d(\Phi,\Omega,p)=d(\Phi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$$
$$d(\Phi,\Omega_i,p)=d(\Phi_\varepsilon,\Omega_{i\varepsilon},p)$$
$$(i=1,2)$$

最后得到

$$d(\Phi,\Omega,p)=d(\Phi,\Omega_1,p)+d(\Phi,\Omega_2,p)$$

（三）度的同伦不变性。

现考察含实参数 λ 的算子 Φ_λ，若在有限维空间 E^m 中，我们总假定

$$\Phi_\lambda:\Omega\times[a,b]\to E^m$$

是连续的，$\Omega\subset E^m$ 是有界开集。若在无穷维 Banach 空间 E 中，总是假定 $\Phi_\lambda=I-F_\lambda$

$$F_\lambda:\bar{\Omega}\times[a,b]\to E$$

是紧算子，$\Omega\subset E$ 是有界开集。

在紧性的判断中下面的引理是常用的：

引理 7.2.3 设 $F_\lambda:\bar{\Omega}\times[a, b]\to E$ 满足：

1° 对每个 $\lambda\in[a, b]$，$F_\lambda:\bar{\Omega}\to E$ 是紧算子，

2° F_λ 关于 $\lambda\in[a, b]$ 对 $u\in\bar{\Omega}$ 一致连续，即对 $\forall\lambda_0\in[a,b]$，$\exists\delta=\delta(\lambda_0)>0$，当 $\lambda\in[a, b]$，$|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时对一切 $u\in\bar{\Omega}$ 有 $\|F_\lambda u-F_{\lambda_0}u\|<\varepsilon$，则

$$F_\lambda:\bar{\Omega}\times[a, b]\to E$$

是紧算子。这里 $\bar{\Omega}\times[a, b]\subset E\times[a,b]$，$E\times[a,b]$ 为 Banach 空间，其中元素的范数 $\|(u, \lambda)\|=\|u\|_E+|\lambda|$。

证明留给读者或参见 [LQ, p.82]。

推论 7.2.4 设 $F:\bar{\Omega}\to E$ 是紧算子，$g(\lambda)\in C([a, b],\mathbb{R}^1)$ 则 $g(\lambda)F:\bar{\Omega}\times[a, b]\to E$ 是紧算子。

下面讨论度 $d(\Phi_\lambda, \Omega, p)$ 与 λ 的依赖关系。

定理 7.2.5 若 $p\bar{\in}\Phi_{[a,b]}(\partial\Omega)$（即 $\lambda\in[a, b]$，$u\in\partial\Omega$ 时 $\Phi_\lambda u\neq p$），则

$$d(\Phi_\lambda, \Omega, p)=\text{常数}\quad(\lambda\in[a, b])$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中由度的积分表达式知，$d(\Phi_\lambda, \Omega, p)$ 是 λ 的连续函数，取整数值。$[a, b]$ 上的连续函数，若取整数值，则必为常数，故 $d(\Phi_\lambda, \Omega, p)$ 为常数。

现设对 Brouwer 度定理 7.2.5 成立。因为 $\partial\Omega\times[a, b]$ 是 $E\times[a, b]$ 中的有界闭集，当 $\lambda\in[a, b]$，$u\in\partial\Omega$ 时 $\Phi_\lambda u\neq p$。由引理 7.1.10 知，$h_0=\inf\{\Phi_\lambda u|u\in\partial\Omega, \lambda\in[a, b]\}>0$。对 $0<\varepsilon\leqslant h_0$，存在紧算子 $F_{\lambda\varepsilon}:\Omega\times[a, b]\to E^{N(\varepsilon)}$，使得

$$\|F_{\lambda\varepsilon}u-F_\lambda u\|<\varepsilon\ \ ((u, \lambda)\in\Omega\times[a, b])$$

（与引理 7.1.9 类似可证）。相应地令 $\Phi_{\lambda\varepsilon}=I-F_{\lambda\varepsilon}$，则当 $\lambda\in[a, b]$，$u\in\partial\Omega_\varepsilon$ 时 $\Phi_{\lambda\varepsilon}u\neq p$，因此对 Leray-Schauder 度

$$d(\Phi_\lambda, \Omega, p)=d(\Phi_{\lambda\varepsilon}, \Omega_\varepsilon, p)=\text{常数}$$

还可考虑更一般的情形，即定义域也随参数 λ 而变化，我们叙述以下定理，

定理 7.2.6 设 Ω_* 是 $E\times[a,b]$ 中的有界开集，$F_\lambda:\bar{\Omega}_*\to E$ 是紧算子．记 $\Omega_\lambda=\{u|(u,\lambda)\in\Omega_*\}$，若当 $\lambda\in[a,b]$，$u\in\partial\Omega_\lambda$ 时 $\Phi_\lambda u\neq p$，则

$$d(\Phi_\lambda,\Omega_\lambda,p)=\text{常数}\quad(\lambda\in[a,b])$$

定理 7.2.5 和 7.2.6 指出：只要 Φ_λ 与定义域 Ω_λ 随 λ 变化的过程中，$\partial\Omega_\lambda$ 的象点总不与 p 点接触，则在 p 点的度保持不变．它们所指出的度的这种性质称为同伦不变性．

（四）度的边界性质．

定理 7.2.7 设 $p\bar{\in}\Phi_i(\partial\Omega)$ $(i=0,1)$，若当 $u\in\partial\Omega$ 时 $\Phi_0u=\Phi_1u$，则

$$d(\Phi_0,\Omega,p)=d(\Phi_1,\Omega,p)$$

证明　令 $\Phi_\lambda=\lambda\Phi_1+(1-\lambda)\Phi_0$，其中 $\lambda\in[0,1]$．当 $\lambda\in[0,1]$，$u\in\partial\Omega$ 时

$$\Phi_\lambda u=\Phi_0u\neq\theta$$

由同伦不变性得

$$d(\Phi_\lambda,\Omega,p)=\text{常数}$$

于是

$$d(\Phi_0,\Omega,p)=d(\Phi_1,\Omega,p)$$

证毕．

（五）奇点和它的指数．

定义 7.2.8 若 $u_0\in\Omega$，$\Phi u_0=\theta$ 称 u_0 为 Φ 的奇点或零点，若有 u_0 的某邻域 $\|u-u_0\|<\delta$ 属于 Ω，除 u_0 外，Φ 无奇点，则称 u_0 是 Φ 的孤立奇点．

在 E 中，我们记 $U_\delta(u_0)=\{u|\|u-u_0\|<\delta\}$，它是以 u_0 为心，δ 为半径的开球，又记 $U_\delta=U_\delta(\theta)$．

引理 7.2.9 设 u_0 是 Φ 的孤立奇点，当 $u\in U_\delta(u_0)\setminus\{u_0\}$ 时 $\Phi_u\neq\theta$，则对 $\forall\tau\in(0,\delta)$，

$$d(\Phi,U_\tau(u_0),\theta)=\text{常数}$$

证明　设 $0<\tau_1<\tau_2<\delta$，以下简记 $U_\tau=U_\tau(u_0)$，则

$$\bar{U}_{\tau_2}=\bar{U}_{\tau_1}\cup\overline{U_{\tau_2}\setminus U_{\tau_1}}$$

$$U_{r_1}\cap(U_{r_2}\setminus\bar{U}_{r_1})=\varnothing$$

(图 7-2.2)，于是

$$d(\Phi, U_{r_2}, \theta)=d(\Phi, U_{r_1}, \theta)$$
$$+d(\Phi, U_{r_2}\setminus\bar{U}_{r_1}, \theta)=d(\Phi, U_{r_1}, \theta)$$

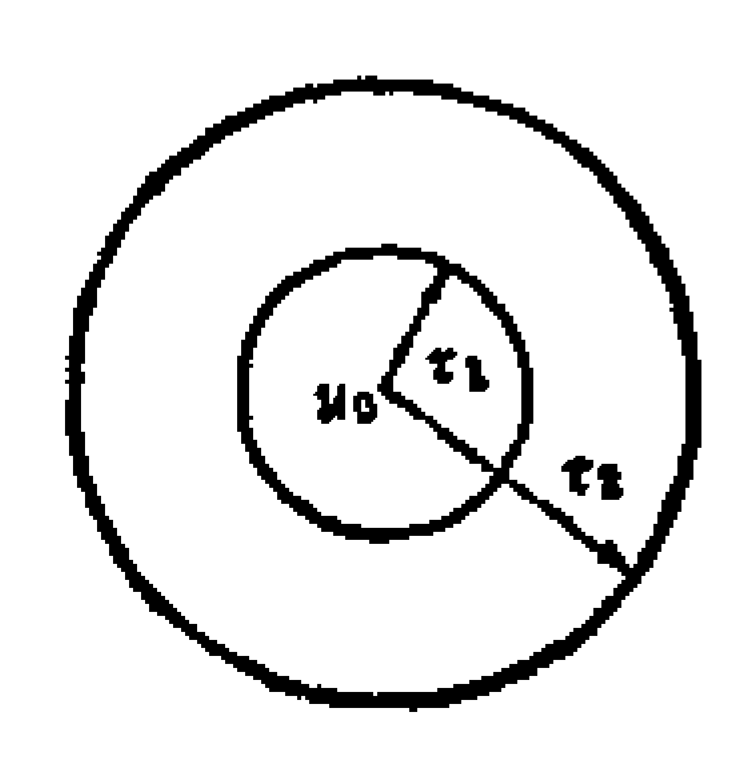


图 7-2.2

定义 7.2.10 设 u_0 是 Φ 的孤立奇点(当 $u\in U_\delta(u_0)\setminus\{u_0\}$ 时 $\Phi u\neq 0$)，则称 $d(\Phi, U_r(u_0), \theta)$ (其中 $0<r<\delta$) 为 Φ 在 u_0 的指数，记为 $i(u_0, \Phi)$，或简记为 $i(u_0)$.

定理 7.2.11 设 $\theta\bar{\in}\Phi(\partial\Omega)$，$\Phi$ 在 Ω 内有有限个奇点 $u_1, u_2, \cdots, u_s$. 则

$$d(\Phi, \Omega, \theta)=\sum_{j=1}^{s} i(u_j, \Phi)$$

证明留给读者。

(六) 高维空间中的 Brouwer 度转化为低维空间中的 Brouwer 度。

为了强调空间的维数 m，有时在度的记号中加上一个下标 m 如 E^m 中的度记为 $d_m(f, \Omega, p)$.

定理 7.2.12 设 $m<l$，E^m 为 E^l 的子空间，Ω 为 E^l 中的有界开集，$F: \bar{\Omega}\to E^m$ 连续. 又设 $f(x)=x-F(x)$，$p\in E^m\setminus f(\partial\Omega)$，$\Omega_m=\Omega\cap E^m\neq\varnothing$，$f$ 在 $\bar{\Omega}\cap E^m$ 上的限制记为 $\tilde{f}$，则

$$d_l(f, \Omega, p)=d_m(\tilde{f}, \Omega_m, p)$$

证明 对 $f\in C^1$ 给出证明，不妨设 p 不是 f 的临界值. 显然 $p\bar{\in}\tilde{f}(\partial\Omega_m)$. 若 $x\in\Omega$ 使得 $f(x)=p$，则 $x=p+F(x)\in E^m$. 于

是

$$Df(x)=\begin{pmatrix} I_{l-m} & 0 \\ * & D\tilde{f}(x) \end{pmatrix}$$

其中 $Df(x)$，$D\tilde{f}(x)$ 分别是 f，$\tilde{f}$ 在 x 处的导函数，I_{l-m} 是 E^{l-m} 中的恒同映射．由此可见 p 也不是 $\tilde{f}$ 的临界值．当 $x\in f^{-1}(p)$ 时

$$\operatorname{sign} J_f(x)=\operatorname{sign} J_{\tilde{f}}(x)$$

$$d_l(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_f(x)$$

$$=\sum_{x\in \tilde{f}^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_{\tilde{f}}(x)$$

$$=d_m(\tilde{f},\Omega_m,p)$$

证毕．

现在利用定理 7.2.5 和 7.2.12 证明引理 7.1.11．

$E^{N(\varepsilon_1)}$ 和 $E^{N(\varepsilon_2)}$ 可能不相包含，但总可取包含它们的 E 的有限维子空间 E^l．令 $\Omega_l=\Omega\cap E^l$．下面分两步：

先令 $\Phi_\lambda=\lambda\Phi_{\varepsilon_1}+(1-\lambda)\Phi_{\varepsilon_2}$，当 $\lambda\in[0,1]$，$x\in\partial\Omega_l$ 时

$$\begin{aligned}\|\Phi_\lambda x-p\|&\geqslant\|\Phi x-p\|-\|\Phi_{\lambda x}-\Phi x\|\\&\geqslant\|\Phi x-p\|-\lambda\|Fx-F_{\varepsilon_1}x\|\\&\quad-(1-\lambda)\|F_{\varepsilon_2}x-Fx\|\\&>h_0-\lambda\varepsilon_1-(1-\lambda)\varepsilon_2\geqslant 0\end{aligned}$$

由同伦不变性得

$$d(\Phi_{\varepsilon_1},\Omega_l,p)=d(\Phi_{\varepsilon_2},\Omega_l,p)$$

然后，直接由定理 7.2.12 得

$$d(\Phi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=d(\Phi_\varepsilon,\Omega_l,p)$$

证毕．

7.3 Leray-Schauder 度的计算

为了有效地利用度理论，必须解决度的计算问题．

已经知道

$$d(I,\Omega,p)=\begin{cases}1 & (p\in\Omega)\\0 & (p\bar{\in}\bar{\Omega})\end{cases}$$

令 $F_c u=u_0$, u_0 为某固定元素,

$$d(I-F_c,\Omega,\theta)=\begin{cases}1 & (u_0\in\Omega)\\0 & (u_0\bar{\in}\bar{\Omega})\end{cases}$$

本节进一步对某些特殊的紧算子给出计算度的方法.

7.3.1 Schauder 不动点定理

定理 7.3.1 (Schauder 不动点定理) 设 $\bar{\Omega}$ 是 E 中的闭凸集, $\operatorname{int}\bar{\Omega}=\Omega$, F 是 $\bar{\Omega}$ 上的紧算子, $F(\partial\Omega)\subset\Omega$, 则

$$d(I-F,\Omega,\theta)=1$$

因而在 Ω 内存在 F 的不动点.

为证明定理 7.3.1 先引述凸集的一个性质.

引理 7.3.2 设 U 是 E 中的凸集, $u_0\in\operatorname{int}U$, $u_1\in\partial U$. 若 $u_2=m(u_1-u_0)+u_0$, $m>1$, 则 $u_2\bar{\in}\bar{U}$.

引理 7.3.2 是十分直观的(见图 7-3.1), 可用 [GZF, p.185, 定理 3] 来证明,但这里略去这个证明.

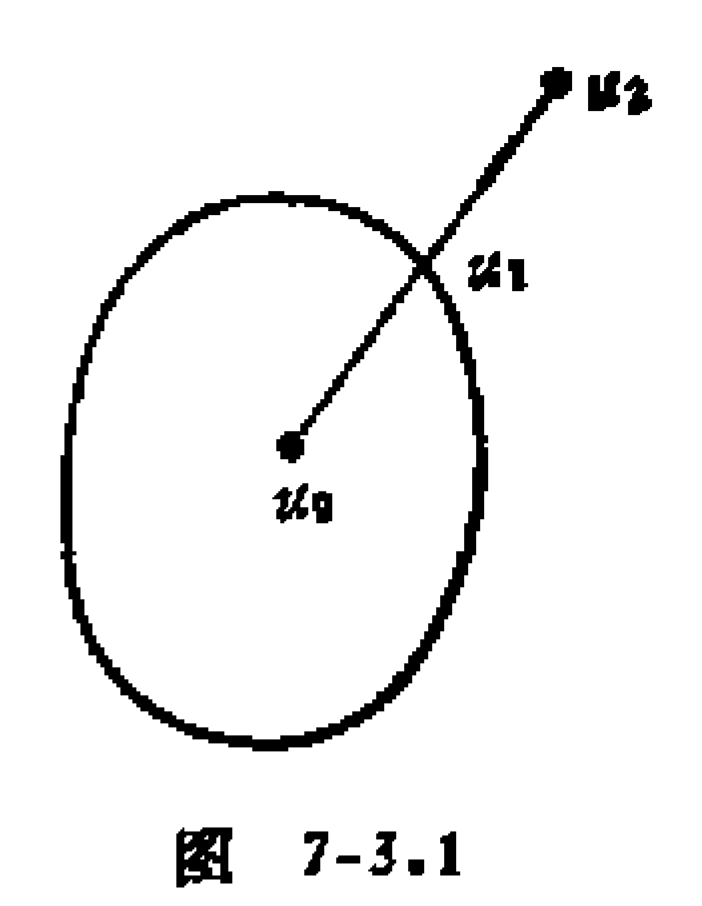


图 7-3.1

证明定理 7.3.1.

取 $u_0\in\Omega$, 令

$$\begin{aligned}\Phi_t u&=t(u-u_0)+(1-t)(u-Fu)\\&=u-(1-t)Fu-tu_0\end{aligned}$$

显然,当 $t=0,1$, $u\in\partial\Omega$ 时 $\Phi_t u\neq\theta$. 进一步证明当 $t\in(0,1)$, $u\in$

$\partial\Omega$ 时 $\Phi_t u \neq \theta$。若不然，$\exists t_1 \in (0, 1)$，$u_1 \in \partial\Omega$，

$$t_1(u_1 - u_0) + (1 - t_1)(u_1 - Fu_1) = \theta$$

即

$$\frac{1}{1 - t_1}(u_1 - u_0) + u_0 = Fu_1$$

这里 $\frac{1}{1 - t_1} > 1$，由引理 7.3.2 知，$\left[\frac{1}{1 - t_1}(u_1 - u_0) + u_0\right] \bar{\in} \bar{\Omega}$，但 $Fu_1 \in \Omega$，这便矛盾了。因此，由同伦不变性得

$$d(I - F, \Omega, \theta) = d(\Phi_0, \Omega, \theta) = d(\Phi_1, \Omega, \theta)$$
$$= d(I - F_\varepsilon, \Omega, \theta) = 1$$

证毕。

7.3.2 奇算子的度

定义 7.3.3 E 中点集 Ω 关于原点是对称的，若 $u \in \Omega$ 必有 $-u \in \Omega$。定义在关于原点对称的 Ω 上的算子 Φ，称为奇算子，若

$$\Phi(u) = -\Phi(-u) \quad (u \in \Omega)$$

显然，$\Phi = I - F$ 是奇算子，即 F 是奇算子。关于奇算子的度有以下性质。

定理 7.3.4 设 Ω，Ω^* 是 E 中关于原点对称的有界开集，F：$\bar{\Omega} \to E$ 是紧的奇算子，$\Phi = I - F$。若 $\theta \bar{\in} \Phi(\partial\Omega)$，则

$$d(\Phi, \Omega, \theta) = d(\Phi, \Omega^*, \theta)$$

定理 7.3.5 设 U_R 是 E 中以原点为心，半径为 R 的开球，F：$\bar{U}_R \to E$ 是紧的奇算子。若 $\theta \bar{\in} \Phi(\partial U_R)$，则

$$d(\Phi, U_R, \theta) = \text{奇数}$$

我们不证明这两个定理，只说明证明的思路：

(1) 先对 Brouwer 度证明定理 7.3.4 和 7.3.5。

(对于 C^1 函数，当 θ 不是临界值时可直接计算 Jacobi 行列式而得证。)

(2) 对于无穷维情形，能证明可取有限维逼近算子 F_ε 是奇算子，利用度的定义就转化为有限维情形。

7.3.3 线性紧算子的奇点指数

设 E 是实 Banach 空间，$A:E\to E$ 是紧线性算子。对任意 $R>0$，$\Phi=I-A$ 在 $\overline{U}_R$ 是奇算子。若 1 不是 A 的特征值，则 θ 是 Φ 的唯一奇点，于是

$$i(\theta,\Phi)=d(\Phi,U_R,\theta)=\text{奇数}$$

下面利用 A 的特征值求出这个奇点的指数。

根据紧线性算子的 Riesz-Schauder 理论，A 的特征值（使 $Au=\lambda u$ 有非零解的 λ）至多是可数集，没有零以外的极限点。对每个 A 的特征值 λ，不变子空间

$$E_\lambda=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{u\mid(A-\lambda I)^n u=\theta\}$$

的维数有限，称为特征值 λ 的重数。

A 的所有大于 1 的特征值 λ 对应的 E_λ 的直和记为 $\widetilde{E}_1$，则 $\widetilde{E}_1$ 仍是 A 的不变子空间，又存在 A 的不变子空间 $\widetilde{E}_2$，$\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2=\{\theta\}$ 且

$$E=\widetilde{E}_1\oplus\widetilde{E}_2$$

定理 7.3.6 设 A 是紧线性算子，不以 1 为特征值，所有大于 1 的特征值的重数和为 β，则

$$i(\theta,I-A)=d(I-A,U_R,\theta)=(-1)^\beta \tag{3.1}$$

证明 对 $\forall u\in E$ 可唯一表成

$$u=u_1+u_2,\ u_1\in\widetilde{E}_1,\ u_2\in\widetilde{E}_2$$

其中 $\widetilde{E}_1$ 是 β 维的。令

$$\Phi_t u=(2t-1)u_1+u_2-tAu=u-H(u,t)$$

其中

$$H(u,t)=2(1-t)u_1+tAu$$

当 $t\in[0,1]$，$u\in\partial U_R$ 时 $\Phi_t u\neq\theta$。若不然，则存在

$$u=u_1+u_2\in\partial U_R,\ t\in[0,1]$$

使得

$$(2t-1)u_1-tAu_1=\theta \tag{3.2}$$

$$u_2 - tAu_2 = \theta \tag{3.3}$$

当 $t=0$ 或 1 时，由 (3.2) 和 (3.3)，显然 $u_1=\theta$，$u_2=\theta$，与 $u=u_1+u_2\in\partial U_R$ 矛盾。当 $t\in(0,1)$ 时 $\frac{2t-1}{t}<1$，于是由(3.2)及 $\widetilde{E}_1$ 的定义得 $u_1=\theta$。由(3.3)得 $u_2=\theta$，也与 $u=u_1+u_2\in\partial U_R$ 矛盾。因此，由同伦不变性得

$$\begin{aligned} d(I-A,U_R,\theta) &= d(\Phi_1,U_R,\theta) \\ &= d(\Phi_0,U_R,\theta) \end{aligned}$$

令 $I_\beta u = u_1$，则

$$\Phi_0 u = -u_1 + u_2 = -2u_1 + u$$

即

$$\Phi_0 = -2I_\beta + I$$

根据度的定义

$$\begin{aligned} d(\Phi_0,U_R,\theta) &= d(I-2I_\beta,U_R,\theta) \\ &= d(-I_\beta,U_R\cap\widetilde{E}_1,\theta) = (-1)^\beta \end{aligned}$$

因此 (3.1) 成立。证毕。

7.3.4 可导紧算子的奇点指数

设 E 是 Banach 空间。对于可导紧算子，我们可以通过它的导算子来计算原算子的孤立奇点的指数。

定义 7.3.7 设有算子 $F:E\to E$，若存在有界线性算子 $A:E\to E$ 使得

$$\lim_{\Delta u\to\theta}\frac{\|F(u_0+\Delta u)-F(u_0)-A\Delta u\|}{\|\Delta u\|}=0$$

则称 F 在 $u=u_0$ 可导，A 是 F 在 u_0 的导算子，记为

$$DF(u_0)=A \text{ 或 } F'(u_0)=A$$

例 设 $K(s,t,u)$，$\frac{\partial K}{\partial u}$ 在 $0\leqslant s,\ t\leqslant 1,\ |u|\leqslant a$ 上连续，B_a 是 $C[0,1]$ 中的闭球 $\|u\|\leqslant a$，易知

$$F(u)=\int_0^1 K(s,t,u(t))dt$$

是定义在 B_a 上的紧算子。现再证对 $\forall u_0\in B_a$，F 有导算子：

$$Au=\int_0^1\frac{\partial}{\partial u}K(s,t,u_0(t))u(t)dt$$

证明

$$\begin{aligned}&\|F(u_0+\Delta u)-F(u_0)-A\Delta u\|/\|\Delta u\|\\&=\|\Delta u\|^{-1}\Big\|\int_0^1[K(s,t,u_0(t)+\Delta u(t))\\&\quad-K(s,t,u_0(t))\\&\quad-\frac{\partial}{\partial u}K(s,t,u_0(t))\Delta u(t)]dt\Big\|\end{aligned}$$

由微分中值定理及 $\dfrac{\partial K}{\partial u}$ 的一致连续性可得

$$\lim_{\|\Delta u\|\to 0}[\|F(u_0+\Delta u)-F(u_0)-A\Delta u\|/\|\Delta u\|]=0$$

因此得结论。

显然，此例中导算子也是紧的，现证一般结论。

引理 7.3.8 若 F 是紧算子，则它的导算子也是紧的。

证明 设 F 在 u^* 的导算子 A 不紧，则对 E 中的单位球 U_1，$A(U_1)$ 不是列紧集。一定存在某 $\varepsilon_0>0$，$A(U_1)$ 不存在有限 ε_0 网，于是存在 $\Delta u_i\in U_1$，使得

$$\|A\Delta u_i-A\Delta u_j\|>\varepsilon_0$$
$$(i\neq j,\ i,\ j=1,2,3,\cdots)$$

由可导的定义知，$\exists\delta>0$，当 $\|\Delta u\|<\delta$ 时

$$\|F(u^*+\Delta u)-F(u^*)-A\Delta u\|<\frac{\varepsilon_0}{3}\|\Delta u\|$$

因此

$$\begin{aligned}&\|F(u^*+\delta\Delta u_i)-F(u^*+\delta\Delta u_j)\|\\&\geqslant\delta\|A\Delta u_i-A\Delta u_j\|-\|F(u^*+\delta\Delta u_i)\\&\quad-F(u^*)-A\delta\Delta u_i\|\\&\quad-\|F(u^*+\delta\Delta u_j)-F(u^*)-A\delta\Delta u_j\|\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon_0 \delta}{3} \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \cdots)$$

由此可知

$$F(u^* + \delta \Delta u_1),\ F(u^* + \delta \Delta u_2),\ \cdots$$

中不能选出收敛的子列，与 F 的紧性矛盾．证毕．

现在利用导算子判断可导紧算子奇点的孤立性并计算它的指数．

定理 7.3.9 设 F 是实 Banach 空间 E 上紧算子，$\Phi = I - F$ 以 u_0 为奇点，$DF(u_0) = A$ 不以 1 为特征值，则

1° u_0 是 Φ 的孤立奇点；

2° u_0 的指数

$$i(u_0, \Phi) = (-1)^\beta$$

其中 β 是 A 的大于 1 的特征值的重数和．

证明 因 $D\Phi(u_0) = I - A$，所以

$$\Phi(u) = (I - A)(u - u_0) + R(u - u_0)$$

$$R(u - u_0) = o(\|u - u_0\|) \quad (u \to u_0)$$

令

$$\Phi_t(u) = (I - A)(u - u_0) + tR(u - u_0) \quad (t \in [0, 1])$$

$\|u\| = 1$ 时 $u - Au \neq \theta$，由 A 的紧性，

$$\inf_{\|u\|=1} \|u - Au\| = \alpha > 0$$

于是，对 $\forall u \neq u_0$，

$$\left\| \frac{u - u_0}{\|u - u_0\|} - A \frac{u - u_0}{\|u - u_0\|} \right\| \geqslant \alpha$$

即

$$\|(I - A)(u - u_0)\| \geqslant \alpha \|u - u_0\|$$

由可导性，$\exists \delta > 0$，当 $\|u - u_0\| \leqslant \delta$ 时

$$\|R(u - u_0)\| \leqslant \frac{\alpha}{2} \|u - u_0\|$$

于是

$$\|\Phi_t(u)\| \geqslant \|(I - A)(u - u_0)\| - t\|R(u - u_0)\|$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\|u - u_0\|$$

由此得 u_0 是 Φ 的孤立奇点，且由同伦不变性得

$$d(\Phi_t, U_\delta(u_0), \theta) = \text{常数}$$

因此

$$\begin{aligned} i(u_0, \Phi) &= d(\Phi_1, U_\delta(u_0), \theta) \\ &= d(\Phi_0, U_\delta(u_0), \theta) \\ &= d(I - A, U_\delta(\theta), \theta) \quad \text{（平移时度不变）} \\ &= i(\theta, I - A) = (-1)^\beta \end{aligned}$$

证毕。

7.3.5 渐近线性紧算子的奇点指数

定义 7.3.10 设 F 是 E 上的紧算子，若存在 E 上的有界线性算子 A 使得

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\|Fu - Au\|}{\|u\|} = 0$$

则称 F 为 E 上的渐近线性紧算子，A 为 F 在无穷远处的导算子，记为 $DF(\infty) = A$。

引理 7.3.11 设 F 是 E 上的渐近线性紧算子，$DF(\infty) = A$，则 A 也是紧算子。

证明 与引理 7.3.8 的证明类似。

定理 7.3.12 设 F 是实 Banach 空间 E 上的渐近线性紧算子，$DF(\infty) = A$。若 1 不是 A 的特征值，则存在常数 $R_0 > 0$，当 $R \geqslant R_0$ 时

$$d(I - F, U_R(\theta), \theta) = (-1)^\beta$$

其中 β 是 A 的大于 1 的特征值的重数和。

证明 由于 $DF(\infty) = A$，所以

$$\Phi(u) = u - F(u) = u - Au + R(u)$$

$$R(u) = o(\|u\|) \quad (\|u\| \to +\infty)$$


令

$$\Phi_t(u) = u - Au - tR(u)$$

由于 $\exists \alpha > 0$，对 $\forall u \neq \theta$，$\|u - Au\| \geqslant \alpha\|u\|$，对此$\alpha$，$\exists R_0 > 0$，当 $R \geqslant R_0$时

$$\|R(u)\| < \frac{\alpha}{2}\|u\|$$

所以当 $\|u\| \geqslant R_0$，$t \in [0, 1]$ 时

$$\|\Phi_t u\| \geqslant \frac{\alpha}{2}\|u\| > 0$$

由同伦不变性得

$$d(\Phi_1, U_R(\theta), \theta) = d(\Phi_0, U_R(\theta), \theta)$$

即

$$d(I - F, U_R(\theta), \theta) = d(I - A, U_R(\theta), \theta) = (-1)^\beta$$

证毕。

7.4 度理论的应用——半线性椭圆型方程边值问题解的存在性

本节将用度理论讨论边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x, u) & (x \in \Omega) \\ Bu = g(x) & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{4.1}$$

解的存在性，其中 L，B，$c(x) \geqslant 0$，$g(x)$，$f(x, u)$ 满足第三章的条件。

设E是 Banach 空间，利用度理论证明E中算子方程

$$\Phi u \equiv u - Tu \tag{4.2}$$

解的存在性时，常用如下定理。

定理 7.4.1 设算子方程

$$\Phi(\lambda)u = u - T(\lambda)u = \theta \tag{4.3}$$

满足以下条件：

1° $T(\lambda):[a, b] \times E \to E$ 是紧算子。

2° 对一切$\lambda \in [a, b]$，存在常数 $M > 0$，方程 (4.3) 在球

面 ∂U_M 无解.

3° 存在某 $\lambda_0\in[a,b]$, $d(\Phi(\lambda_0),U_M,\theta)\neq 0$. (如$\Phi(\lambda_0)u=\theta$ 只有有限个孤立解其指数和不为零, 或 $T(\lambda_0)u\equiv u_0$, u_0 是某个元素. 此时 $\Phi(\lambda_0)u=\theta$ 有唯一解 u_0, 其指数为 1.)

则对任意 $\lambda\in[a,b]$, (4.3) 在 U_M 内有解.

证明 由同伦不变性

$$d(\Phi(\lambda),U_M,\theta)=d(\Phi(\lambda_0),U_M,\theta)\neq 0$$

$(\lambda\in[a,b])$. 因此 $\Phi(\lambda)u=\theta$ 在 U_M 内有解. 证毕.

该定理给出的方法是:引进一个同伦场(含参数的算子方程), 把原问题与已知其度不为零的特殊场连接起来. 为使这个同伦场的度在某球面上有意义,必须对解做先验估计.

为把上述原理用于边值问题(4.1), 首先要选择适当的函数空间. 在此空间中把 (4.1) 化为算子方程 (4.2).

我们还假定, 当 $c(x)\equiv 0$ 时边条件中的 $b(x)\neq 0$.

对任意 $u\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})(u\in L_p(\bar{\Omega}),\ p>1)$.

$$\begin{cases}Lv+c(x)v=u\\ Bv=g\end{cases}$$

有唯一解 $v\in C^{2+\alpha}(\Omega)(v\in W_p^2(\bar{\Omega}))$, 记为

$$v=Au$$

引理 3.2.3 指出, A 是紧算子.

令

$$F(u)=f(x,u) \tag{4.4}$$

将 (4.1) 改写成

$$u-AF(u)=\theta \tag{4.5}$$

引理 7.4.2 若 $u(x)$ 是 (4.5) 在 $C(\bar{\Omega})$ 中的解; 则 $u(x)$ 是 (4.1) 的古典解且 $u\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

这个引理的证明由读者自己完成.

现在引进含参数 t 的算子方程

$$u-AtF(u)=0 \tag{4.6}$$

等价于

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = tf(x, u) & (x \in \Omega) \\ Bu = g(x) & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 $t \in [0, 1]$。我们可得

定理 7.4.3 设存在常数 $M > 0$，使得当 $t \in [0,1]$ 若(4.7)有解 u 时必有 $\|u\| < M$，其中 $\|\cdot\|$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的范数。则(4.1)存在解 $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$。

证明 在 $E = C(\bar{\Omega})$ 中考察 (4.6)，则有

1° $AtF:[0,1] \times E \to E$ 是紧算子；

2° 对一切 $t \in [0, 1]$，方程 (4.6) 在球面 ∂U_M 无解；

3° $t = 0$ 时 (4.6) 有唯一解 $u = u_0$，其指数为 1。因此，由定理 7.4.1，对任意 $t \in [0, 1]$，(4.6) 在 U_M 内有解。特别是当 $t = 1$ 时，即 (4.1) 存在解 $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$。证毕。

7.5 度理论的应用——多解问题

7.5.1 Banach 空间中紧算子方程的多解问题

设 E 为 Banach 空间，$T: E \to E$ 为紧算子。令 $\Phi = I - T$。我们讨论算子方程

$$\Phi u = u - Tu = \theta \tag{5.1}$$

的多解问题。

引进含参数 t 的算子方程

$$\Phi_t u \equiv u - T_t u = \theta \tag{5.2}$$

其中 $T_t:[0,1] \times E \to E$ 是紧算子，而且当 $t = 1$ 时 $T_1 = T$。

定理 7.5.1 假设 T_t 满足以下条件：

1° 存在 $M_0 > 0$，对 $\forall t \in [0, 1]$，若(5.2)有解 u，则 $\|u\| < M_0$。

2° 存在有界开凸集 V，使得 $T_1(\bar{V}) \subset V$，且 $\theta \notin \bar{V}$。

3° 存在 $\delta > 0$，使得 $\bar{U}_\delta(\theta) \cap \bar{V} = \emptyset$，当 $t \in [0,1]$ 时 (5.2) 在 $U_\delta(\theta)$ 中无非零解。

4° T_0 是零算子。

则 (5.1) 至少存在两个非零解.

证明 由假设 2° 及 Schauder 不动点定理知. 在 V 内 (5.1) 存在一个(非零)解. 且

$$d(\Phi, V, \theta) = 1 \tag{5.3}$$

由假设1°,存在球 $U_R = U_R(\theta)$,$\bar{V}\subset U_R$, 且 $\theta\bar{\in}\Phi_t(\partial U_R)(t\in[0,1])$. 又由假设 3°. 存在球 $\bar{U}_\delta\subset U_R$, $\bar{U}_\delta$ 与 $\bar{V}$ 不交,当 $t\in[0,1]$时(5.2) 在 $\bar{U}_\delta$ 无非零解.

令 $U_\delta^R = U_R\backslash\bar{U}_\delta$, 则

$$U_\delta^R = V\cup(U_\delta^R\backslash\bar{V})$$

由度的可加性得

$$d(\Phi, U_\delta^R, \theta) = d(\Phi, V, \theta) + d(\Phi, U_\delta^R\backslash\bar{V}, \theta) \tag{5.4}$$

又由度的同伦不变性得

$$d(\Phi_t, U_\delta^R, \theta) = \text{常数} \quad (t\in[0, 1])$$

再由 4° 得

$$d(\Phi, U_\delta^R, \theta) = d(\Phi_0, U_\delta^R, \theta) = d(I, U_\delta^R, \theta) = 0 \tag{5.5}$$

将 (5.3) 和 (5.5) 代入 (5.4) 得

$$d(\Phi, U_\delta^R\backslash\bar{V}, \theta) = -1$$

因此, (5.1) 在 $U_\delta^R\backslash\bar{V}$ 内又有一个解,即另一个非零解. 证毕.

定理 7.5.2 设 T 是可导渐近线性紧算子. 1 不是 $DT(\infty)$ 的特征值(或 $I - DT(\infty)$ 可逆). 若 (5.1) 有两个不同的解 $u = u_j$ $(j = 1, 2)$, 且 $DT(u_j)$ 不以 1 为特征值 (或 $I - DT(u_j)$ 可逆). 则 (5.1) 至少还有另外一个解.

证明 若不然的话. 可取 R 充分大, 使得 $u_1, u_2\in U_R$. 并由渐近线性紧算子的性质得

$$d(I - T, U_R, \theta) = (-1)^\beta \tag{5.6}$$

又

$$d(I - T, U_R, \theta) = i(u_1) + i(u_2) \tag{5.7}$$

因为 $i(u_j) = +1$ 或 -1,所以(5.7)的值 $\in\{2, 0, -2\}$. 这与(5.6) 矛盾. 证毕.

7.5.2　由严格上、下解构造凸集

现在考虑椭圆型方程组的第一边值问题

$$\begin{cases} N_i u_i \equiv L_i u_i + c_i u_i = f_i(x, u_1, u_2) \quad (x \in \Omega) \\ B_i u_i \equiv u_i = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \\ (i = 1, 2) \end{cases} \tag{5.8}$$

它满足第五章所指出的条件。并且 $c_i(x) \geqslant 0$，$c_i(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$。$f_i$ 在 $\bar{\Omega} \times \sum$ 上对 x 是 Hölder 连续的，对 u_1、u_2 是 Lipschitz 的，即存在 $M > 0$，当 (u_1, u_2)，$(v_1, v_2) \in \sum$，$(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$，$x, y \in \bar{\Omega}$ 时

$$\begin{aligned} &|f_i(x, u_1, u_2) - f_i(y, v_1, v_2)| \\ &\quad < M[|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |x - y|^\alpha] \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{5.9}$$

其中$\sum$是 (u_1, u_2) 空间中的某有界区域。

将 (5.8) 改写为

$$\begin{cases} N_i u_i + M u_i = M u_i + f_i(x, u_1, u_2) \quad (x \in \Omega) \\ u_i = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \\ (i = 1, 2) \end{cases}$$

对任意 $u = (u_1, u_2) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$（或 $u \in L_p(\Omega) \times L_p(\Omega)$）由

$$\begin{cases} N_i v_i + M v_i = M u_i + f_i(x, u_1, u_2) \quad (x \in \Omega) \\ v_i = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \\ (i = 1, 2) \end{cases} \tag{5.10}$$

可唯一解出

$$v = (v_1, v_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})(v \in W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)).$$

记为 $v = \hat{T}u$。

引理 7.5.3　在 $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$（或 $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$）上 $\hat{T}$ 是紧算子并且 (5.8) 与 $u - \hat{T}u = 0$ 等价。

证明　由读者自己完成。

为了构造一个开凸集 U，使得 $\hat{T}(\bar{U}) \subset U$。我们引进严格上

下解的定义。

设 $\{f_1, f_2\}$ 在Σ上是拟单调的。

定义 7.5.4 设 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是 (5.8) 的上下解。对 $i=1, 2$，在 $N_i\tilde{u}_i$ 与 $B_i\tilde{u}_i$ 满足的关系式中有一个不取恒等号。同样在 $N_i\underline{u}_i$ 与 $B_i\underline{u}_i$ 满足的关系式中有一个不取恒等号，则称 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是 (5.8) 的严格上、下解。

构造迭代序列

$$\begin{cases}N_iV_i^{(k)}+MV_i^{(k)}=MV_i^{(k-1)}+f_i(x, V_1^{(k-1)}, V_2^{(k-1)}) \\ V_i^{(k)}|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{5.11}$$

不妨设 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ 是拟增的，又设 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)\in\Sigma$，

$$\tilde{u}_i(x)>\underline{u}_i(x) \quad (i=1, 2, x\in\Omega)$$

取 $(V_1^{(0)}, V_2^{(0)})=(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，相应地由 (5.11) 确定的解记为 $(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$。取 $(V_1^{(0)}, V_2^{(0)})=(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$，相应地由(5.11)得 $(\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$。

因为

$$\begin{cases}N_i\bar{u}_i^{(1)}+M\bar{u}_i^{(1)} \\ \qquad =M\tilde{u}_i-f_i(x, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \quad (x\in\Omega) \\ \bar{u}_i^{(1)}=0 \quad (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_i\tilde{u}_i\geqslant f_i(x, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) & (x\in\Omega) \\ \tilde{u}_i\geqslant 0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

其中有一个不为恒等号，令 $w_i=\tilde{u}_i-\bar{u}_i^{(1)}$。则

$$N_iw_i+Mw_i\geqslant 0 \quad (x\in\Omega)$$

$$w_i\geqslant 0 \quad (x\in\partial\Omega)$$

显然，$w_i\not\equiv 0$。由强极值原理(若 $N_iu+Mu\geqslant 0\,(x\in\Omega)$，$u$ 在 Ω 内点取非正最小值，则 u 恒为常数)，则得 $w_i>0$，即

$$\bar{u}_i^{(1)}<\tilde{u}_i \quad (x\in\Omega)$$

同理可证

$$\underline{u}_i<\underline{u}_i^{(1)} \quad (x\in\Omega)$$

现令 $z_i=\bar{u}_i^{(1)}-\underline{u}_i^{(1)}$。则

$$\begin{cases} N_i z_i + M z_i \\ \quad = M(\tilde{u}_i - \underline{u}_i) + f_i(x, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - f_i(x, \underline{u}_1, \underline{u}_2) & (x \in \Omega) \\ z_i = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

由于 $\{f_1, f_2\}$ 是拟增的及条件 (5.9)，则得

$$\begin{cases} N_i z_i + M Z_i > 0 & (x \in \Omega) \\ z_i = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

于是

$$z_i > 0 \ (x \in \Omega), \quad \frac{\partial z_i}{\partial n} < 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

即

$$\underline{u}_i^{(1)} < \bar{u}_i^{(1)} \quad (x \in \Omega)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial n} < \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial n} \quad (x \in \partial\Omega)$$

同理可归纳证明，当 $x \in \Omega$ 时

$$\underline{u}_i < \underline{u}_i^{(1)} < \underline{u}_i^{(2)} < \cdots < \bar{u}_i^{(2)} < \bar{u}_i^{(1)} < \tilde{u}_i \quad (i = 1, 2)$$

令 $E = \{u \mid u = (u_1, u_2) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}),\ u_i(x) = 0$
$(i = 1, 2,\ x \in \partial\Omega)\}$

容易证明：对 $\forall u = (u_1, u_2) \in E$，$v = (v_1, v_2) = \hat{T} u$，若

$$\underline{u}_i \leqslant u_i \leqslant \tilde{u}_i \quad (i = 1, 2,\ x \in \Omega)$$

则存在常数 M_1 使得 $\|v\|_E < M_1$。在 E 中令

$$U = \Big\{ u \mid u \in E,\ \underline{u}_i^{(1)}(x) < u_i(x) < \bar{u}_i^{(1)}(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial n} < \frac{\partial u_i}{\partial n} < \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial n} \quad (x \in \partial\Omega),\ \|u\|_E < M_1 \Big\} \qquad (5.12)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的外法向导数，则 U 是 E 中的开凸集。

对任意 $u \in \bar{U}$。同前面一样可证：若 $v = \hat{T} u$，则

$$\underline{u}_i^{(1)}(x) < v_i(x) < \bar{u}_i^{(1)}(x) \quad (x \in \Omega)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial n} < \frac{\partial v_i}{\partial n} < \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial n} \quad (x \in \partial\Omega)$$

$$\|v\| < M_1$$

则 $\hat{T}(\bar{U})\subset U$.

7.5.3 椭圆型方程组的多解问题——存在严格上、下解的情形

现在再回到方程组 (5.8)，即

$$\begin{cases}N_iu_i = f_i(x, u_1, u_2) & (x\in \Omega)\\ u_i = 0 & (x\in \partial\Omega)\end{cases} \tag{5.13}$$

引进含参数 t 的方程组

$$\begin{cases}N_iu_i + tMu_i = t[Mu_i + f_i(x, u_1, u_2)] & (x\in \Omega)\\ u_i = 0 & (x\in \partial\Omega)\end{cases} \tag{5.14}$$

其中 $t\in [0, 1]$。

定理 7.5.5 设

1° $\{f_1, f_2\}$ 是拟单调的，

2° 存在 $R_0>0$。对一切 $t\in[0, 1]$，若 (5.14) 有正解 $u=(u_1, u_2)$，则 $\max\limits_{\Omega}|u_i|<R$ $(i=1, 2)$，

3° (5.13) 存在严格上、下解 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$

$$0<\underline{u}_i<\tilde{u}_i \quad (x\in \Omega, i=1, 2)$$

4° $f_i(x, u_1, u_2)|_{u_i=0}=0$，$f_i(x, u_1, u_2)=o(|u_i|)(u\to 0$，对 $x\in\bar{\Omega}$ 一致)。

则 (5.13) 至少存在两个非零正解。

证明 考虑辅助问题

$$\begin{cases}N_iu_i = \tilde{f}_i(x, u_1, u_2) & (x\in \Omega)\\ u_i = 0 & (x\in \partial\Omega)\\ (i=1, 2)\end{cases} \tag{5.15}$$

及相应的

$$\begin{cases}N_iu_i + tMu_i = t[Mu_i + \tilde{f}_i(x, u_1, u_2)] & (x\in \Omega)\\ u_i = 0 & (x\in \partial\Omega)\\ (i=1, 2)\end{cases} \tag{5.16}$$

其中 $t\in[0, 1]$，

$$\tilde{f}_i(x, u_1, u_2)=\begin{cases}f_i(x, u_1, u_2) & (u_i\geqslant 0)\\ 0 & (u_i<0)\end{cases} \quad (i=1, 2)$$

显然 $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$ 与 $\{f_1, f_2\}$ 有相同的拟单调性，$\tilde{f}_i$ 满足 f_i 的光滑性假定。不妨设有相同的 Lipschitz 常数 M。

在 E 中，(5.15) 等价于算子方程

$$u = \hat{T}u$$

其中 $v = \hat{T}u$ 由 (5.10) 定义，该式中 f_i 要换成 $\tilde{f}_i$，$\hat{T}: E \to E$ 是紧的。E 中的范数记为 $\|.\|_E$. (5.16) 等价于含参数 t 的算子方程

$$u = \hat{T}_t u$$

其中 $v = \hat{T}_t u$ 由

$$\begin{cases} N_i v_i + tMv_i = t[Mu_i + \tilde{f}_i(x, u_1, u_2)] & (x \in \Omega) \\ v_i = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \\ (i = 1, 2) \end{cases} \tag{5.17}$$

定义。$\hat{T}_t: [0, 1] \times E \to E$ 是紧算子。

现分以下几步：

(1) 设 (u_1, u_2) 是 (5.16) 的解。令

$$\Omega_i^- = \{x \mid x \in \Omega, u_i(x) < 0\}$$

则

$$N_i u_i = 0 \quad (x \in \Omega_i^-)$$
$$u_i = 0 \qquad (x \in \partial\Omega_i^-)$$

于是 $u_i \equiv 0 (x \in \Omega_i^-)$，即 $\Omega_i^- = \varnothing$. 因此，若 (u_1, u_2) 是 (5.16) 的解，则一定是 (5.14) 的解且 $u_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, x \in \Omega)$，并有

$$\max_{\bar{D}} |u_i| < R_0 \quad (i = 1, 2)$$

由嵌入定理及 L_p 估计得

$$\begin{aligned} |u_i|_{1+\alpha} &\leqslant C_2(\|u_1\|_{2,p} + \|u_2\|_{2,p}) \\ &\leqslant C_4(\|f_1(x, u_1, u_2)\|_p + \|f_2(x, u_1, u_2)\|_p \\ &\qquad + \|u_1\|_p + \|u_2\|_p) \end{aligned}$$

因而存在 $R > 0$，使得

$$\|u\|_E < R$$

(2) 显然，$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$，$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 也是 (5.15) 的上、下解。将 $\tilde{f}_i$ 代替 f_i，如 (5.12) 定义 E 中的凸开集 U，则有

$$\hat{T}(\overline{U})\subset U,\ \theta\in\overline{U}$$

(3) 存在 $\delta>0$ 当 $t\in[0,1]$ 时(5.16)在 $\overline{U}_\delta(\theta)$ 中无非零解。若不然，则 (5.16) 存在解 $(t_m, u^{(m)}(x))$，其中

$$t_m\in[0,1],\ \|u^{(m)}(x)\|_E\neq 0,\ \|u^{(m)}(x)\|_E\xrightarrow{\gamma}0$$

(当 $m\to+\infty$ 时)。由解的先验估计得

$$\begin{aligned}\|u^{(m)}\|_E&\leqslant C_1[\|f_1(x, u_1^{(m)}, u_2^{(m)})\|_p+\|f_2(x, u_1^{(m)}, u_2^{(m)})\|_p]\\&\leqslant C_2[\max_{x\in\bar{\Omega}}|f_1(x, u_1^{(m)}, u_2^{(m)})|\\&\qquad+\max_{x\in\bar{\Omega}}|f_2(x, u_1^{(m)}, u_2^{(m)})|]\end{aligned}$$

由假设 4° 知，当 m 充分大时

$$\|u^{(m)}\|_E\leqslant\frac{1}{2}\|u^{(m)}\|_E$$

这便矛盾了。

(4) 显然 $\hat{T}_0$ 是零算子。

综合上述分析，最后利用定理 7.5.5 即得结论。证毕。

下面讨论一个例子。

例

$$\begin{cases}\widetilde{N}_1u_1=\lambda_1u_1^{p_1}(-b_{11}u_1+b_{12}u_2+d_1)\quad(x\in\Omega)\\\widetilde{N}_2u_2=\lambda_2u_2^{p_2}(b_{21}u_1-b_{22}u_2+d_2)\\u_1|_{\partial\Omega}=0,\ u_2|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{5.18}$$

其中 $p_1, p_2\geqslant 2$ 为自然数。

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_iu=&-\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{k,l}^{(i)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\\&+c_i(x)u\quad(i=1,2)\end{aligned}$$

$$a_{k,l}^{(i)}\in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}),\ c_i\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\ c_i\geqslant 0\ (x\in\Omega)$$

在讨论 (5.18) 时，我们要引用 [Ra. 1, 定理 1.16]。现叙述如下:

定理 7.5.6 若 $g(x, u)$ 满足:

1° g 在 $\bar{\Omega}\times[0,+\infty)$ 是局部 Lipschitz 的，$g(x,0)=0$，

2° 存在 $a>0$，当 $u\geqslant a$ 时 $g(x,u)<0$，

3° $G(x,u)=\int_0^u g(x,s)ds$，存在 $(x^*,u^*)\in\Omega\times[0,a)$，使得 $G(x^*,u^*)>0$，

4° $g(x,u)=o(u)(u\to 0$，对 $x\in\bar{\Omega}$ 一致)，

则存在 $\lambda^*>0$，当 $\lambda\geqslant\lambda^*$ 时

$$\begin{cases}\tilde{N}u=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{ij})+c(x)u\\ \quad =\lambda g(x,u)\quad(x\in\Omega)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

存在解 $u(x)>0(x\in\Omega)$，其中 $\tilde{N}u$ 与 $\tilde{N}_iu$ 有相同的假定。

利用定理 7.5.5 和 7.5.6 我们可得

定理 7.5.7 设 b_{ij}，d_i 为正的常数。此外

$$\begin{vmatrix}-b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & -b_{22}\end{vmatrix}>0 \tag{5.19}$$

则存在 $\lambda_i^*>0$。当 $\lambda\geqslant\lambda_i^*$ $(i=1,2)$ 时 (5.18) 至少存在两个非零正解。

证明 只须证明

(1) (5.18) 存在严格上、下解。

考察
$$\begin{cases}\tilde{N}_i=\lambda_i u^{p_i}(d_i-b_{ii}u)\quad(x\in\Omega)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{5.20}$$

由定理 7.5.6 知。存在 $\lambda_i^*>0$。当 $\lambda_i\geqslant\lambda_i^*$ 时 (5.20) 存在正解 $\underline{u}_i(x)>0$ $(x\in\Omega)$。由 (5.19) 可知，存在常数 $M_i>0$，$M_i>\underline{u}_i(x)$ $(x\in\Omega)$，并有

$$-b_{11}M_1+b_{12}M_2+d_1\leqslant 0$$

$$b_{21}M_1-b_{22}M_2+d_2\leqslant 0$$

易验证 (M_1,M_2)，$(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$ 是 (5.18) 的严格上、下解。

(2) 设 $u_1\geqslant 0$，$u_2\geqslant 0$ 是方程组

$$\begin{cases}\tilde{N}_1u_1+tMu_1=t[Mu_1+u_1^{p_1}(-b_{11}u_1+b_{12}u_2+d_1)]\\ \tilde{N}_2u_2+tMu_2=t[Mu_2+u_2^{p_2}(b_{21}u_1-b_{22}u_2+d_2)]\\ u_1|_{\partial\Omega}=0,\quad u_2|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的解。设它们不恒为零。则它们分别在Ω内某内点 x_i^* 取正最大值 q_i。于是

$$0 \leqslant q_1^{p_1}(-b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + d_1)$$
$$0 \leqslant q_2^{p_2}(+b_{21}q_1 - b_{22}q_2 + d_2)$$

从而

$$0 \leqslant -b_{11}b_{21}q_1^2 + 2b_{12}b_{21}q_1q_2 - b_{12}b_{22}q_2^2 + b_{21}d_1q_1 + b_{12}d_2q_2$$

其中 $-b_{11}b_{21}y_1^2 + 2b_{12}b_{21}y_1y_2 - b_{12}b_{22}y_2^2$ 是负定二次型。因此存在常数 $R_0 > 0$，使得

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2} < R_0$$

因此，由定理 7.5.5 得结论。证毕。

上面的讨论对于椭圆型方程式的边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x, u) & (x \in \Omega) \\ Bu = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{5.21}$$

也是适用的。这里 L, B, f 满足第三章的假设条件。

7.5.4 椭圆型方程的多解问题——极小解与极大解不等的情形

若 (5.21) 存在上、下解 $\tilde{u}(x)$, $\underset{\sim}{u}(x)$, $\underset{\sim}{u}(x) \leqslant \tilde{u}(x)$, 则在 $[\underset{\sim}{u}(x), \tilde{u}(x)]$ 中 (5.21) 存在极小解 $u_1(x)$ 和极大解 $u_2(x)$。现设 $u_1(x)$, $u_2(x)$ 是 $[\underset{\sim}{u}, \tilde{u}]$ 中的两个解，进一步假定：

1° $\underset{\sim}{u}(x) \leqslant u_1(x)$, $u_2(x) \leqslant \tilde{u}(x)$ $(x \in \Omega)$,

2° f, $\dfrac{\partial f}{\partial u} \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times [a, b])$, 其中 $[a, b] \supset [\underset{\sim}{u}(x) - \delta, \tilde{u}(x) + \delta]$ $(x \in \bar{\Omega})$, $\delta > 0$ 是某正数,

3° 或 $c(x) \geqslant c_0 > 0$ 或 $b(x) \geqslant b_0 > 0$($b(x)$ 包含在边条件中)。

我们将证明：(5.21) 只有解 u_1 和 u_2 是一种特殊情形。一般情形下 (5.21) 至少还有另外一个解。

取 $E = C(\bar{\Omega})$。(5.21) 的等价算子方程是

$$u = AF(u) \tag{5.22}$$

A, F 如 §7.4 所指出。AF 在 E 中是紧的。

为了求 AF 在 $u=u_i$ 的导算子，先引述关于线性椭圆型方程解的 C 模估计的引理。

引理 7.5.8 设 $u(x)$ 是

$$Lu+cu=f(x)\quad (x\in\Omega),\quad Bu|_{\partial\Omega}=0$$

的古典解。其中 $f(x)\in C(\bar{\Omega})$. 则

$$\|u\|_C\leqslant C^*\|f\|_C$$

其中 C^* 为常数。$\|\cdot\|_C$ 为 $C(\bar{\Omega})$ 空间中的模。

引理 7.5.9 在 E 中 AF 在 $u=u_i$ 的导算子是

$$AF'(u_i),\text{ 其中 } F'(u_i)=\frac{\partial f(x,u_i(x))}{\partial u}.$$

证明 已知 $u_i=AF(u_i)$，令

$$v=AF(u),\quad w=AF'(u_i)(u-u_i)$$

则

$$\begin{cases}L(v-u_i-w)+c(x)(v-u_i-w)\\ \qquad =F(u)-F(u_i)-F'(u_i)(u-u_i)\\ B(v-u_i-w)|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

于是

$$\|v-u_i-w\|_C\leqslant M\|F(u)-F(u_i)-F(u_i)(u-u_i)\|_C$$

由此易得

$$\lim_{\|u-u_i\|_C\to 0}\frac{\|v-u_i-w\|_C}{\|u-u_i\|_C}=0$$

即结论成立。

定理 7.5.10 若 $i=1,2$,

$$\begin{cases}Lv+c(x)v-F'(u_i)v=0\quad (x\in\Omega)\\ Bv=0\quad (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

只有零解. 则在 $[\underline{u},\tilde{u}]$ 中，(5.21) 至少有三个解。

证明 令

$$\tilde{f}(x,\zeta)=\begin{cases}f(x,\underline{u}(x))+\underline{u}(x)-\zeta\quad (\zeta\leqslant\underline{u}(x))\\ f(x,\zeta)\quad (\underline{u}(x)\leqslant\zeta\leqslant\tilde{u}(x))\\ f(x,\tilde{u}(x))+\tilde{u}(x)-\zeta\quad (\zeta\geqslant\tilde{u}(x))\end{cases}$$

考察边值问题

$$\begin{cases} Lu + cu = \tilde{f}(x, u) & (x \in \Omega) \\ Bu = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{5.23}$$

设 u 是 (5.23) 的解。令

$$\Omega_1 = \{x | x \in \Omega,\ u(x) < \underline{u}(x)\}$$

$w = u - \underline{u}$，则

$$\begin{cases} Lw + cw > 0 & (x \in \Omega_1) \\ Bw \geqslant 0 & (x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega) \\ w = 0 & (x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega) \end{cases}$$

由极值原理知，$w \geqslant 0 (x \in \Omega_1)$，即 $\Omega_1 = \varnothing$，$w \geqslant \underline{u}(x)$。同理可证 $u(x) \leqslant \tilde{u}(x)$。因此 (5.23) 的解必是 (5.21) 的解。

(5.23) 在 $C(\bar{\Omega})$ 中等价于

$$u = A\tilde{F}(u)$$

其中 $\tilde{F}(u) = \tilde{f}(x, u)$。显然，$A\tilde{F}$ 在 $u = u_i$ 的导算子是 $AF'(u_i)$。它不以 1 为特征值。现只须再证：

(1) $A\tilde{F}$ 是渐近线性的

显然，$\tilde{f}(x, \zeta) + \zeta$ 对 $\zeta \in (-\infty, +\infty)$ 是一致有界的。因此

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\|A\tilde{F}(u) + Au\|}{\|u\|} \leqslant \lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\|A\| \|\tilde{F}(u) + u\|}{\|u\|} = 0$$

即 $A\tilde{F}$ 是渐近线性，$DA\tilde{F}(\infty) = -A$。

(2) 由极值原理知。$-A$ 不以 1 为特征值。证毕。

对这个问题的更进一步的讨论可查阅 [AM]。

7.6 度理论的应用——分叉问题

设 E 是 Banach 空间，我们将在 E 中讨论如下算子方程

$$\Phi(\lambda)u \equiv u - T(\lambda)u = \theta \tag{6.1}$$

的解当参数 λ 变化时的分叉问题。

我们假设可以引进含参数 t 的算子方程

$$\Phi(t,\lambda)u \equiv u - T(t,\lambda)u = \theta \tag{6.2}$$

它满足：

1° $T(1,\lambda) = T(\lambda)$，$\lambda = 0$ 时 (6.1) 只有零解，

2° $T(t,\lambda):[0,1]\times\mathbf{R}\times E \to E$ 是紧算子，

3° $T(0,\lambda)$ 是 E 中的奇算子，

4° $T(t,\lambda)u = \lambda Gu + R(t,\lambda)u$，其中 G 是有界线性算子。对 $t\in[0,1]$，当 λ 属于 $\mathbf{R}^1$ 中任意有界闭区间时一致地有

$$\lim_{u\to\theta}\frac{\|R(t,\lambda)u\|}{\|u\|} = 0$$

由 4° 知，$T(t,\lambda)$ 在 $u=\theta$ 的导算子

$$DT(t,\lambda)|_{u=\theta} = \lambda G$$

在 E 中是紧的。

(6.2) 的非零解集合记为 $N(t,\lambda)$，$N(1,\lambda)$ 又记为 $N(\lambda)$。

7.6.1 局部分叉的一般结论

对任意 $\lambda\in\mathbf{R}^1$，$(\lambda,u)=(\lambda,\theta)$ 总是 (6.1) 的解，称之为零解曲线。

定义 7.6.1 若 $\lambda^*\in\mathbf{R}^1$，$\forall\varepsilon>0$，$\delta>0$，$\exists\lambda\in\mathbf{R}^1$，$|\lambda-\lambda^*|<\varepsilon$。$\exists u\in E$，$0<\|u\|<\delta$，使得 (λ,u) 满足 (6.1) 则称 (λ^*,θ) 是 (6.1)（关于零解曲线）的分叉点，也称 λ^* 为 (6.1) 的分叉值。

(6.1) 的分叉情况与 G 的特征值密切相关。记

$$r(G) = \{\mu\,|\,\mu^{-1}\text{ 是 } G \text{ 的特征值}\}$$

它至多是可数的，没有有限极限点。

先讨论分叉值的必要条件。

引理 7.6.2 设 $[a,b]\cap r(G)=\varnothing$，则 $\exists\delta>0$，当 $t\in[0,1]$，$\lambda\in[a,b]$ 时 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_\delta=\varnothing$。

证明 与定理 7.3.9 中孤立奇点的证明相同。

推论 7.6.3 若 λ^* 是 (6.1) 的分叉值，则

$$\lambda^*\in r(G)$$

现讨论分叉值的充分条件。

定理 7.6.3 若 $1/\lambda^*$ 是 G 的奇重特征值，则 λ^* 是(6.1)的分叉值。

证明 因 $\lambda^* \in r(G)$，所以对任意充分小的正数 ε，$\lambda \in [\lambda^*-\varepsilon, \lambda^*+\varepsilon]$，$\lambda \neq \lambda^*$ 时 $\lambda \bar{\in} r(G)$，还可使 $\lambda^*-\varepsilon$ 与 $\lambda^*+\varepsilon$ 同号，由引理 7.6.2，存在 $\bar{U}_\delta(\theta)$，$\Phi(\lambda^*-\varepsilon)$，$\Phi(\lambda^*+\varepsilon)$ 在 $\bar{U}_\delta(\theta)$ 上只有奇点 $u=\theta$。设 Ω 是 $U_\delta(\theta)$ 内包含 θ 的任一开集，显然当 $u \in \partial\Omega$ 时 $\Phi(\lambda^*-\varepsilon)u \neq \theta$，$\Phi(\lambda^*+\varepsilon)u \neq \theta$。由于 $1/\lambda^*$ 是 G 的奇重特征值，所以 $i(\theta, \Phi(\lambda^*-\varepsilon))$ 与 $i(\theta, \Phi(\lambda^*+\varepsilon))$ 反号，

$$d(\Phi(\lambda^*-\varepsilon), \Omega, \theta) \neq d(\Phi(\lambda^*+\varepsilon), \Omega, \theta) \tag{6.3}$$

于是存在 $\lambda \in (\lambda^*-\varepsilon, \lambda^*+\varepsilon)$，$\Phi(\lambda)$ 在 $\partial\Omega$ 上有零点，否则由同伦不变性必有

$$d(\Phi(\lambda^*-\varepsilon), \Omega, \theta) = d(\phi(\lambda^*+\varepsilon), \Omega, \theta)$$

与 (6.3) 矛盾。因此 λ^* 必是分叉值。证毕。

7.6.2 一个常微分方程的分叉问题

作为 (6.2) 的第一个例子，我们讨论非线性特征值问题

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda f(u) \quad (0 < x < \pi) \\ B_0 u = \alpha_0 u'(0) - \beta_0 u(0) = 0 \\ B_1 u = \alpha_1 u'(\pi) - \beta_1 u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

我们将讨论它的局部分叉与全局分叉问题。

假设

(H_1): $f(0) = 0 \quad (f \in C^1(\mathbf{R}^1))$

$p(x) > 0 \quad (x \in [0, \pi]) \quad (p \in C^1[0, \pi])$

$q(x) \in C[0, \pi] \quad (\lambda \geqslant 0)$

$\alpha_i \geqslant 0,\ \beta_i \geqslant 0,\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0 \quad (i = 1, 2)$

将 (6.4) 改写成

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda[f'(0) - g(u)]u \\ B_0 u = 0, \quad B_1 u = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

其中

$$g(u)=\int_0^1[f'(0)-f'(\xi)|_{\xi=\tau u}]d\tau$$

我们又假定

(H_2) $f'(0)>0$，存在 $\rho>0$，当 $0<|u|<\rho$ 时 $f'(0)>f'(u)$。

由 (H_1)，(H_2) 可得

$g(u)\in C(R^1)$，$g(0)=0$，当 $0<|u|<\rho$ 时 $g(u)>0$

(6.4)的线性化问题是

$$\begin{cases}-(p(x)u')'+q(x)u=\lambda f'(0)u\\ B_0u=0,\quad B_1(u)=0\end{cases}\tag{6.6}$$

它有一串简单特征值

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,\ \lambda_n\to+\infty$$

λ_n 对应的特征函数 $u_n(x)\in S_n$，而 S_n 可分解成

$S_n=S_n^+\cup S_n^-$

$S_n^+=\{u(x)\,|\,u\in C^1[0,\pi],\ B_iu=0\quad(i=0,1)$

u 在 $(0,\pi)$ 恰有 $n-1$ 个零点，u 在 $[0,\pi]$ 的一切零点都是简单的，$\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sign}u(x)=1\}$，

$S_n^-=\{u(x)\,|\,-u\in S_n^+\}$

S_n 是开集，$S_i\cap S_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，证明可参见 [LQ，p248，引理7.4.1]。

不妨设 $\lambda_1>0$，当 $\lambda=0$ 时(6.6)的 Green 函数为 $G_0(x,\xi)$，于是 (6.5) 可化为等价的积分方程

$$u(x)=\lambda\int_0^\pi G_0(x,\xi)[f'(0)-g(u(\xi))]u(\xi)d\xi$$

或写为

$$u=\lambda G_0[f'(0)-g(u)]u$$

其中 G_0 是 Green 函数定义的积分算子：

$$G_0u=\int_0^\pi G_0(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

取 $E=\{u\,|\,u\in C^1[0,\pi],\ B_0u=0,\ B_1u=0\}$。引进辅助问题

$$\Phi(t,\lambda)u \equiv u - T(t,\lambda)u = \theta \tag{6.7}$$

其中

$$T(t,\lambda) = \lambda G_0[f'(0) - g(t,u)]u$$
$$g(t,u) = tg(u) + (1-t)g(|u|)$$

显然，$g(1,u) = g(u)$，$T(0,\lambda)$ 是奇算子．当 $t\in[0,1]$ 时 $g(t,u)$ 与 $g(u)$ 有相同的性质．

现在通过 (6.7) 讨论分叉问题 (6.5)．与 (6.7) 等价的问题是

$$\begin{cases}-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda[f'(0) - g(t,u)]u \\ B_1u = 0, \quad B_2u = 0\end{cases} \tag{6.8}$$

我们分以下几步：

(一) 导算子与零奇点指数．

读者可自己证明：

引理 7.6.4 $T(t,\lambda):[0,1]\times \mathbf{R}^1_+\times E\to E$ 是紧算子，且

$$T(t,\lambda)u = \lambda G_0 f'(0)u + o(\|u\|) \quad (u\to\theta)$$

对 $t\in[0,1]$，$\lambda\in[a,b]$ 一致成立，$[a,b]$ 是 $\mathbf{R}^1_+$ 中 ∀ 有界区间．

定理 7.6.5 取 $\delta>0$，$\lambda_{k-1}<\lambda_k-\delta<\lambda_k+\delta<\lambda_{k+1}$，其中 $\lambda_0=0$，则当 $t\in[0,1]$ 时

$$i(\theta,\Phi(t,\lambda)) = \begin{cases}(-1)^{k-1} & (\lambda\in[\lambda_k-\delta,\lambda_k)) \\ (-1)^k & (\lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\delta])\end{cases}$$

证明　$\Phi(t,\lambda) = I - T(t,\lambda)$ 以 $u=\theta$ 为奇点，$T(t,\lambda)$ 在 $u=\theta$ 的导算子为 $\lambda G_0 f'(0)$，不以 1 为特征值，$u=\theta$ 是孤立奇点．

当 $\lambda\in[\lambda_k-\delta,\lambda_k)$ 时，$\lambda G_0 f'(0)$ 大于 1 的特征值仅为

$$\frac{\lambda}{\lambda_1},\ \frac{\lambda}{\lambda_2},\cdots,\ \frac{\lambda}{\lambda_{k-1}}$$

重数和为 $k-1$，故

$$i(\theta,\Phi(t,\lambda)) = (-1)^{k-1}$$

同理可证另一等式．

(二) 非零解集合的若干性质．

引理 7.6.6 (6.8) 的非零解集合 $N(t,\lambda)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$

证明 设 $u\in N(t,\lambda)$. 则 u 是线性问题

$$\begin{cases}-(p(x)v')'+[q(x)+\tilde{q}(x)]v=\mu f'(0)v\\ B_0v=0,\quad B_1v=0\end{cases}$$

的特征函数,其中 $\tilde{q}(x)=\lambda g(t,u(x))$, 相应的特征值为 λ. 因此, $u\in\bigcup_{n=0}^{\infty}S_n$. 证毕.

引理 7.6.7 设 $[a,b]\subset\mathbf{R}^1_+$, 仅包含某个 λ_k. 则 $\exists d_k>0$, 使得

$$N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{d_k}\subset S_k(t\in[0,1],\lambda\in[a,b])$$

证明 先证存在常数 $\alpha>0$, 对 $\forall\lambda\in[a,b]$, $u\in S_j(j\neq k)$, 有

$$\|u-\lambda G_0f'(0)u\|\geqslant\alpha\|u\|$$

若不然, $\exists\lambda^{(n)}\in[a,b]$, $u_n\in S_{j_n}(j_n\neq k)$, 使得

$$\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}-\lambda^{(n)}G_0f'(0)\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|\to 0$$

由于 G 的紧性,不妨设 $\lambda^{(n)}\to\lambda^*$, $\lambda^{(n)}G_0f'(0)\dfrac{u_n}{\|u_n\|}\to v$. 于是

$$\frac{u_n}{\|u_n\|}\to v,\ \|v\|=1,\ v-\lambda^*Gv=\theta$$

因此, $1/\lambda^*$ 是 G 的特征值, $\lambda^*\in[a,b]$, 只能有 $\lambda^*=\lambda_k$, $v\in S_k$. 注意 $\dfrac{u_n}{\|u_n\|}\in S_{j_n}(j_n\neq k)$, 与集合 S_i 的性质矛盾.

由于 $T(t,\lambda)u=\lambda G_0f'(0)u+o(\|u\|)\ (u\to\theta)$, 对 $t\in[0,1]$, $\lambda\in[a,b]$ 一致成立,则存在 $d_k>0$, 当 $t\in[0,1]$, $\lambda\in[a,b]$, $u\in\bigcup_{j\neq k}^{\infty}S_j$, $u\in\overline{U}_{d_k}$ 时

$$\|u-T(t,\lambda)u\|\geqslant\frac{\alpha}{2}\|u\|$$

又由于 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j$，所以 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\lambda_k}\subset S_k$. 证毕.

引理 7.6.8 设 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1_+$，它不包含某个 λ_k，则 $\exists l_k>0$，使得

$$N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{l_k}\cap S_k=\varnothing(t\in[0,1],\lambda\in[a,b])$$

证明 只须证明 $\exists\alpha>0$，对 $\forall\lambda\in[a,b]$，$u\in S_k$ 有

$$\|u-\lambda G_0f'(0)u\|\geqslant\alpha\|u\|$$

若不然，同引理 7.6.7 可证：$\exists w_n\in S_k$，$w_n\to v$，$\|v\|=1$，$\exists\lambda^*\in[a,b]$，并有 $v-\lambda^*G_0f'(0)v=0$，于是只能有 $\lambda^*=\lambda_j$，$v\in S_j$，$j\neq k$. 这与 $S_k\cap S_j=\varnothing$ 及 S_j 是开集矛盾. 证毕.

引理 7.6.9 当 $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_k$ 时

$$N(t,\lambda)\cap S_k\cap\overline{U}_\rho=\varnothing$$

其中 ρ 是条件 (H_2) 中的正常数.

证明 若 $u\in N(t,\lambda)\cap S_k\cap\overline{U}_\rho$，则线性问题

$$\begin{cases}(p(x)v')'+\tilde{q}(x)v=\mu f'(0)v\\ B_0v=0,\quad B_1v=0\end{cases}$$

的第 k 个特征值 $\mu_k=\lambda$，其中 $\tilde{q}(x)=q(x)+\lambda g(t,u(x))$. 显然，$\lambda\neq0$. 于是，由 (H_2) 知：$\tilde{q}(x)\geqslant q(x)$，$\tilde{q}(x)\not\equiv q(x)$，所以 $\lambda=\mu_k>\lambda_k$. 这就证明了引理的结论.

综合上述引理容易得到

定理 7.6.10 $\exists\delta_k>0$ 及 $\varepsilon_k>0$，使得

$$\lambda_{k-1}<\lambda_k-\delta_k<\lambda_k+\delta_k<\lambda_{k+1}\quad(\lambda_0=0)$$

且对 $\forall t\in[0,1]$，有

1° 当 $\lambda\in[\lambda_k-\delta_k,\lambda_k]$ 时 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$，

2° 当 $\lambda\in[\lambda_k,\lambda_k+\delta_k]$ 时 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}\subset S_k$，

3° 当 $\lambda\in[\lambda_k-\delta_k,\lambda_k+\delta_k]$ 时 $N(t,\lambda)\cap\partial U_{\varepsilon_k}=\varnothing$.

证明 取 $\bar{\delta}>0$ 使得

$$\lambda_{k-1}<\lambda_k-\bar{\delta}<\lambda_k+\bar{\delta}<\lambda_{k+1}$$

由引理 7.6.7 与引理 7.6.9 知，$\exists\varepsilon_k>0$，当 $\lambda\in[\lambda_k-\bar{\delta},\lambda_k]$ 时 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$. 当 $\lambda\in[\lambda_k,\lambda_k+\bar{\delta}]$ 时 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}\subset S_k$.

因为 $N(t,\lambda_k)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$，所以存在 δ_k，$0<\delta_k\leqslant\bar{\delta}$，当 $|\lambda-\lambda_k|\leqslant\delta_k$ 时 $N(t,\lambda)\cap\partial U_{\varepsilon_k}=\varnothing$. 若不然，则存在 $t_n\in[0,1]$ 及 $\lambda^{(n)}\to\lambda_k$，$u_n\in\partial U_{\varepsilon_k}$，使得

$$u_n-T(t_n,\lambda^{(n)})u_n=\theta$$

由紧性，不妨设 $t_n\to t^*$，$T(t_n,\lambda^{(n)})u_n\to v$，于是 $u_n\to v$，$v\in\partial U_{\varepsilon_k}$ 且

$$v-T(t^*,\lambda_k)v=\theta$$

这就产生矛盾. 证毕.

（三）局部分叉.

现在我们可以得到关于局部分叉的结论.

定理 7.6.11 设 (H_1)，(H_2) 成立，若 $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\delta_k)$，则存在 μ_k，$0<\mu_k<\varepsilon_k$，当 $t\in[0,1]$ 时

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k^\pm,\theta)=(-1)^{k-1}$$

其中 δ_k，ε_k 由定理 7.6.10 给出，

$$D_k^\pm=(U_{\varepsilon_k}-U_{\mu_k})\cap S_k^\pm$$

于是 (6.4) 在 D_k^+ 与 D_k^- 分别存在特征向量.

证明 $\exists\eta>0$，使得 $\lambda_k+\eta\leqslant\lambda\leqslant\lambda_k+\delta_k$，由引理 7.6.2，$\exists d_k>0$，当 $t\in[0,1]$，$s\in[\lambda_k+\eta,\lambda_k+\delta_k]$ 时

$$N(t,s)\cap\overline{U}_{d_k}=\varnothing$$

令 $\mu_k=\dfrac{1}{2}\min(\varepsilon_k,d_k)$，则

$$N(t,s)\cap\overline{U}_{\mu_k}=\varnothing$$

将 U_{ε_k} 分解为

$$U_{\varepsilon_k}=D_k\cup G_k\cup\overline{U}_{\mu_k}$$

其中

$$D_k=(U_{\varepsilon_k}-\overline{U}_{\mu_k})\cap S_k$$

$$G_k=(U_{\varepsilon_k}-\overline{U}_{\mu_k})\backslash S_k$$

（图 7-6.1）. 于是

$$d(\Phi(t,\lambda),U_{\varepsilon_k},\theta)=d(\Phi(t,\lambda),D_k,\theta)+d(\Phi(t,\lambda),G_k,\theta)+d(\Phi(t,\lambda),U_{\mu_k},\theta)\quad(6.9)$$

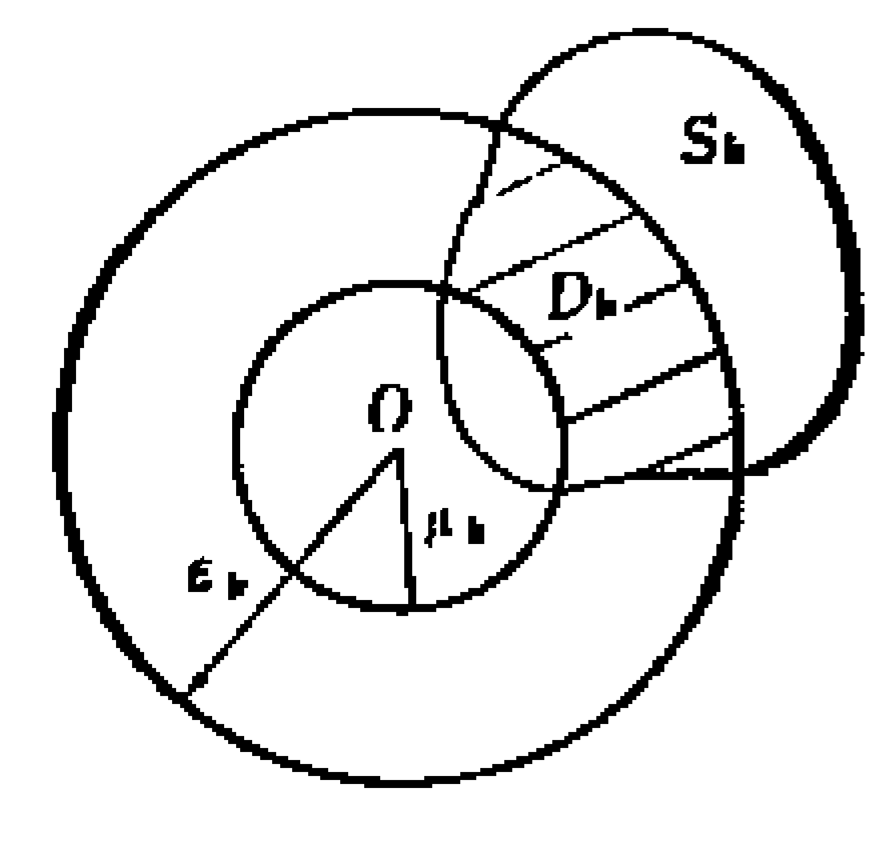


图 7-6.1

由定理 7.6.10 及定理 7.6.5，根据同伦不变性得

$$d(\Phi(t,\lambda),U_{\varepsilon_k},\theta)=d(\Phi(t,\lambda_k-\delta_k),U_{\varepsilon_k},\theta)$$
$$=i(\theta,\Phi(t,\lambda_k-\delta_k))=(-1)^{k-1}$$
$$d(\Phi(t,\lambda),U_{\mu_k},\theta)=d(\Phi(t,\lambda_k+\delta_k),U_{\mu_k},\theta)$$
$$=i(\theta,\Phi(t,\lambda_k+\delta_k))=(-1)^k$$
$$d(\Phi(t,\lambda),G_k,\theta)=0$$

将它们代入 (6.9) 式得

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k,\theta)=2(-1)^{k-1}$$

又

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k,\theta)=d(\Phi(t,\lambda),D_k^+,\theta)$$
$$+d(\Phi(t,\lambda),D_k^-,\theta)$$

D_k^+ 与 D_k^- 与 t 无关，关于原点对称，$\Phi(0,\lambda)$ 是奇算子，所以

$$d(\Phi(0,\lambda),D_k^+,\theta)=d(\Phi(0,\lambda),D_k^-,\theta)=(-1)^{k-1}$$

最后再由同伦不变性得

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k^\pm,\theta)=(-1)^{k-1}$$

证毕.

（四）全局分叉.

为讨论全局分叉，需要对解作先验估计.

(H_3) 存在正数 $M=M(\lambda)$，若 $u\in N(s)$，$s\in[0,\lambda]$，则

$$\|u\|<M$$

现在我们要在某区域 $(U_M\backslash U_{\tau_k})\cap S_k^\pm$ 上应用度理论，其中 $\tau_k=\tau_k(\lambda)$，U_{τ_k} 是某个球域.

除 $D_k^\pm$ 外，又记

$$A_{M,k}^\pm = (U_M \backslash \bar{U}_{\varepsilon_k}) \cap S_k^\pm$$
$$G_{M,k}^\pm = (U_M \backslash U_{\tau_k}) \cap S_k^\pm$$

当 $\tau_k = \mu_k$ 时

$$G_{M,k}^\pm = A_{M,k}^\pm \cup D_k^\pm \tag{6.10}$$

定理 7.6.12 设 (H_1)，(H_2)，(H_3) 成立，则当 $\lambda > \lambda_k$ 时 $\exists \tau_k = \tau_k(\lambda)$，$0 < \tau_k(\lambda) < M$，使得

$$d(\Phi(\lambda), G_{M,k}^\pm, \theta) = (-1)^{k-1}$$

于是 (6.4) 在 $G_{M,k}^+$ 与 $G_{M,k}^-$ 存在特征函数。

证明　当 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_k]$ 时取 $\tau_k(\lambda) = \mu_k$ 得 (6.10) (图 7-6.2)。于是

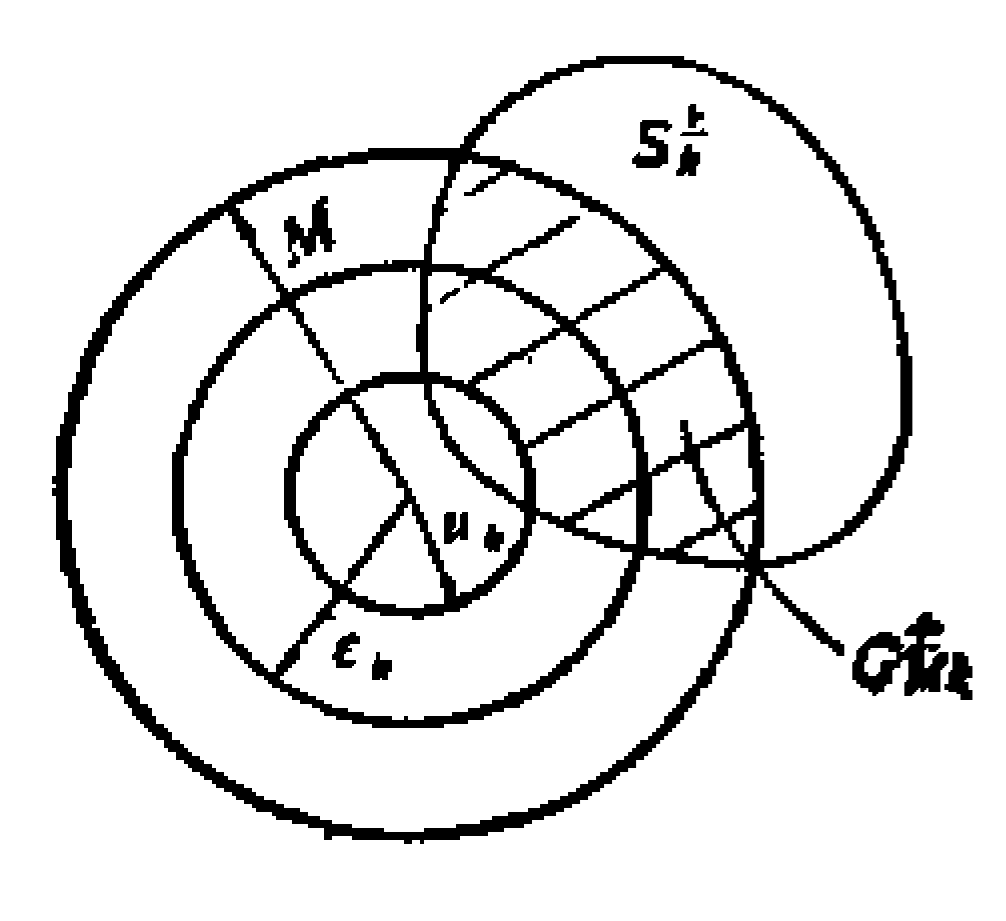


图 7-6.2

$$\begin{aligned} d(\Phi(\lambda), G_{M,k}^\pm, \theta) &= d(\Phi(\lambda), A_{M,k}^\pm, \theta) + d(\Phi)(\lambda), D_k^\pm, \theta) \\ &= d(\Phi(\lambda), A_{M,k}^\pm, \theta) + (-1)^{k-1} \end{aligned}$$

由 $A_{M,k}^\pm$ 的定义及 U_M，U_{ε_k}，$S_k^\pm$ 的性质知，$\Phi(s)$ 在 $\partial A_{M,k}^\pm$ 上不为零，其中 $s \in [0, \lambda_k + \delta_k]$。而 $\Phi(0)$ 在 $A_{M,k}^\pm$ 上无零点，所以

$$d(\Phi(\lambda), A_{M,k}^\pm, \theta) = d(\Phi(0), A_{M,k}^\pm, \theta) = 0$$

因此

$$d(\Phi(\lambda), G_{M,k}^\pm, \theta) = (-1)^{k-1}$$

若 $\lambda > \lambda_k + \delta_k$，令

$$\tau_k(\lambda) = \frac{1}{2} \min (M, \mu_k, l_k)$$

其中 l_k 由引理 7.6.8 给出，使得当 $s\in[\lambda_k+\delta_k,\lambda]$ 时

$$N(s)\cap\overline{U}_{l_k}\cap s_k=\emptyset$$

当 $s\in[\lambda_k+\delta_k,\lambda]$ 时，$\Phi(s)$ 在 $\partial G^{\pm}_{\bar{M},k}$ 上无零点，由同伦不变性得

$$\begin{aligned}d(\Phi(\lambda),G^{\pm}_{\bar{M},k},\theta)&=d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),G^{\pm}_{\bar{M},k},\theta)\\&=d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),A^{\pm}_{M,k},\theta)+d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),D^{\pm}_k,\theta)\\&\quad+d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),(U_{\mu_k}-U_{r_k})\cap S^{\pm}_k,\theta)\\&=0+(-1)^{k-1}+0=(-1)^{k-1}\end{aligned}$$

证毕。

为使 (H_3) 成立，我们假设

(H_3') $\limsup\limits_{|u|\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}\leqslant0,\quad q(x)\geqslant0\quad(x\in[0,\pi])$

$$\beta_0+\beta_2\neq0$$

设 u 满足 (6.4). 令 $u=e^{-\alpha(x+1)^n}v$，则方程变为

$$-pv''+r(x)v'+q(x)v=\lambda\left[\frac{f(e^{-\alpha(x+1)^n}v)}{e^{-\alpha(x+1)^n}v}-\frac{a(x)}{\lambda}\right]v\tag{6.11}$$

其中

$$r(x)=2\alpha n(x+1)^{n-1}p-p'$$

$$a(x)=\alpha n(n-1)(x+1)^{n-2}\left[p(x)+\frac{p'(x)(x+1)}{n-1}\right]-\alpha^2n^2(x+1)^{2n-2}p(x)$$

边条件变为

$$\alpha_0v'(0)-\beta_0'v(0)=0$$
$$\alpha_1v'(\pi)+\beta_1'v(\pi)=0$$

其中

$$\beta_0'=\alpha n\alpha_0+\beta_0>0$$
$$\beta_1'=-\alpha n\alpha_1(\pi+1)^{n-1}+\beta_1$$

设 $\beta_1>0$. 可取 n 充分大再取 $\alpha>0$ 充分小，使得

$$a(x) \geqslant a_0 > 0 \quad (x \in [0, \pi])$$
$$\beta_1' > 0$$

对任意给定正数b，当 $0 < \lambda \leqslant b$ 时 $\dfrac{a(x)}{\lambda} \geqslant \dfrac{a_0}{b}$，存在正数 M_0（与 λ 无关），当 $|v| > M_0$ 时

$$\bar{f}(x) = \frac{f(e^{-\alpha(x+1)^n} v)}{e^{-\alpha(x+1)^n} v} < \frac{1}{2}\frac{a_0}{b}$$

于是

$$\bar{f}(x) - \frac{a(x)}{\lambda} < -\frac{1}{2}\frac{a_0}{b} < 0$$

现在若 v 的正最大值在$(0,\pi)$中某点x_0处达到，则 $v(x_0) \leqslant M_0$。若不然，在该点处

$$[-pv'' + r(x)v' + q(x)v]_{x=x_0} \geqslant 0$$

而 $\lambda\bar{f}(x_0)v(x_0) < 0$，与 (6.11) 矛盾。

同理可证：若 v 的负最小值在 $(0, \pi)$ 中某点 x_1 处达到，则 $v(x_1) \geqslant -M_0$。因此，

$$|v(x)| \leqslant M_0$$

即

$$|u(x)| \leqslant M_0 \quad (x \in [0, \pi]) \tag{6.12}$$

若 $\beta_0 > 0$，令 $t = \pi - x$，则化为前一种情形。

由 (6.12) 及方程 (6.4)，易得存在常数 $M_1 > 0$

$$|u'(x)| < M_1 \quad (x \in [0, \pi])$$

这样，我们由定理 7.6.12 可得

定理 7.6.13 设条件 (H_1)，(H_2)，($\hat{\mathrm{H}}_3'$) 成立，则当 $\lambda > \lambda_k$ ($k = 1, 2, \cdots$) 时在每个 $S_1^+, \cdots, S_k^+, S_1^-, \cdots, S_k^-$ 内，(6.4)至少存在一个特征函数。

7.6.3 一个偏微分方程的分叉问题

作为 (6.2) 的第二个例子，我们讨论非线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u - f(x, u, \lambda)u & (x \in \Omega) \\ u = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{6.13}$$

总的假定是:

(H) 1° $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开区域.

2° $q(x)\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, $q(x)\geqslant 0$ $(x\in\bar{\Omega})$.

3° $f(x,0,\lambda)=0$ $(x\in\bar{\Omega},\ \lambda\in[0,+\infty))$.

4° $f\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}^1\times[0,+\infty))$, 对 x 是 Hölder 连续,对 u 是局部 Lipschitz 的.

5° 存在 $\rho>0$,当 $x\in\bar{\Omega}$, $0<|u|<\rho$, $\lambda\in(0,+\infty)$ 时 $f(x,u,\lambda)>0$.

6° 当 $\lambda=0$ 时 (6.5) 只有零解.

与 (6.13) 相应的辅助问题是

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=\lambda u-F(t,\lambda,u)u\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{6.14}$$

其中

$$F(t,\lambda,u)=tf(x,u,\lambda)+(1-t)f(x,|u|,\lambda)$$

显然,对于 $t\in[0,1]$, F 与 f 有相同的性质

对任意 $u\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 由

$$\begin{cases}-\Delta v+q(x)v=u\quad(x\in\Omega)\\ v|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

确定一个算子

$$v=Gu$$

G 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 上是线性紧算子. 因此,(6.14) 等价于算子方程

$$\Phi(t,\lambda)\equiv u-\lambda Gu+GF(t,\lambda,u)u=\theta\tag{6.15}$$

令

$$T(t,\lambda)u=\lambda Gu-GF(t,\lambda,u)u$$

$\|\cdot\|$表示 $C^1(\bar{\Omega})$ 中的模. $T(0,\lambda)$ 是奇算子.

引理 7.6.14 $T(t,\lambda)$ 在 $u=\theta$ 的导算子

$$DT(t,\lambda)|_{u=\theta}=\lambda G$$

并且

$$\|T(t,\lambda)u-\lambda Gu\|=o(\|u\|)\quad(u\to\theta)$$

关于 $t\in[0,1]$ 和 $\lambda\in[a,b]$ 一致, $[a,b]$ 为 $[0,+\infty)$ 中任意有

界闭区间。

证明　令 $W = T(t, \lambda)u - \lambda Gu = -GF(t, \lambda, u)u$，则

$$\begin{cases}-\Delta W + q(x)W = -F(t, \lambda, u)u \\ W|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

以 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L_p(\Omega)$ 中的模，$\|\cdot\|_{2,p}$ 表示 $W_p^2(\Omega)$ 中的模．由嵌入定理及 L_p 估计得

$$\|W\| \leqslant C_1\|W\|_{2,p} \leqslant C_2\|F(t, \lambda, u)u\|_p$$
$$\leqslant C_3[\|f(\lambda, u, \lambda)\|_p + \|f(x, |u|, \lambda)\|_p]\|u\|$$

由此得

$$\|W\| = \|T(t, \lambda)u - T(t, \lambda)\theta - \lambda Gu\| = o(\|u\|)$$
$$(u \to \theta)$$

且关于 $t \in [0, 1]$，$\lambda \in [a, b]$ 一致。证毕。

G 的特征值问题

$$Gu = \frac{1}{\lambda}u$$

即

$$\begin{cases}-\Delta u + q(x)u = \lambda u \quad (x \in \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

它存在一串特征值

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$$

λ_1 是一重的．对应的特征函数属于 S_1，

$$S_1 = S_1^+ \cup S_1^-$$

其中

$$S_1^+ = \Big\{u \,|\, u \in C^1(\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$u(x) > 0\ (x \in \Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} < 0,$$
$$n\ 为\ \partial\Omega\ 的外法向\Big\}$$

$$S_1^- = \{u \,|\, -u \in S_1^+\}$$

它们是 $E = \{u \,|\, u \in C^1(\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ 中的开集．$\lambda_k\ (k \geqslant 2)$ 对

应的特征函数属于 $\tilde{S}$.

$$\tilde{S} = \{u \mid u \in C^1(\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u \text{ 在 } \Omega \text{ 内变号}\}$$

$\bar{S}_1 \cap \tilde{S} = \varnothing$.

引理 7.6.15 (6.14)的非零解集合 $N(t, \lambda) \subset S_1 \cup \tilde{S}$. 其中 $t \in [0, 1]$, $\lambda \in (0, +\infty)$.

证明与引理 7.6.6 相同.

对于 $k = 1$, 前面的定理 7.6.5, 引理 7.6.7—7.6.9, 定理 7.6.10, 定理 7.6.11 等对于 (6.14) (即 (6.15)) 仍然成立, 证明是类似的.

与定理 7.6.12 类似, 我们可以证明

定理 7.6.16 设 $(\widehat{\mathrm{H}})$ 成立. 又设 b 是 $\forall$ 正数, 存在常数 $M(b) > 0$, 当 $\lambda \in [0, b]$, (λ, u) 是(6.14)的解时, 有 $\|u\| < M(b)$. 则 $\lambda > \lambda_1$ 时 (6.14) 至少存在一个正解和一个负解.

推论 7.6.17 设 $(\widehat{\mathrm{H}})$ 成立, 又设 b 是 $\forall$ 正数, 存在奇数 $k > 1$, 正数 α 与 R, 使得 $\lambda \in [0, b]$, $x \in \Omega$, $|u| \geqslant R$ 时

$$\frac{f(x, u, \lambda)}{u^{k-1}} \geqslant \alpha$$

则当 $\lambda > \lambda_1$ 时 (6.13) 至少存在一个正解和一个负解.

证明 设 $u(x)$ 是(6.13)的解. 在 Ω 内某点 $\bar{x}$ 取正最大值 M_0. 则

$$q(\bar{x}) M_0 \leqslant \lambda M_0 - \frac{f(\bar{x}, M_0, \lambda)}{M_0^{k-1}} M_0^k$$

若 $M_0 > R$, 则

$$q(\bar{x}) M_0 \leqslant \lambda M_0 - \alpha M_0^k$$

$$M_0^{k-1} \leqslant \frac{1}{\alpha}(b + Q_0),\ Q_0 = \max_{\bar{\Omega}} q(x)$$

即

$$M_0 \leqslant \left[\frac{1}{\alpha}(b + Q_0)\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{6.16}$$

同理, 若 $u(x)$ 在 Ω 内某点取负最小值 $-M_0$, 也可得 (6.16). 因此

$$|u(x)| \leqslant R + \left[\frac{1}{\alpha}(b + Q_1)\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$(x \in \bar{D},\ \lambda \in [0, b])$$

再由嵌入定理，Schauder 估计及 L_p 估计可得，存在常数 $M > 0$，使得 $\|u\| < M$，因此得结论.

7.6.4 全局分叉的一般结论

现在，在 Banach 空间 E 中对一般的算子方程

$$\Phi(u) \equiv u - T(\lambda)u = 0 \tag{6.17}$$

引述关于全局分叉的重要结果，它的证明可见 [Ra, 2].

假定

1° $T(\lambda): \mathbb{R}^1 \times E \to E$ 是紧算子，

2° $T(\lambda)u = \lambda Gu + R(\lambda)u$，其中 G 是 E 上的有界线性算子，

$$\lim_{u \to \theta} \frac{\|R(\lambda)u\|}{\|u\|} = 0$$

对 $\forall$ 有界闭区间上的 λ 一致成立.

由 2° 知，G 是紧算子，$DT(\lambda)|_{u=\theta} = \lambda G$.

在下面的定理中，(6.17)的非零解是指 (λ, u)，它满足(6.17)，$u \neq \theta$.

定理 7.6.18 以 $\mathscr{S}$ 记为 (6.17) 的非零解集合的闭包，在总的假定下，若 $1/\lambda^*$ 是 G 的奇重特征值，则 $\mathscr{S}$ 包含一个过 (λ^*, θ) 的最大子连续统 C_λ 并且

1° C_λ 在 $\mathbb{R}^1 \times E$ 中无界，

或者

2° C_λ 交 $u = \theta$ 于 $(\hat{\lambda}, \theta)$，而 $1/\hat{\lambda}$ 是 G 的另一特征值.

定理 7.6.19 在总的假定下，若 $1/\lambda^*$ 是 G 的单重特征值，则 $\mathscr{S}$ 包含过 (λ^*, θ) 的一对最大子连续统 C_λ^1, C_λ^2，或者在 $\mathbb{R} \times E$ 中无界，或且交于 $(\hat{\lambda}, \theta)$，$1/\hat{\lambda}$ 是 G 的另一特征值.

在 [Ra, 2] 中给出这些定理的若干应用，如果我们利用它们，会更简单地得到 §7.6.2 中的全局分叉.

7.7 评　　注

度理论的重要应用是讨论椭圆型边值问题的解或正解的存在性。例如,边值问题.

$$\begin{cases}-\Delta u = f(u) & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega)\end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性，其中 f 在$[0, +\infty)$局部 Lipschitz, $f(0) \geqslant 0$。利用度理论的基本步骤是:

(1) 引进辅助问题。

令

$$\hat{f}(u) = \begin{cases}f(u) & (u \geqslant 0) \\ f(0) & (u < 0)\end{cases}$$

则 $\hat{f}(u)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 局部 Lipschitz。利用极值原理易证: $u(x) \not\equiv 0$ 是辅助问题

$$\begin{cases}-\Delta u = \hat{f}(u) & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega)\end{cases} \tag{2}$$

的解 $\Longleftrightarrow$ $u(x)$ 是(1)的正解 ($u(x) > 0 (x \in \Omega)$)。因此,讨论(1)的正解时,我们就认为 $f(u) = f(0)$ $(u < 0)$。

(2) 将边值问题化为等价的含紧算子的方程。

在 $C(\bar{\Omega})$ 或 $C^1(\bar{\Omega})$ 中,由

$$\begin{cases}-\Delta v = u & (x \in \Omega) \\ v = 0 & (x \in \partial\Omega)\end{cases}$$

确定一个紧线性算子 $v = G(u)$, 令 $T(u) = Gf(u)$, 则 (1) 等价于

$$u - T(u) = \theta \tag{3}$$

其中 T 是紧算子。

(3) 利用计算度的有关方法来计算度。

我们常常是计算 $d(\Phi, U_R(\theta), \theta)$, 其中 $\Phi = I - T$, $U_R(\theta)$ 是基本空间 E ($C(\bar{\Omega})$ 或 $C^1(\bar{\Omega})$) 中以原点 θ 为心、R 为半径的开

球。首先必须保证当 $u\in\partial U_R(\theta)$ 时 $\Phi u\neq\theta$，为此常要对(3)的解作先验估计。计算 $d(\Phi, U_R(\theta), \theta)$ 常用的方法是，引进同伦变换 $\Phi_t = I - T_t$，$T_t:[0, 1]\times U_R(\theta)\to E$ 是紧算子并满足

1° $\Phi_0 = \Phi$，

2° $d(\Phi_1, U_R(\theta), \theta)\neq 0$，

3° 当 $t\in[0, 1]$，$u\in\partial B_R(\theta)$ 时 $\Phi_t u\neq\theta$。

为保证 3°，也常要对 $\Phi_t u = \theta$ 的解作先验估计。因此，在度理论的应用中，解的先验估计是十分重要的。

若 (3) 有平凡解(零解)，只计算 $d(\Phi, U_R(\theta), \theta)$ 是不够的，还须计算 $d(\Phi, U_r(\theta), \theta)$，其中 $0<r<R$。若

$$d(\Phi, U_R(\theta), \theta)\neq d(\theta, U_r(\theta), \theta)$$

则在 $U_r^R = U_R(\theta)\backslash U_r(\theta)$ 中 (3) 至少存在一个解(非零解)。若

$$d(\Phi, U_R(\theta), \theta) = d(\Phi, U_r(\theta), \theta)$$

又有 $\bar{V}\subset U_r^R$ 是 E 中的有界闭凸集，$V = \operatorname{int}\bar{V}$，$T(\bar{V})\subset V$，则在 V 与 U_r^R 中 (3) 至少各存在一个解(非零解)，利用严格上、下解可以构造上述有界闭凸集，这使得我们能用度理论与上、下解相结合的方法来证明(1)的多正解的存在性。在 [Ra, 1]，[Lio] 与 [FLi] 中，就是利用上述方法讨论了 (1) 的正解的存在性。

问题 (1) 的正解的存在性强烈地依赖于函数 $f:[0, +\infty)\to\mathbf{R}^1$ 在零点与无穷远点的行为。记 λ_1 是

$$\begin{cases}-\Delta u = \lambda u & (x\in\Omega)\\ u = 0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

的最小特征值，不少文章(如 [Lio]，[FLi]) 考虑了以下情形：

1° 次线性问题，即

$$\lim_{s\to 0+}\inf\frac{f(s)}{s} > \lambda_1$$

$$\lim_{s\to +\infty}\sup\frac{f(s)}{s} < \lambda_1$$

2° 超线性问题

$$\lim_{s\to 0+}\sup\frac{f(s)}{s} < \lambda_1$$

$$\lim_{s\to+\infty}\inf \frac{f(s)}{s} > \lambda_1$$

3° 在零点是次线性，在无穷远是超线性的，

$$\lim_{s\to 0+}\inf \frac{f(s)}{s} > \lambda_1$$

$$\lim_{s\to+\infty}\sup \frac{f(s)}{s} > \lambda_1$$

对于情形 1°，可利用上、下解方法来讨论，对于情形 2° 和 3°，可利用度理论与变分法并结合上、下解方法来讨论，其中关键性问题是正解的先验估计，关于正解先验估计的讨论可见 [FLN].

辅助问题 (2) 中的右端函数 $\hat{f}$ 不一定具有光滑性，若要求光滑性则要直接考虑问题 (1)，这时常用锥映射的度理论来讨论它。记 K 是 Banach 空间 E 中的闭锥，映射 $T:K\to K$ 就是锥映射。关于锥映射的度理论可参见 [Che]. 它的应用可见[FLN]，[Dan，1，2].

若取基本空间 $H=\mathring{W}_2^1(\Omega)$，内积

$$(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx$$

相应的模

$$\|u\|_H=\sqrt{(u,u)}$$

在 H 中定义泛函

$$\Psi(\lambda,u)=\Psi_0(u)-\lambda J(u)$$

其中

$$\Psi_0(u)=\frac{1}{2}(u,u)$$

$$J(u)=\int_\Omega F(u(x))dx$$

$$F(u)=\int_0^u f(s)ds$$

在一定条件下，例如

$$f\in C(\mathrm{R}^1),\ |f(u)|\leqslant M\quad (u\in\mathrm{R}^1)$$

则

1° $u(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda f(u) & (x\in\Omega)\\ u=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}\tag{4}$$

的古典解 $\Longleftrightarrow u(x)$ 是 $\Psi(\lambda,\cdot)$ 的临界点，即

$$\Psi'(\lambda,u(x))v(x)=0\quad(\forall v\in H)$$

这里 Ψ 的导算子

$$\Psi'(\lambda,u)v=(u,v)-\lambda\int_\Omega f(u(x))v(x)dx$$

2° $\Psi(\lambda,\cdot)$ 在 H 上存在最小值，最小值点即是 $\Psi(\lambda,\cdot)$ 的临界点，从而也是边值问题 (4) 的古典解.

求边值问题(4)的解即求 $\Psi(\lambda,\cdot)$ 的临界点，而

$$\Psi(\lambda,u)=I(u)-\lambda G(u)$$

其中

$$I(u)v=(u,v)$$

$$G(u)v=\int_\Omega f(u(x))v(x)dx$$

$I(\cdot)$: $H\to H^*=H$ 是恒同算子

$G(\cdot)$: $H\to H^*=H$ 是紧算子

问题变成了求解方程

$$\Psi'(\lambda,u)=I(u)-\lambda G(u)=0$$

Banach 空间中含紧算子的度理论提供了解决此问题的一种方法.

假设 f 满足:

(f_1) $f\in C^1[0,+\infty)$, $f(0)>0$.

(f_2) $\exists 0<a_1<a_2<\cdots<a_m$, $f(a_k)=0$

$$(k=1,2,\cdots,m).$$

(f_3) $\max\{F(u)\,|\,0\leqslant u\leqslant a_{k-1}\}<F(a_k)$

$$(k=2,3,\cdots,m).$$

[Hes] 证明了: $\exists\bar\lambda>0$, 当 $\lambda>\bar\lambda$ 时 (4) 至少有 $2m-1$ 个正解.

证明的方法是，引进辅助问题

$$\begin{cases}-\Delta u = f_k(u) & (x\in\Omega)\\ u=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

其中

$$f_k(u)=\left.\begin{cases}0 & (u<-1)\\ \geqslant 0 & (-1\leqslant u<0)\\ f(u) & (0\leqslant u\leqslant a_k)\\ \leqslant 0 & (a_k<u\leqslant a_{k+1})\\ 0 & (u>a_{k+1})\end{cases}\right\}\in C^1$$

先由变分法证明存在m个正解，再利用度理论讨论临界点方程

$$\psi_k(\lambda, u)=I(u)-\lambda G_k(u)=0$$

证明存在另外 $m-1$ 个正解，其中

$$G_k(u)v=\int_\Omega f_k(u(x))v(x)dx$$

习　题　七

7.1　设 $U=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\middle| x^2+y^2<1\right\}$是$\mathbb{R}^2$中的单位圆，对给定的$f:U\to\mathbb{R}^2$，按定义或度的性质求 $d(f, U, \theta)$：

1°　$f(x,y)=\begin{pmatrix}y-x^2\\ y\end{pmatrix}$，　　2°　$f(x,y)=\begin{pmatrix}e^x-1\\ y^2\end{pmatrix}$，

3°　$f(x,y)=\begin{pmatrix}|y|-x\\ x^2+2x-y^2\end{pmatrix}$.

7.2　证明小扰动原理：设 F, $F_1:\bar{\Omega}\to E$ 是紧算子，$\Phi=I-F$，$\Phi_1=I-F_1$，$\theta\bar{\in}\Phi(\partial\Omega)$，$\theta\bar{\in}\Phi_1(\partial\Omega)$，若对 $\forall u\in\partial\Omega$ 有 $\|F_1u-Fu\|\leqslant\|\Phi u\|$，则

$$d(\Phi, \Omega, \theta)=d(\Phi_1, \Omega, \theta)$$

7.3　设线性紧算子 A不以 1 为特征值．令

$$\Phi_0 u=(I-A)(u-u_0)$$

$$U_\delta(u_0)=\{u|u\in E, \ \|u-u_0\|<\delta\}$$

其中 u_0 是 E 中的一个元素．证明

$$d(\Phi_0, U_\delta(u_0), \theta) = i(\theta, I - A)$$

(提示：利用定理 7.2.6)。

7.4 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，其特征值全是非零实数，对 $\forall u\in\mathbf{R}^n$，令 $Qu = Au$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开区域，$\theta\in\Omega$．求证

$$d(\theta, \Omega, \theta) = i(\theta, Q) = (-1)^\beta$$

β 为 A 的一切负特征值的重数和。

在题 7.5—7.11 中设 E^n 是 n 维 Banach 空间，$\Omega\subset E^n$ 是有界开区域，$Q_0:\bar{\Omega}\to E^n$ 是连续算子。

7.5 若对 $\forall x\in\partial\Omega$ 和 $\lambda\in[1, +\infty)$ 有 $Q_0x\neq\lambda x$，又 $\theta\bar{\in}\partial\Omega$，证明

1° $I - Q_0$ 与 I 是同伦的(即 $\exists Q(x, \mu):\bar{\Omega}\times[0, 1]\to E^n$ 是连续算子，对 $\forall x\in\partial\Omega$，当 $\mu\in[0,1]$ 时 $Q(x, \mu)\neq\theta$，并有 $Q(x, 0) = (I - Q_0)x$，$Q(x, 1) = x$)；

2° 若 $\theta\in\Omega$，则 Q_0 在 Ω 内存在不动点。

7.6 若对 $\forall x\in\partial\Omega$ 和 $\lambda\in(-\infty, 1]$ 有 $Q_0x\neq\lambda x$，又 $\theta\bar{\in}\partial\Omega$，证明

1° $I - Q_0$ 与 $-I$ 同伦；

2° 若 $\theta\in\Omega$，则 Q_0 在 Ω 内存在不动点。

7.7 利用 7.5 题证明：若点 $\theta\in\Omega$，对 $\forall x\in\partial\Omega$ 有 $\|Q_0x\|\leqslant\|x\|$，$Q_0x\neq x$，则

$$d(I - Q_0, \Omega, \theta) = 1$$

7.8 设 A 是 $n\times n$ 正定矩阵，$\theta\in\Omega$，对 $\forall x\in\partial\Omega$，$(x - Q_0x, Ax)\geqslant 0$．利用 7.5 题，证明：$Q_0$ 在 $\bar{\Omega}$ 存在不动点。

7.9 设 Q_0 将 $\partial\Omega$ 映入 E^n 的真子空间 E_0，又对 $\forall x\in\partial\Omega$，$\lambda\in[0, 1]$ 有 $Q_0x\neq\lambda x$．证明

1° $d(I - Q_0, \Omega, \theta) = d(-Q_0, \Omega, \theta)$．

2° $\forall$ 取定 $x^*\in E^n\setminus E_0$，$x^*\neq\theta$，考虑常数算子 Q_c：

$$Q_cx = x^* \quad (\forall x\in\bar{\Omega})$$

则 $-Q_0$ 与 Q_c 是同伦向量场(即 $\exists Q(x, \mu):\bar{\Omega}\times[0,1]\to E^n$ 是连续算子，对 $\forall x\in\partial\Omega$，当 $\mu\in[0,1]$ 时 $Q(x,\mu)\neq\theta$，并有 $Q(x, 0) = Q_0x$，$Q(x,1) = Q_cx$)．

3° $d(I - Q_0, \Omega, \theta) = 0$．

7.10 设 Q_0 将 $\partial\Omega$ 映入 E^n 的真子空间 E_0，又对 $\forall x\in\partial\Omega$，有 $Q_0x\neq x$，$\|Q_0x\|\geqslant\|x\|$，$\theta\bar{\in}\partial\Omega$．利用 7.8，题证明

$$d(I - Q_0, \Omega, \theta) = 0$$

7.11 设 Ω_1，$\Omega_2\subset\Omega$ 是有界开区域，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，又设 Q_0 将 $\bar{\Omega}_2\setminus$

Ω_1 映入 E^* 的真子空间 E_0，若在 $\partial\Omega_1$ 上满足 $\|\Omega_0 x\|\leqslant\|x\|$，而在 $\partial\Omega_2$ 上满足 $\|\Omega_1 x\|\geqslant\|x\|$. 利用 7.7 题，7.10 题及度理论证明：在闭区域 $\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1$ 上 Ω_0 至少存在一个不动点。

7.12 设 $f\in C([0, l]\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1)$，考察边值问题

$$\begin{cases}u''=\lambda f(x, u, u')\\ u(0)=u(l)=0\end{cases}\tag{7.1}$$

其中参数 $\lambda\in[0, 1]$，取 Banach 空间

$$E=\{u\mid u(x)\in C^1[0, l],\ u(0)=0,\ u(l)=0\}$$

对 $\forall u\in E$，定义范数 $\|u\|=\max\limits_{[0,l]}|u(x)|+\max\limits_{[0,l]}|u'(x)|$. 记

$$\begin{cases}u''=0\\ u(0)=u(l)=0\end{cases}$$

的 Green 函数为 $G(x, \xi)$，记

$$Gx=\int_0^l G(x, \xi)f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi$$

证明

1° G 在 E 中是紧算子.

2° 若对 $\forall\lambda\in[0, 1]$，(7.1) 的解有一致的先验估计，即存在常数 $M>0$，当 $\lambda\in[0, 1]$，若 u 是 (7.1) 的解时必有 $\|u\|<M$，则对 $\forall\lambda\in[0, 1]$，(7.1) 必存在解.

3° 若当 $x\in[0, l]$，$u\in\mathbf{R}^1$，$p\in\mathbf{R}^1$ 时 $f(x, u, p)$ 有界，则对 $\forall\lambda\in[0, 1]$，(7.1) 存在解.

在题 7.13—7.18 中考察边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=\lambda u-au^k & (x\in\Omega)\\ u=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}\tag{7.2}$$

其中 a 为正常数，$k\geqslant3$ 为奇数，$q(x)\in C^\alpha(\bar{\Omega})$，$q(x)>0$ $(x\in\bar{\Omega})$，$\lambda>0$ 为参数.

取 $E=C(\bar{\Omega})$，由

$$\begin{cases}-\Delta v+q(x)v=u & (x\in\Omega)\\ v=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

在 E 中定义一个紧算子 $v=Gu$，则 (7.2) 等价于

$$u=\lambda Gu-aGu^k$$

写成

$$u=Tu$$

其中 $Tu = \lambda Gu - aGu^k$。令 $\Phi = I - T$，

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

的全体特征值为

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$$

7.13 证明存在一个球

$$U_R(\theta) = \{u \mid u \in E, \ \|u\| < R\}$$

当 $t \in [0, 1]$ 时

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = t[\lambda u - au^k] & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

即

$$u = T_t u \quad (T_t u = t\lambda Gu - taGu^k)$$

在 $E \backslash U_R(\theta)$ 中无解。

7.14 证明 $d(\Phi, U_R(\theta), \theta) = 1$。

7.15 设 u^* 是(7.2)的任意解。求当 $u = u^*$ 时 T 的导算子 $DT|_{u=u^*}$。

7.16 设 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$，$u^*$ 是(7.2)的非零解。证明线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta v + [q(x) + au^{*k-1}]v = \mu v \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的最小特征值 $\mu_0 = \lambda$，并证明 u^* 在 Ω 内恒正或恒负。

7.17 利用特征值的比较原理(包括，若 $\mu \geqslant 1$，则

$$\begin{cases} -\mu\Delta v + q(x)v = \lambda v \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的第一特征值不小于 λ_1($\mu = 1$ 时的最小特征值))及度理论，证明：若 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$，$u^*$ 是(7.2)的任意非零解，则 $i(u^*, \Phi) = 1$。

7.18 设 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$。证明(7.2)只有三个解：零解，一个正解，一个负解。

第八章 平衡解的存在性与分叉问题——相图法

当空间变量是一维时，反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u)$$

的平衡解方程是二阶保守系统

$$u''(x)+f(u(x))=0$$

我们曾利用相图法进行过详细的讨论。本章将利用相图法讨论含参数的分叉问题：

$$\begin{cases}u''+\lambda f(u)=0 & (0<x<\pi)\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}\tag{I}$$

和

$$\begin{cases}u''+f(u)=0 & (|x|<L)\\ u(\pm L)=0\end{cases}\tag{II}$$

这里区间长度L是参数。上述λ，L均为正数，f至少连续。

相图法具有几何直观性，得到的是全局分叉的确切结果：对于给定的参数可以知道它有且仅有几个解。

8.1 一 般 原 理

我们假设$f\in C^1$，先将

$$u''+\lambda f(u)=0\tag{1.1}$$

化成等价方程组

$$\begin{cases}u'=v\\ v'=-\lambda f(u)\end{cases}\tag{1.2}$$

求出第一积分

$$\frac{1}{2}v^2+\lambda F(u)=\lambda E \tag{1.3}$$

其中 E 为常数，

$$F(u)=\int_0^u f(s)ds$$

(1.2) 的相图依赖于 $f(u)$ 的具体形式，为了方便，把 x' 看成"时间"变量。对于边值问题 (I) 的情形，所求轨线必须是从 v 轴上一点 p 再回到 v 轴上(同一点或另一点)所需时间正好是 π，如图 8-1.1 所示。

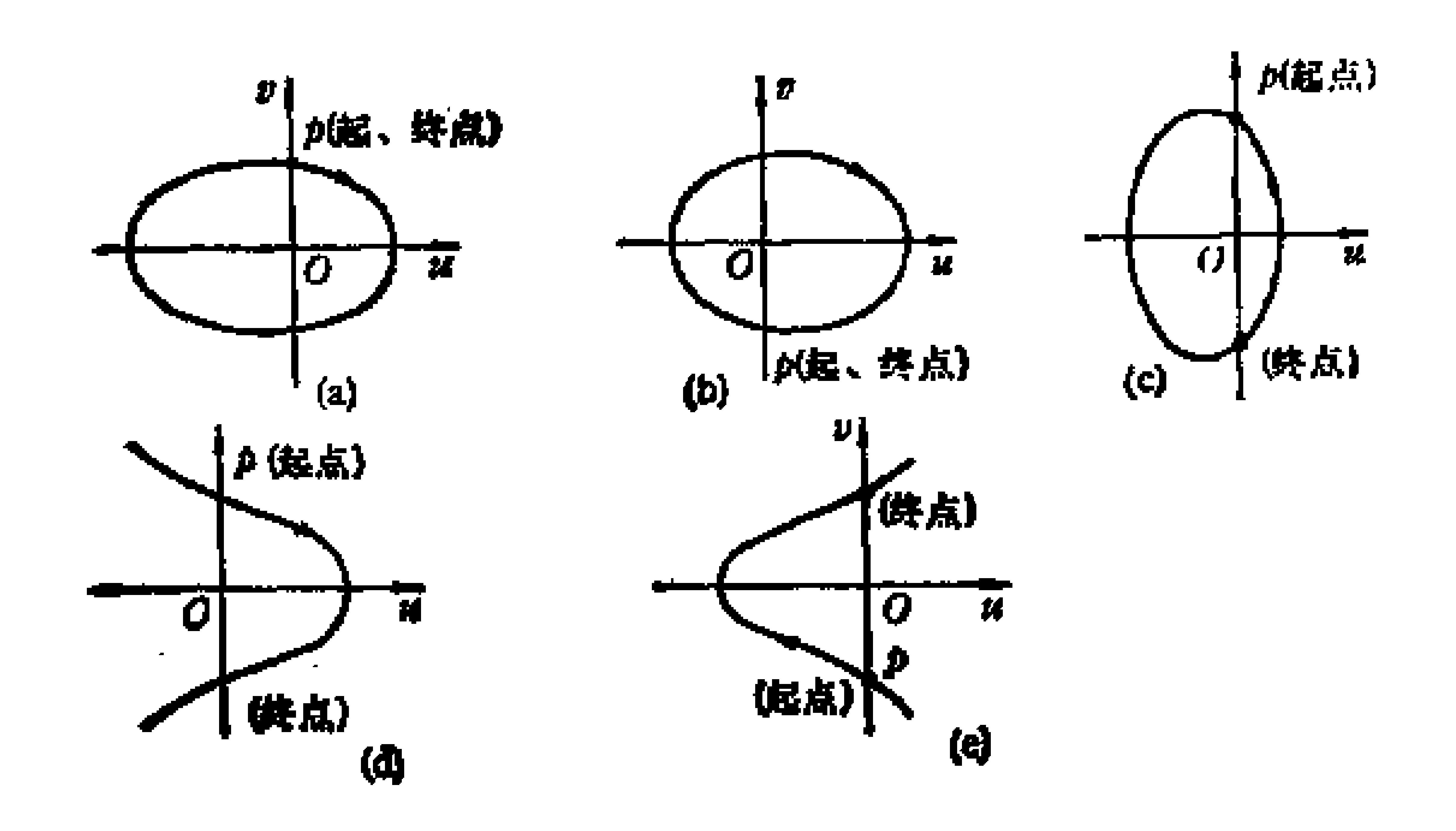


图 8-1.1

从 p 点(除去原点)出发的轨线 $\Gamma(p)$ 有以下两种:

(1) 从正(负) v 轴上一点 p 沿闭轨转 k 圈回到 p 点，这时 $u(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恰有$(2k-1)$个零点，$u'(0)>0(u'(0)<0)$ $(k=1,2,\cdots)$ (图 8-1.1(a), (b))。

(2) 从正(负) v 轴上一点 p 沿闭轨转 k 圈后，又转半圈到负(正) v 轴上的对称点 $(k=0,1,2,\cdots)$ (见图 8-1.1(c))；或从正(负) v 轴上一点沿非闭轨到负(正) v 轴上的对称点(相当于$k=0$) (图 8-1.1(d), (e))。

设 $\Gamma(p)$ 对应的积分常数为 E，即 (1.3) 成立。$\Gamma(p)$ 与正、负

u 轴的交点的坐标分别是 $(m_+(E),0)$，$(m_-(E),0)$，则

$$F(m_+(E)) = E \quad (m_+(E) > 0)$$

$$F(m_-(E)) = E \quad (m_-(E) < 0)$$

当 p 点位于 v 轴(不是原点)时，$E > 0$. 因为

$$\frac{du}{\sqrt{2\lambda}\ \sqrt{E - F(u)}} = dx$$

所以轨线从正 v 轴上一点到正 u 轴上交点 $(m_+(E),0)$ 一次所需时间是

$$T_+(E) = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{m_+(E)} [E - F(u)]^{-\frac{1}{2}} du \qquad (1.4)$$

从负 u 轴上交点到正 v 轴上一点一次所需时间是

$$T_-(E) = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_{m_-(E)}^{0} [E - F(u)]^{-\frac{1}{2}} du \qquad (1.5)$$

只要 $(m_+(E),0)$，$(m_-(E),0)$ 不是 (1.2) 的奇点，积分 (1.4) 和 (1.5) 均收敛.

由上述讨论并利用对称性我们得到:

由 (1.1) 确定的 $u(x)$，若满足 $u(0)=0$，$u'(0)=\sqrt{2\lambda E}$ (或 $-\sqrt{2\lambda E}$) $(E \neq 0)$，则 $u(\pi)=0$ 的充要条件是，E 满足下列条件之一

$$kT_+(E) + kT_-(E) = \frac{\pi}{2} \qquad (1.6k)$$

$$kT_+(E) + (k-1)T_-(E) = \frac{\pi}{2} \qquad (1.7k^+)$$

$$kT_-(E) + (k-1)T_+(E) = \frac{\pi}{2} \qquad (1.7k^-)$$

若对某个 $k \geqslant 1$，E 满足 $(1.6k)$，则 $u(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恰有 $2k-1$ 个零点. 若 E 满足 $(1.7k^{\pm})$，则 $u(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恰有 $2k-2$ 个零点. 当 E 满足 $(1.7k^+)$ ($(1.7k^-)$) 时 $u'(0) > 0(<0)$.

当 $E=0$ 时可类似讨论.

问题变成了对 f 加上什么条件，方程 $(1.6k)$ 和 $(1.7k^{\pm})$ 对 E

有解。

我们称 (1.6k) 和 (1.7$k^{\pm}$) 的左端为"时间"函数。

有时我们也把从 v 轴上 $p(0, \eta)$ 点出发的轨线与 v 轴第一次再交所需的时间 $T(\eta)$ 称为时间函数，由 (1.3)，η 与 E 满足

$$\frac{1}{2}\eta^2 = \lambda E$$

因此

$$T^+(E) = \frac{1}{2}T(\sqrt{2\lambda E})$$

$$T_-(E) = \frac{1}{2}T(-\sqrt{2\lambda E})$$

若记初值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda f(u) = 0 \\ u(0) = 0, \quad u_x(0) = \eta \end{cases}$$

的解为 $u(x, \eta)$，则

$$T(\eta) = \inf\{x > 0 \mid u(x, \eta) = 0\}$$

由轨线的对称性显然有

$$u_x(T(\eta), \eta) = -\eta$$

为了讨论方程 (1.6k)、(1.7$k^{\pm}$) 的可解性，要对时间函数进行分析。主要分析以下问题：

1° 时间函数的定义域与光滑性。

2° 时间函数的单调性。

3° 时间函数在定义域边界点处的极限值(往往时间函数的值域与它有关)。

关于时间函数的定义域与光滑性有如下一般结论。

定理 8.1.1 设 $f \in C^2$，记 $T(\eta)$ 的定义域为 $\mathscr{D}$，则 $\mathscr{D}$ 是开的，$T: \mathscr{D}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}^1$ 是 C^2 的。此外对任意 $\eta \in \mathscr{D}\setminus\{0\}$，

$$T'(\eta) = u_\eta(T(\eta), \eta)/\eta$$

证明　设 $\eta_0 \in \mathscr{D}\setminus\{0\}$ 且

$$T_0 = T(\eta_0) = \inf\{x > 0 \mid u(x, \eta_0) = 0\}$$

因 $u_x(T_0, \eta_0) = -\eta_0 \neq 0$，由隐函数定理知，存在唯一的 η_0 邻域上的 C^2 函数 $\tau(\eta)$：

$$\tau(\eta_0) = 0, \quad u(\tau(\eta), \eta) = 0$$

由解的连续依赖性定理，在 η_0 的充分小邻域：

$$T(\eta) = \tau(\eta)$$

因此 $\mathscr{D}\backslash\{0\}$ 是开的，$T: \mathscr{D}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}^1$ 是 C^2 的。

由 $u(T(\eta), \eta) = 0$ 及 $u_x(T(\eta), \eta) = -\eta$，立即得

$$u_x(T(\eta), \eta)T'(\eta) + u_\eta(T(\eta), \eta) = 0$$

$$T'(\eta) = u_\eta(T(\eta), \eta)/\eta$$

证毕。

后面给出一些例子，通过分析时间函数，给出边值问题的分叉结构。

8.2 时间函数是单调的情形

本节利用一般原理讨论分叉问题(I)．假定 $f \in C^2(\mathbf{R}^1)$ 并满足

1° $f(0) = 0$，$f'(0) > 0$，

2° $\limsup\limits_{|u| \to \infty} \dfrac{f(u)}{u} \leqslant 0$， (2.1)

3° $\operatorname{sign} f''(u) = -\operatorname{sign} u$．

由假设条件知，存在唯一的 a_+ 和 a_-，使得

(1) $-\infty \leqslant a_- < 0 < a_+ \leqslant +\infty$，$\operatorname{sign} f(u) = \operatorname{sign} u$ $(a_- < u < a_+)$，$a_+ = +\infty$ 或 $f(a_+) = 0$ (a_+ 有限时)，$a_- = -\infty$ 或 $f(a_-) = 0$ (a_- 有限时)。

(2) $F(u)$ 在 $[0, a_+)$ 严格上升，在 $(a_-, 0]$ 严格下降，$F(0) = 0$，$F(u) > 0$ $(u \in (a_-, a_+), u \neq 0)$，$\lim\limits_{u \to a_\pm} F(u) = E_\pm$ $(0 < E_\pm \leqslant +\infty)$。

(3) F 在$[0, a_+)$有反函数 $m_+: [0, E_+) \to [0, a_+)$，在 $(a_-, 0]$

有反函数 $m_-:[0, E_-)\to(a_-, 0]$.

(4) $F'(0)=f(0)=0$, $F''(0)=f'(0)>0$, $F'(a_\pm)=f(a_\pm)=0$, $F''(a_\pm)=f'(a_\pm)<0$.

现不妨设 a_-, a_+ 为有限数，于是 (1.2) 有奇点

$$(0, 0)\ (中心);\ (a_+, 0)\ 和\ (a_-, 0)\ (鞍点)$$

当 $F(a_-)\neq F(a_+)$ 时，其相图如图 8-2.1. 其它情形的相图与此有明显的不同，但不影响我们对问题的讨论.

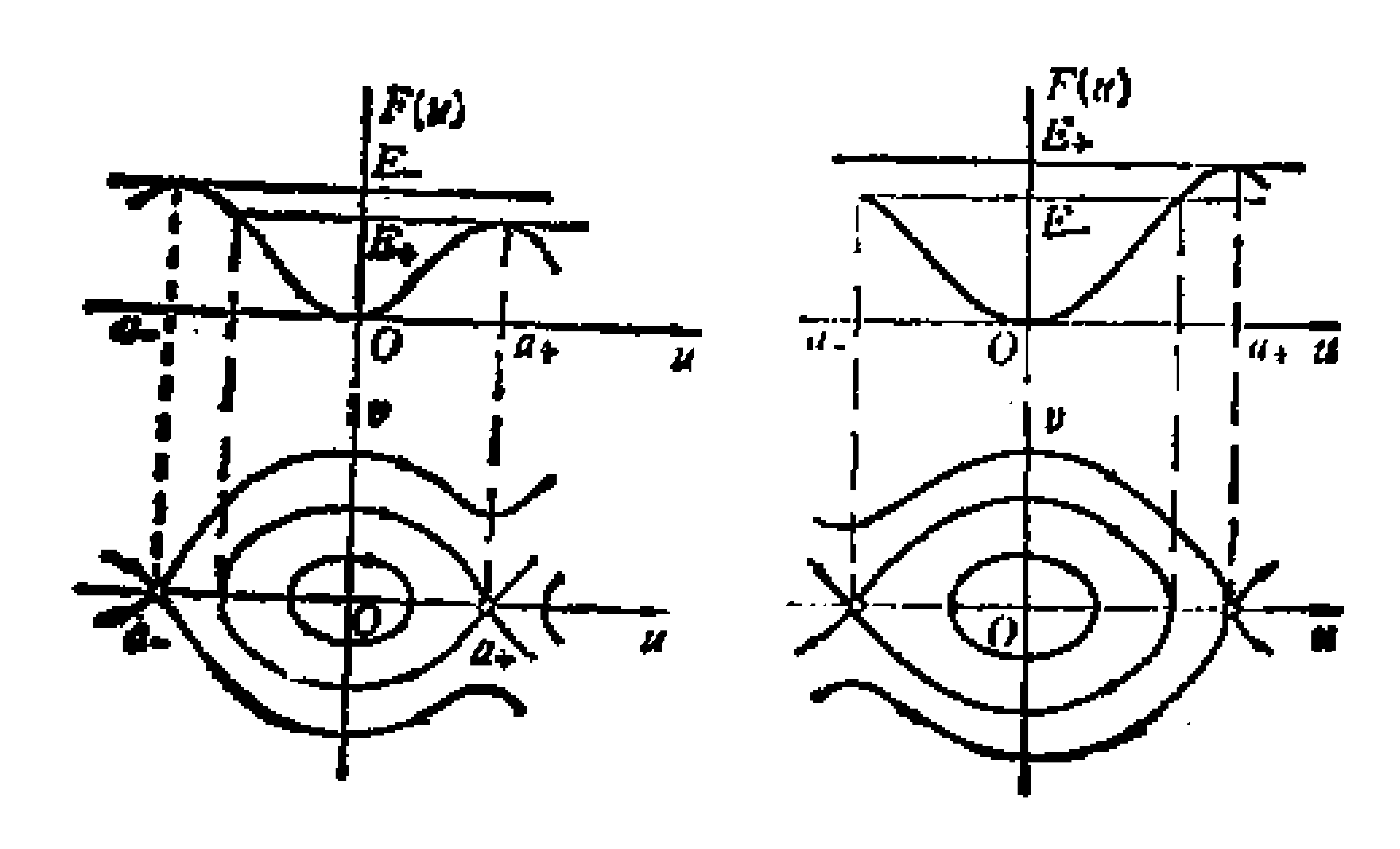


图 8-2.1

由 (1.3) 及相图知，我们只须考虑

$$0<E<\max(E_-, E_+)$$

的情形. 为了讨论方程 (1.6k) 和 (1.7$k^\pm$) 的可解性，先讨论 $T_\pm(E)$ 的性质.

令

$$F(u)=E\sin^2\theta\,(u\in[0, a_+))$$

则

$$F'(u)du=2E\sin\theta\cos\theta d\theta$$

于是

$$T_+(E)=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F^{\frac{1}{2}}(u)}{F'(u)}d\theta$$

对 $T_-(E)$ 也有类似的表达式.

引理 8.2.1 $T_\pm(E)$ 在 $(0, E_\pm)$ 可微且

$$\frac{dT_\pm(E)}{dE} > 0 \quad (0 < E < E_\pm)$$

因此，$T_\pm(E)$ 在 $(0, E_\pm)$ 严格上升.

证明

$$\frac{dT_+(E)}{dE} =$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F^{-\frac{1}{2}}(u)}{2} \frac{F'^2(u) - 2F(u)F''(u)}{F'^3(u)} \frac{du}{dE} d\theta$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2E} \frac{F'^2(u) - 2F(u)F''(u)}{F'^3(u)} F^{\frac{1}{2}}(u) d\theta \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{du}[F'^2(u) - 2F(u)F''(u)]$$

$$= -2F(u)f''(u) > 0 \quad (0 < u < a_+)$$

$$[F'^2(u) - 2F(u)F''(u)]_{u=0} = 0$$

于是

$$F'^2(u) - 2F(u)F''(u) > 0 \quad (u \in (0, a_+))$$

因此 $\dfrac{dT_+(E)}{dE} > 0$ $(E \in (0, E_+))$，同理可证另一结论．证毕.

引理 8.2.2 $\lim\limits_{E \to 0+} T_\pm(E) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha\lambda}}$

其中 $\alpha = f'(0)$.

证明 同引理 4.3.6.

引理 8.2.3 $\lim\limits_{E \to E_\pm} T_\pm(E) = +\infty$，因此，$T_\pm(E)$ 的值域是 $\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha\lambda}}, +\infty\right)$.

证明 对 $T_+(E)$ 给出证明.

先设 $a_+ = +\infty$，则对任意 $u \in (0, +\infty)$，$f(u) > 0$，

$$\lim_{u\to+\infty}\inf\frac{f(u)}{u}\geqslant 0$$

再由条件 (2.1) 中的 2° 可得

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=0,\quad \lim_{u\to+\infty}\frac{F(u)}{u^2}=0$$

还因为 $\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=f'(0)>0$，所以存在 $p=\sup_{u>0}\frac{f(u)}{u}>0$，$\forall\varepsilon$，$0<\varepsilon<p$，$\exists u_0\in(0,+\infty)$ 使得 $f(u_0)=\varepsilon u_0$。条件 (2.1) 中的 3°，1° 表明 $\frac{f(u)}{u}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调下降，于是当 $0\leqslant u\leqslant u_0$ 时

$$f(u)\geqslant\varepsilon u,\qquad F(u)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon u^2$$

结合 $\lim_{u\to+\infty}\frac{F(u)}{u^2}=0$，得到 $\exists\bar{u}\in[u_0,+\infty)$，当 $0\leqslant u\leqslant\bar{u}$ 时，$F(u)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon u^2$，而 $F(\bar{u})=\frac{1}{2}\varepsilon\bar{u}^2$。令 $\bar{E}=F(\bar{u})$，则由 (1.4) 得

$$T_+(\bar{E})=(2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\bar{u}}[\bar{E}-F(u)]^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\geqslant(2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\bar{u}}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\bar{u}^2-\frac{1}{2}\varepsilon u^2\right]^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\varepsilon}}$$

因为 $T_+(E)$ 是严格单调上升的，所以当 $\bar{E}<E<E^+$ 时

$$T_+(E)>\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\varepsilon}}$$

即

$$\lim_{E\to E^+}T_+(E)=+\infty$$

再看 $a_+<+\infty$ 的情形。因为 $(a_+,0)$ 是奇点，所以

$$T_+(E_+)=+\infty$$

由解对初值的连续依赖性得 $\lim_{E\to E_+}T_+(E)=+\infty$，证毕。

由 $T_\pm(E)$ 的性质可得

定理 8.2.4 设 $\lambda_n = n^2/f'(0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则对每个 $n \geqslant 1$，存在两个函数 $E_n^\pm$ 分别把 $[\lambda_n, +\infty)$ 连续映射到 $[0, E_\pm)$，并具有下列性质：

1° 对任意整数 $k \geqslant 1$ 和 $\lambda \in [\lambda_{2k-1}, +\infty)$，$E_{2k-1}^\pm(\lambda)$ 是方程 $(1.7_k^\pm)$ 的唯一解；

2° 对任意整数 $k \geqslant 1$ 和 $\lambda \in [\lambda_{2k}, +\infty)$，$E_{2k}^+(\lambda) = E_{2k}^-(\lambda)$ 是方程 $(1.6k)$ 的唯一解；

3° $E_n^\pm(\lambda_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。

证明 例如，令

$$T(E, \lambda) = kT_\pm(E) + (k-1)T_\mp(E)$$

当 $0 \leqslant E < E_\pm$ 时值域是 $\left[\dfrac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{f'(0)\lambda}}, +\infty\right)$，$T(E, \lambda)$ 对 E 严格单调上升。当 $\lambda > \lambda_{2k-1}$ 时 $\dfrac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{f'(0)\lambda}} < \dfrac{\pi}{2} < +\infty$，当 $\lambda = \lambda_{2k-1}$ 时 $\dfrac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{f'(0)\lambda}} = \dfrac{\pi}{2}$。因此存在唯一的 $E_{2k-1}^\pm(\lambda)$ 满足 $T(E_{2k-1}^\pm(\lambda), \lambda) = \dfrac{\pi}{2}$，即 $(1.7_k{}^\pm)$，且 $E_{2k}^\pm(\lambda_{2k-1}) = 0$。其余类似可证。证毕。

由上述讨论我们最后得到

定理 8.2.5 设 (2.1) 成立，则对任意 $n \geqslant 1$，$\lambda \in [\lambda_n, +\infty)$，边值问题 (I) 有解 $\varphi_n^\pm(x, \lambda)$ 满足：

1° $\varphi_n^\pm(x, \lambda_n) = 0$。

2° 当 $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$ 时，$\varphi_n^\pm(x, \lambda)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上恰有 $n+1$ 个零点

$$0 = x_0^\pm(\lambda) < x_1^\pm(\lambda) < \cdots < x_n^\pm(\lambda) = \pi$$

并且

$$\varphi_n^+(x, \lambda) > 0 (x \in (0, x_1^+(\lambda)))$$
$$\varphi_n^-(x, \lambda) < 0 (x \in (0, x_1^-(\lambda)))$$
$$|\varphi_n^\pm(x, \lambda)| < \max(|a_-|, a_+)$$

3° 当 $\lambda > \lambda_1$, $x \in (0, \pi)$ 时 $\varphi_1^+(x, \lambda) \in (0, a_+)$,

$\varphi_1^{+\prime}(0, \lambda) > 0$, $\varphi_1^-(x, \lambda) \in (a_-, 0)$, $\varphi_1^{-\prime}(0, \lambda) < 0$。

对任意 $\lambda \in [0, +\infty)$, 边值问题 (1) 无其它非零解.

8.3 时间函数是非单调的情形

现在我们考虑另一个边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0 \\ u(\pm L) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $f(u) = -(u-a)(u-b)(u-c)$ $(a < b < c)$。这里 L 是分叉参数,它出现在区间的端点. 这一点与 (I) 没有实质性的差别。若令 $y = L^{-1}x$, 则 (3.1) 化成

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dy^2} + L^2 f(u) = 0 \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

变成了分叉参数 L 出现在方程中的情形,考虑 (3.1) 和 (3.2) 都是一样的。

方程式 $u'' + f(u) = 0$ 的等价方程组

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -f(u) \end{cases} \tag{3.3}$$

的第一积分是

$$\frac{1}{2}v^2 + F(u) = E, \quad F(u) = \int_0^u f(s)ds$$

奇点是

$(a, 0)$——鞍点, $(b, 0)$——中心, $(c, 0)$——鞍点。

边值问题 (3.1) 的分叉结构与奇点的位置有关, 下面考察几种情形。

(一) $a = 0$ 的情形.

若 $f(u) = -u(u-b)(u-c)$ $(0 < b < c)$, 且

$$\int_0^c f(u)du > 0,$$

则 (3.3) 的相图，如图 8-3.1 所示。

从相图中我们立即看出：

(1) 若 (3.1) 有非零解，只可能是正解。

(2) 设 v 轴上 A 点出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时趋于 u 轴上的 c 点，此轨线对应的积分常数 $E=\frac{A^2}{2}$。过鞍点 (0,0) 的轨线对应的积分常数 $E=0$。我们只须考察积分常数 $E\left(0<E<\frac{A^2}{2}\right)$ 所对应的轨线。

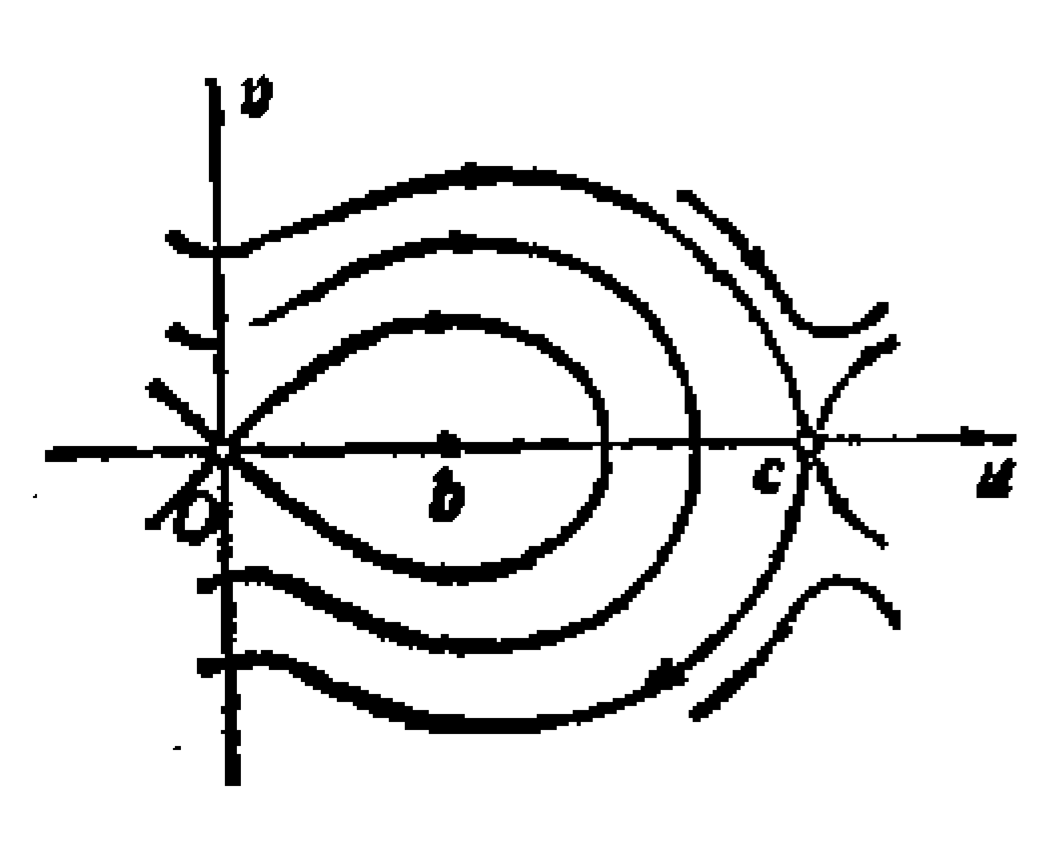


图 8-3.1

从 v 轴上原点与 A 点之间的任意 p 点(对应积分常数为 E)出发的轨线交 u 轴于 $m(E)$，于是得时间函数

$$T(E)=\int_0^{m(E)}\frac{du}{\sqrt{2}\ \sqrt{F(m(E))-F(u)}} \tag{3.4}$$

显然，当 $E\to 0^+$ 或 $E\to\frac{A^2}{2}-0$ 时 $T(E)\to+\infty$。这表明：当 $0<E<\frac{A^2}{2}$ 时，$T(E)$ 不是单调的，它一定有最小值记为 L_0。当 $L<L_0$ 时 (3.1) 无非零解，当 $L>L_0$ 时 (3.1)至少有两个非零解(正解)。

为了确定解的个数，需要进一步研究 $T(E)$ 的变化，可以证明：$T(E)$ 恰有一个临界点 $E_0(T'(E_0)=0)$，它是最小值点，$T(E_0)=L_0$。这就是说，$T=T(E)$ 的图形如图 8-3.2 所示，而不是图 8-3.3。

由图 8-3.2 可得：当 $0<L<L_0$ 时 $u\equiv 0$ 是(3.1)的唯一解，当 $L=L_0$ 时 (3.1) 有唯一非零解(正解)，当 $L>L_0$ 时 (3.1) 恰有两个非零解(正解)。对任意 $L>0$，$u\equiv 0$ 均是(3.1)的解。

现在我们证明：

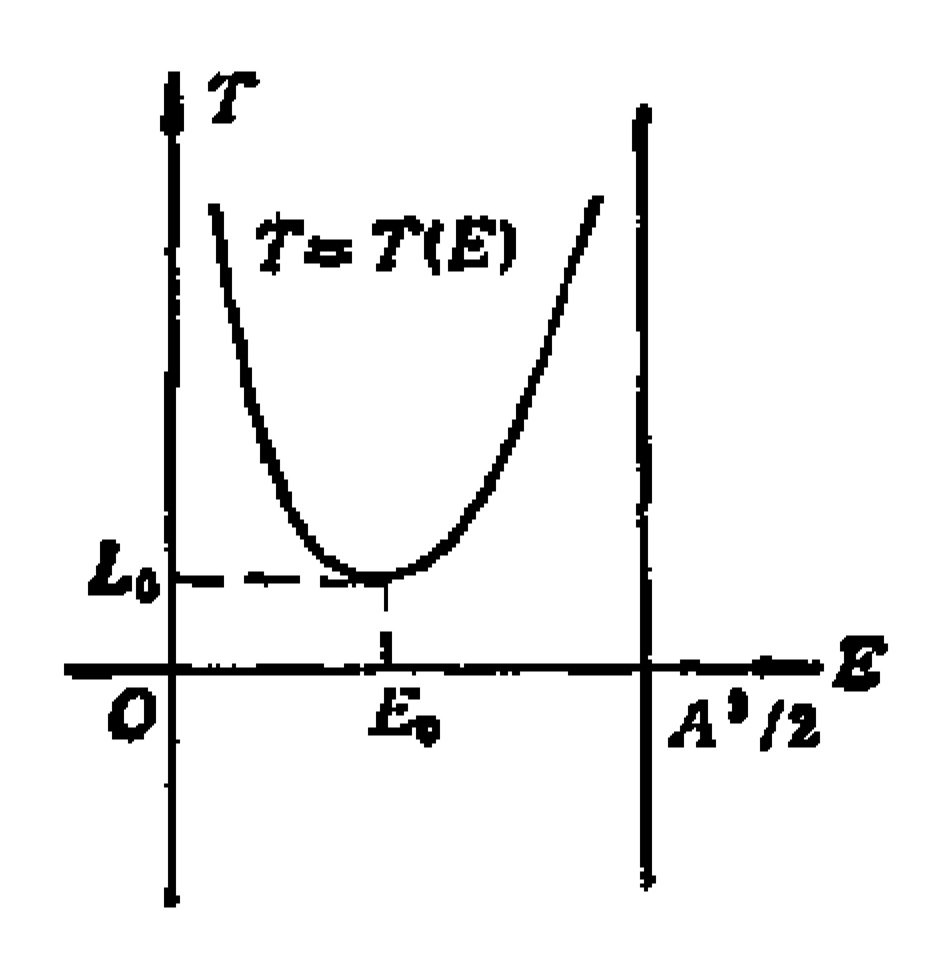


图 8-3.2

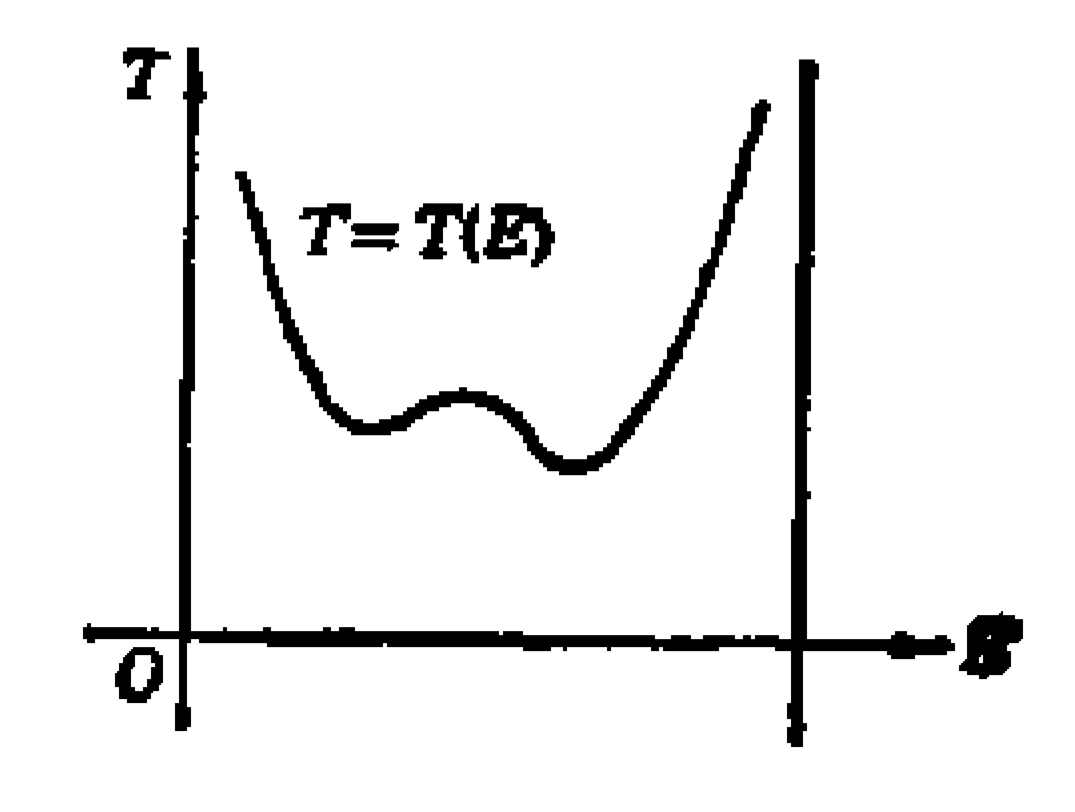


图 8-3.3

定理 8.3.1 设 $a=0$，则当 $0<E<\frac{A^2}{2}$ 时 $T(E)$ 恰有一个临界点即最小值点。

证明 只须证明 $T(E)$ 至多有一个临界点。

因为

$$F(m(E))=E,\quad b<m(E)<c$$

$$F'(m(E))\cdot m'(E)=1$$

所以 $m'(E)>0$。

令 $\alpha=m(E)$，

$$S(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{F(\alpha)-F(u)}}$$

则

$$T(E)=\frac{1}{\sqrt{2}}S(m(E))$$

$$T'(E)=\frac{1}{\sqrt{2}}S'(\alpha)m'(E)$$

因此只须证明 $S(\alpha)$ 至多有一个临界点。为此只须证明：若 $S'(\alpha)=0$，则 $S''(\alpha)>0$。

作变量替换 $u=\alpha\sin\varphi$，并令

$$G(\alpha)=F(\alpha)-F(\alpha\sin\varphi)$$

则

$$S(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} G^{-1/2}(\alpha)\alpha\cos\varphi d\varphi$$

可计算一阶和二阶导数得

$$2S'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} G^{-3/2}[2G-\alpha G']\cos\varphi d\varphi \tag{3.5}$$

$$2S''(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{G^{-5/2}\left[-\frac{3}{2}G'(2G-\alpha G')\right]\right.$$

$$\left.+G^{-3/2}[G'-2G'']\right\}\cos\varphi d\varphi$$

由 (3.5)，

$$2S'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\cdot\frac{[2F(\alpha)-\alpha f(\alpha)]-[2F(u)-uf(u)]}{[F(\alpha)-F(u)]^{3/2}}du$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{\theta(\alpha)-\theta(u)}{[F(\alpha)-F(u)]^{3/2}}du \tag{3.6}$$

因为

$$\theta(x)=2F(x)-xf(x)$$

$$=\frac{x^3}{2}\left[x-\frac{2}{3}(b+c)\right]$$

$$\theta'(x)=2x^2\left[x-\frac{b+c}{2}\right]$$

所以当 $0<\alpha\leqslant\frac{b+c}{2}$ 时 $S(\alpha)<0$，当 $\alpha\geqslant\frac{2}{3}(b+c)$ 时

$$S'(\alpha)>0.$$

若 $\frac{b+c}{2}<\alpha<\frac{2}{3}(b+c)$，$S'(\alpha)=0$，则对此 α 有

$$2S''(\alpha)=2kS'(\alpha)+2S''(\alpha)$$

其中 k 为任意常数。于是

$$2S''(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[G^{-5/2}\left(-\frac{3}{2}G'+kG\right)\right.$$

$$\left.\cdot(2G-\alpha G')+G^{-3/2}(G'-\alpha G'')\right]\cos\varphi d\varphi$$

令 $k=\frac{3}{a}$，则得

$$2S''(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[G^{-5/2}\left(\frac{3}{2a}\right)(2G-aG')^2\right.$$

$$\left.+G^{-3/2}(G'-aG'')\right]\cos\varphi d\varphi$$

$$\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}G^{-3/2}(G'-aG'')\cos\varphi d\varphi$$

而

$$G'=f(a)-f(a\sin\varphi)\sin\varphi$$
$$G''=f'(a)-f'(a\sin\varphi)\sin^2\varphi$$

因此，

$$2S''(a)\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}G^{-3/2}[f(a)$$

$$-f(a\sin\varphi)\sin\varphi-af'(a)$$

$$+af'(a\sin^2\varphi)\sin^2\varphi]\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a[F(a)-F(u)]^{-3/2}$$

$$[a\theta'(a)-u\theta'(u)]du \tag{3.7}$$

又

$$x\theta'(x)=xf(x)-x^2f'(x)=2x^3\left(x-\frac{b+c}{2}\right)$$

$$(x\theta'(x))'=8x^3\left[x-\frac{3}{8}(b+c)\right]$$

$y=x\theta'(x)$ 的图形如图 8-3.4 所示。于是

$$2S''(a)>0$$

证毕。

（二）$a>0$ 的情形。

若 $f(u)=-(u-a)(u-b)(u-c)\quad(0<a<b<c)$，且 $\int_a^c f(u)du>0$，则 (3.3) 的相图如图 8-3.5 所示。

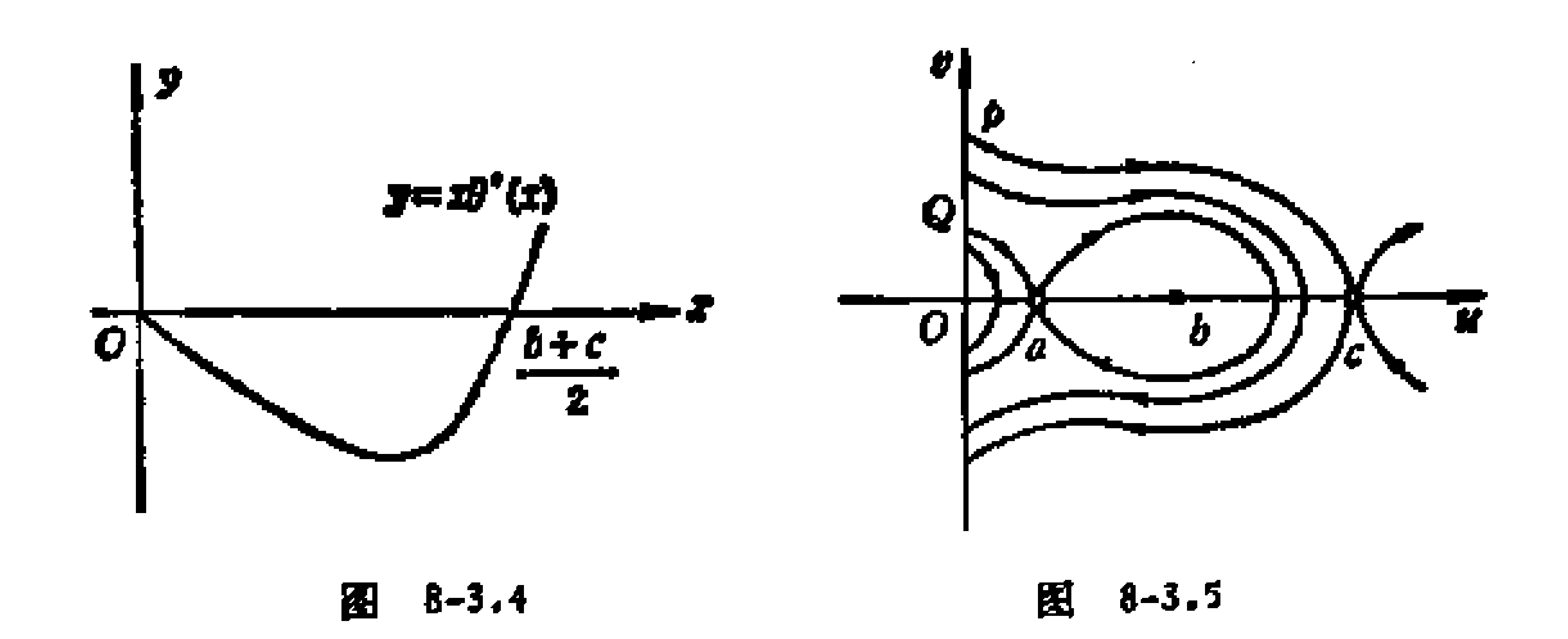


图 8-3.4　　　图 8-3.5

设 v 轴上 p 点出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时趋于 $(c,0)$，Q 点出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时趋于 $(a,0)$，分别对应积分常数 $E=\frac{P^2}{2}$，$E=\frac{Q^2}{2}$，过原点的轨线，对应于 $E=0$. 我们只须考虑积分常数

$$0<E<\frac{Q^2}{2},\ \frac{Q^2}{2}<E<\frac{P^2}{2}$$

对应的轨线. 显然，时间函数 (3.4) 满足

$$\lim_{E\to0^+}T(E)=0,\quad \lim_{E\to\frac{Q^2}{2}}T(E)=+\infty$$

$$\lim_{E\to\frac{P^2}{2}}T(E)=+\infty$$

下面进一步分析时间函数 $T(E)$. 如同前面一样，只须分析 $S(\alpha)$.

先设

$$\frac{Q^2}{2}<E<\frac{P^2}{2}$$

若 $S'(\alpha)=0$，则由 (3.6)，(3.7) 得

$$2S''(\alpha)-\frac{2}{\alpha}S'(\alpha)$$

$$\geqslant\frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha}[F(\alpha)-F(u)]^{-3/2}\cdot[\varphi(\alpha)-\varphi(u)]du$$

其中

$$\varphi(x)=x\theta'(x)-\theta(x)=\frac{3}{2}x^3\left(x-\frac{4}{9}\sigma\right)$$

其中 $\sigma=a+b+c$，于是，当 $\alpha\geqslant\frac{4}{9}\sigma$，$0<u<\alpha$ 时

$$\varphi(\alpha)-\varphi(u)>0$$

即

$$S''(\alpha)=S''(\alpha)-\frac{1}{\alpha}S'(\alpha)>0$$

因此，$\frac{Q^2}{2}<E<\frac{P^2}{2}$，当 $\alpha\geqslant\frac{4}{9}\sigma$ 时 $T(E)$ 至多有一个临界点。

当 $\alpha<\frac{4}{9}\sigma$ 时，直接考察 $T(E)$。把时间函数分成两段

$$T(E)=T_1(E)+T_2(E)$$

$$T_1(E)=\int_0^a\frac{du}{\sqrt{2}\ \sqrt{E-F(u)}}$$

$$T_2(E)=\int_a^{m(E)}\frac{du}{\sqrt{2}\ \sqrt{F(m(E))-F(u)}}$$

$$=\int_0^{m(E)-a}\frac{dw}{\sqrt{2}\ \sqrt{\tilde{F}(m(E)-a)-\tilde{F}(w)}}$$

其中 $\tilde{F}(w)=F(w+a)$。

令 $w=u-a$，则 (3.1) 化成

$$\begin{cases}w''+\hat{f}(w)=0\\ w(\pm L)=-a\end{cases}$$

其中 $\hat{f}(w)=f(w+a)=-w[w-(b-a)][w-(c-a)]$，它从纵轴上出发的时间函数是

$$\hat{T}_2(E)=\int_0^{m(E)-a}\frac{dw}{\sqrt{2}\ \sqrt{\hat{F}(m(E)-a)-\hat{F}(w)}}$$

其中 $\hat{F}(w)=\int_0^w f(s+a)ds$。易证

$$\tilde{F}(m(E)-a)-\tilde{F}(w)=\hat{F}(m(E)-a)-\hat{F}(w)$$

所以

$$\hat{T}_2(E) = T_2(E)$$

由前一种情形的讨论可知，当

$$\alpha - a < \frac{1}{2}[(b-a)+(c-a)]$$

即 $\alpha < \frac{1}{2}(b+c)$ 时 $\hat{T}_2(E)$ 是单调下降的。

设 $a < \frac{b+c}{8}$。当 $\alpha < \frac{4}{9}(a+b+c)$ 时有 $\alpha < \frac{1}{2}(b+c)$。于是 $T_2(E)$ 是单调下降的。显然，$T_1(E)$ 是单调下降的，因此 $T(E)$ 是单调下降的。这就证明了：

定理 8.3.2 设 $0 < a < \frac{1}{8}(b+c)$ $(a < b < c)$，则当

$$\frac{Q^2}{2} < E < \frac{A^2}{2}$$

时 $T(E)$ 恰有一个临界点即最小值点。

现设

$$0 < E < \frac{Q^2}{2}$$

当 $0 < u < a$ 时，

$$f(u) > 0,\ F(u) > 0,\ f''(u) > 0$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{d}{du}[F'^2(u) - 2F(u)F''(u)]\\&= -2F(u)f''(u) < 0\\&[F'^2(u) - 2F(u)F''(u)]\big|_{u=a}\\&= -2F(a)f'(a) > 0\end{aligned}$$

由此得

$$F'^2(u) - 2F(u)F''(u) > 0 \quad (0 < u < a)$$

再由 (2.2) 得到

$$\frac{dT(E)}{dE} > 0$$

因此我们证明了:

定理 8.3.3 设 $0 < a < b < 0$. 则当 $0 < E < \frac{Q^2}{2}$ 时 $T(E)$ 是严格单调上升的.

若定理 8.3.2 与定理 8.3.3 同时成立，我们得到时间函的图形如图 8-3.6,这里,当 $0 < L < L_0$ 时 (3.1) 仅有一个正解,当 $L = L_0$ 时 (3.1) 仅有两个正解,当 $L > L_0$ 时(3.1) 仅有三个正解,除此而外,(3.1) 无其它的解.

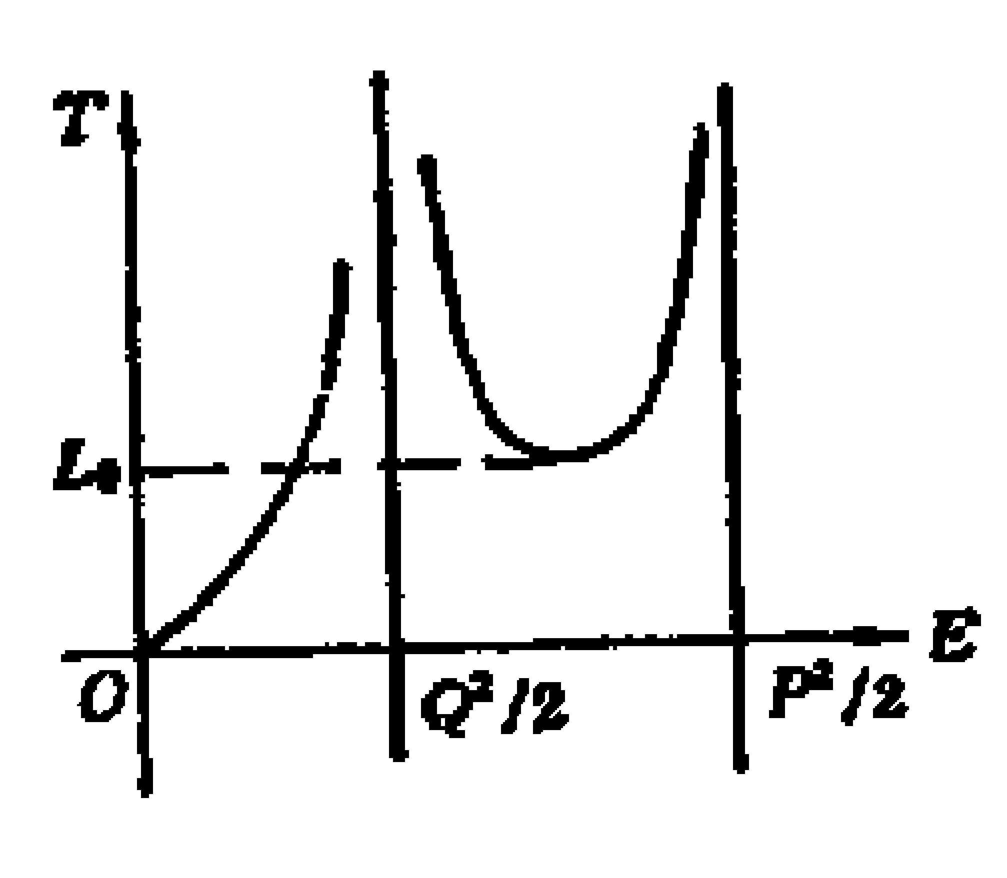


图 8-3.6

关于 (3.1) 更详细的讨论可查阅 [SW].

学习本章内容可参看 [Hen], [CI] 和 [SW].

8.4 评　　注

当空间变量是一维时，相图法是讨论平衡解的存在性及其分叉结构的一种较好的方法，它的基本原理是简单的. 在相图法的具体应用中,其主要工作在于利用分析的工具,对时间函数进行详细的分析.

相图法主要应用于讨论保守系统 $u'' + f(u) = 0$. 当然不只是 Dirichlet 边条件,还可适用于其它边条件的情形.

除了 §8.2 与 §8.3 中所举的例子外，在 [MT] 中讨论了一个非常特殊的分叉问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u - u^k = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

记

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = C \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

的特征值 $\lambda_n=\frac{(n+1)^2}{l^2}\pi^2 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

结论是:

设 k 为奇数,则存在唯一的一对解 $(u,-u)$ 在 $(0,l)$ 恰有 n 个零点的充要条件是 $\lambda>\lambda_n(n\geqslant 0)$.

设 k 为偶数,则

1° 存在唯一正解(负解)的充要条件是 $\lambda>\lambda_0$ $(\lambda<\lambda_0)$.

2° $\lambda>\lambda_{2n+1}$ $(n\geqslant 0)$ 时,存在唯一的一对解 $(u'(0)>0$, $u'(0)<0)$,在 $(0,l)$ 内恰有 $2n+1$ 个零点,当 $\lambda<\lambda_{2n+1}$ 时没有这类解.

3° 存在唯一的在 $(0,l)$ 内恰有 $2n$ 个零点且 $u'(0)>0$ 的解的充要条件是 $\lambda>\lambda_{2n}$ $(n\geqslant 1)$.

4° 存在递减的正序列 η_n,当 $\lambda=\lambda_{2n}$ 和 $\lambda>\lambda_{2n}$ 时存在唯一的、在 $(0,l)$ 上恰有 $2n$ 个零点且 $u'(0)<0$ 的解,当 $\lambda<\lambda_{2n}-\eta_n$ 时不存在这类解,当 $\lambda_{2n}-\eta_n<\lambda<\lambda_{2n}$ 时恰有两个这类解.

当 k 为奇数时这实际上是 §8.2 中的一个特例. 而 k 为偶数时则不是 §8.2 的情形.

[Lin 1] 也提供了应用相图法的一个例子.

在 [SW, 2] 中更简单地证明了,齐次 Dirichlet 或 Neumann 边条件下,微分方程 $u''+f(u)=0$ 相应的时间函数是 Morse 函数,并给出某些新的应用.

[ACP] 利用相图法讨论了退化的非线性扩散问题.

[Lin, 2] 利用相图法讨论一个特殊的非保守系统

$$\begin{cases} u''(x)+\frac{1}{x}u'(x)=\frac{l^2}{u'''(x)} \\ u'(0)=0, \quad u(1)=1 \end{cases}$$

的全局分叉,这个问题的相图法与我们这里所说的相图法是不同的.

[ZhQ]吸收相图法的某些思想,利用解的对称性与单调性,将一个非保守系统的边值问题

$$\begin{cases}(u'')'' + (a - x^2)u = 0\\ u(\pm L) = 0\end{cases}$$

的求解转化为证明算子存在不动点。

[BC] 利用相图法证明了，在适当条件下，

$$\begin{cases}u'' + f(u) = 0\\ u(0) = u(l) = 0\end{cases}$$

的解是双曲的。若 $u = \varphi(x)$ 是上述边值问题的解，且 0 不是线性算子

$$v \to v'' + \lambda f(\varphi(x))v$$

的特征值，称 $\varphi(x)$ 是双曲的。

习　题　八

8.1. 设 $f(u) = -u(u-b)(u-c)$ $(0<b<c)$，

$$\int_0^c f(u)du \leqslant 0$$

(1) 画出

$$u'' + f(u) = 0$$

的相图。

(2) 由相图你能对边值问题

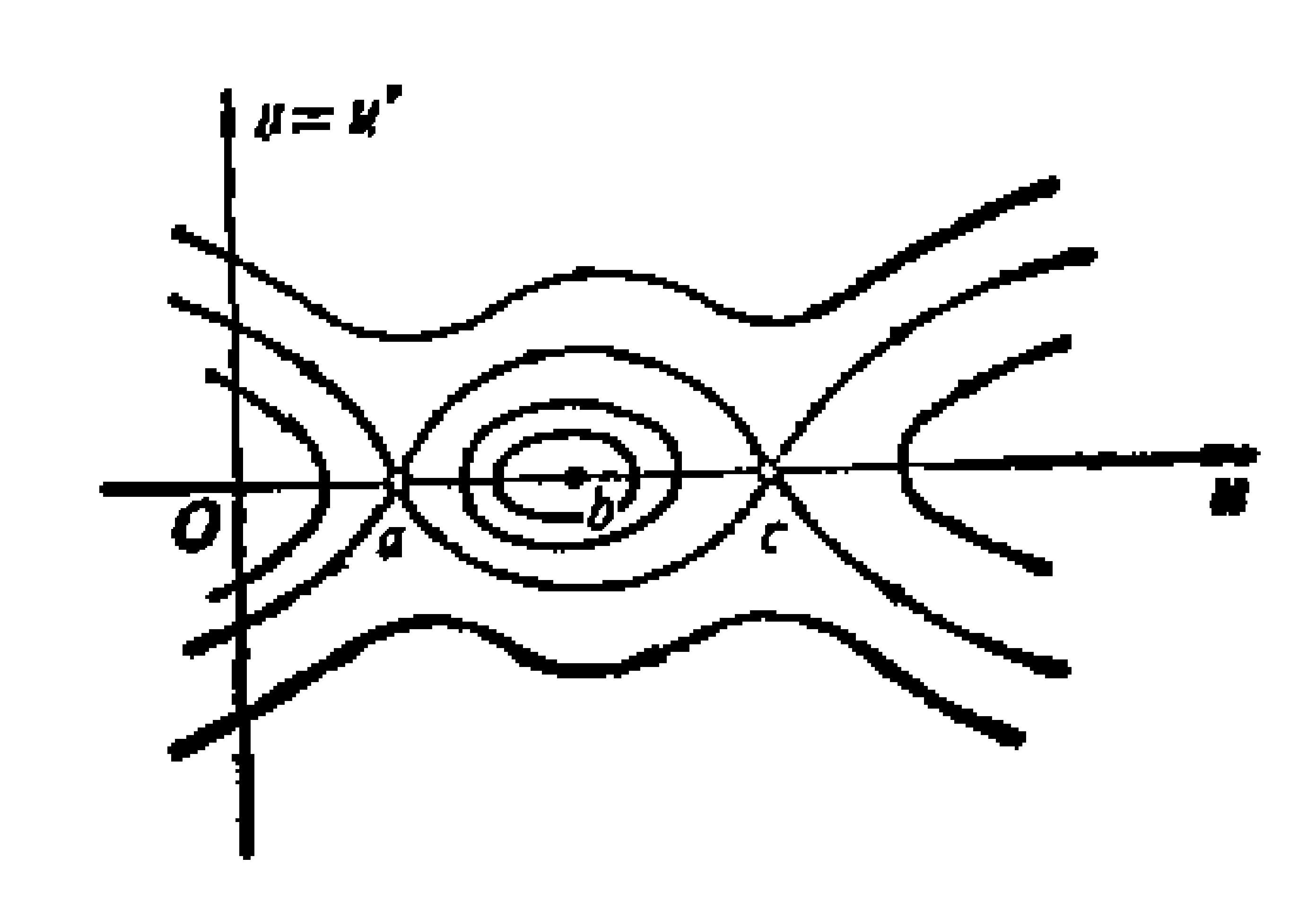
$$\begin{cases}u'' + f(u) = 0\\ u(0) = u(l) = 0 \quad (l>0)\end{cases}$$

给出什么结论？

8.2. 设 $f \in C^1$，方程

$$u'' + f(u) = 0$$

有如下相图



其中 $(a, 0)$，$(b, 0)$，$(c, 0)$ 为系统的全部奇点。由此相图你能对边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \quad (l>0) \end{cases}$$

给出什么结论？

8.3. 设参数 $\lambda \geqslant 0$，请指出边值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda(u - u^3) = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

的分支结构。

8.4. 设 $f(u) = -(u-a)(u-b)(u-c) \quad (0<a<b<c)$，

$$\int_a^c f(u)du \leqslant 0$$

证明边值问题。

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \quad (l>0) \end{cases}$$

有唯一解且是正解。

8.5. 设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$，$b>0$，$f(b) = 0$，$f(u) \neq 0 \ (u \neq b)$，$f'(u)<0$ $(u \in (0, b])$。求证边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \quad (l>0) \end{cases}$$

存在唯一解而且是正解。

8.6. 设 $g(w) \in C^1(\mathbb{R})$，$a<0$，$g(a) = 0$，$g(w) \neq 0 (w \neq a)$，$g'(w)<0$ $(w \in [a, 0))$。求证边值问题。

$$\begin{cases} w'' + g(w) = 0 \\ w(0) = w(l) = 0 \quad (l>0) \end{cases}$$

存在唯一解而且是负解。

8.7. 设 $g(w) \in C^1(\mathbb{R})$，$g(\beta) = 0$，$g(w) \neq 0 \ (w \neq \beta)$，$\beta \neq \alpha$，$w$在 α 与 β之间时 $g'(w)<0$。求证边值问题：

$$\begin{cases} w'' + g(w) = 0 \\ w(0) = \alpha, \ w'(l) = 0 \quad (l>0) \end{cases}$$

存在唯一解。

8.8. 设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$，$b>0$，$f(b) = 0$，$f(u)(u-b)<0 \ (u \neq b)$，$a>b$。求证边值问题。

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0 \\ u(0) = 0,\ u(l) = \alpha \quad (l>0) \end{cases}$$

存在唯一解且是正解。

8.9. 考察方程

$$u'' + \lambda u - u^2 = 0 \tag{A}$$

及边值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u - u^2 = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{B}$$

其中 $\lambda \in R^1$。方程 (A) 的轨线方程是

$$v^2 = 2[E - F(u)]$$

其中 $v = u'$，

$$F(u) = \int_0^u (\lambda s - s^2)ds = \frac{1}{3}u^2\left(\frac{3}{2}\lambda - u\right)$$

从正(负) v 轴上出发的轨线与正(负) u 轴的第一次交点是 $(m_+(E),\ 0)$ $(m_-(E), 0)$。

(1) 画出 $u'' + \lambda u - u^2 = 0$ 的相图。

(2) $\lambda>0$ 时证明

$$0<m_+(E)<\lambda \ \left(0<E<E^* = \frac{1}{6}\lambda^3\right)$$

$$\lim_{E\to 0+} m_+(E) = 0, \quad \lim_{E\to E^*_-} m_+(E) = \lambda$$

$$\frac{dm_+(E)}{dE}>0$$

(3) 证明

$$m_-(E) < \min(0,\ \lambda)$$

$$\lim_{E\to+\infty} m_-(E) = -\infty$$

$$\lim_{E\to 0+} m_-(E) = \begin{cases} 0, & \lambda\geqslant 0 \\ \frac{3}{2}\lambda, & \lambda<0 \end{cases}$$

$$\frac{dm_-(E)}{dE}<0$$

(4) 确定时间函数 $T_+(E)$ 与 $T_-(E)$ 的定义域并证明

$$T_\pm(E) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)\left[\lambda(1+t) - \frac{2}{3}m_\pm(E)(1+t+t^2)\right]}}$$

(5) 证明 $T_+(E)$ 是 E 的严格增函数，$T_-(E)$ 是 E 的严格减函数。

(6) 证明

$$\lim_{E\to 0+} T_{\pm}(E) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \quad (\lambda>0)$$

$$\lim_{E\to 0+} T_-(E) = +\infty \quad (\lambda\leqslant 0)$$

$$\lim_{E\to E^{*}_{m0}} T_+(E) = +\infty \quad (\lambda>0)$$

$$\lim_{E\to +\infty} T_-(E) = 0$$

(7) 证明边值问题 (B) 有唯一正解的充要条件是：$\lambda>1$，有唯一负解的充要条件是 $\lambda<1$。

第九章　抽象理论——解析半群与非线性方程的初值问题

本章我们在 Banach 空间 X 中研究包括常微分方程和许多半线性抛物型方程在内的一类抽象非线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u) \\ u(t_0) = x \end{cases}$$

其中 $A: D(A) \to X$ 是某类线性算子（可以是无界的），$x \in X$，$D(A) \subset X$。

先引进必要的工具(解析半群、扇形算子、分数幂算子与分数幂空间)，然后讨论抽象方程的初值问题。

在讨论抽象方程时，先讨论线性方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t) \\ u(t_0) = x \end{cases}$$

然后讨论非线性的情形。在处理抽象方程与具体的半线性抛物型方程的关系时，先讨论一般的抽象理论，然后举例说明，怎样把具体的半线性抛物型方程的初边值问题化为抽象的非线性微分方程的初值问题。

在考虑 Banach 空间 X 上的抽象微分方程时，我们的研究对象当然是定义在 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ ($t_0 > -\infty$, $T \leqslant +\infty$) 上取值在 X 的抽象函数 $u(t) \in X$ ($\forall t \in [t_0, T]$)。要考虑 $u(t)$ 的导数，积分等等，即所谓 Banach 空间上的分析。有关这方面的预备知识读者可参考 [Gu]。

9.1 线性齐次方程的初值问题与 C_0 半群

设 X 是 Banach 空间，先在 X 中考察微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=\theta(t>0)\\ u(0)=x\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 A 是从 $D(A)\subset X$ 到 X 的线性算子，$x\in X$ 是任意给定的。

定义 9.1.1 取值于 X 的函数 $u(t)(t\geqslant 0)$，若

1° $t\geqslant 0$ 时连续；

2° $t>0$ 时 $u(t)$ 是连续可微的，$u(t)\in D(A)$ 且满足(1.1)；

则称 $u(t)$ 是(1.1)的解(古典解)。有时记作 $u(t;x)$ 以表示与初值 x 相应的(1.1)的解。

引理 9.1.2 若对任意给定的 $x\in X$，在 $0\leq t<+\infty$ (1.1)有唯一解 $u(t,x)$，它连续依赖于初值 x，定义 $T(t)x=u(t;x)$，则对于 $t\geqslant 0$，$T(t):X\to X$ 是有界线性算子族，满足：

1° $T(0)=I$(I 为恒同算子)；

2° 对任意 $t,s\geqslant 0$，

$$T(t+s)=T(t)T(s)\tag{1.2}$$

3° 对任意 $x\in X$，$T(t)x$ 对 $t\geqslant 0$ 连续。

证明 只须注意，若 $u(t;x)$ 满足

$$\frac{du(t;x)}{dt}+Au(t;x)=\theta$$

则

$$\frac{du(t+s;x)}{dt}+Au(t+s,x)=\theta$$

再利用唯一性假定即可得证。

后面将证明，对于有界线性算子族 $T(t)$，满足(1.2)等价于满足

$$\left.\begin{array}{l}1^\circ\ T(0)=I;\\ 2^\circ\quad 对\ \forall t,s\geqslant 0, T(s+t)=T(s)T(t);\\ 3^\circ\quad 对\ \forall x\in X, \lim\limits_{t\to 0+}T(t)x=x.\end{array}\right\}\qquad(1.3)$$

定义 9.1.3 对 $0\leq t<+\infty$, $T(t):X\to X$ 是有界线性算子族,满足(1.3),则称 $T(t)$ 是 X 上的有界线性算子的强连续半群,简称为 C_0 半群.

这样,我们立即得到

引理 9.1.4 在引理 9.1.2 的条件下,(1.1) 的解 $u(t;x)=T(t)x$ 确定一个 C_0 半群 $T(t)$.

讨论(1.1)的解与讨论 C_0 半群有很大关系. 我们的目的是由 A 去确定 C_0 半群 $T(t)$,使得 $T(t)x$ 是 (1.1) 的解. 为此,我们来讨论 $T(t)$ 的性质.

先给出 C_0 半群的一个估计式.

定理 9.1.5 设 $T(t)$ 是 C_0 半群,则存在常数 ω 和 $M\geqslant 1$ 使得

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}(t\geqslant 0)$$

证明 先证存在 $\eta>0$,当 $0\leq t\leqslant\eta$ 时 $\|T(t)\|$ 有界. 若不然,则存在 $t_n\to 0+$, $\|T(t_n)\|\geqslant n$. 由共鸣定理知,存在 $x\in X$, $\|T(t_n)x\|$ 无界,这与 $\lim\limits_{t\to 0+}T(t)x=x$ 矛盾了. 因此存在 M,当 $0\leq t\leqslant\eta$ 时 $\|T(t)\|\leqslant M$. 显然 $M\geqslant 1$.

对任意 $t\geqslant 0$,有 $t=n\eta+\delta$,其中 n 为非负整数,$0\leq\delta<\eta$. 于是

$$\|T(t)\|=\|T(n\eta+\delta)\|=\|T(\delta)T^n(\eta)\|$$

$$\leqslant MM^n\leqslant M\cdot M^{\frac{t}{\eta}}$$

令 $\omega=\eta^{-1}\ln M$,得

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}\ (t\geqslant 0)$$

证毕.

定理 9.1.6 设 $T(t)$ 是 C_0 半群,则对 $\forall x\in X$, $T(t)x$ 对

$s \geqslant 0$ 连续.

证明 $\max(s,t)=\min(s,t)+|s-t|$,

记

$$\alpha=\min(s,t),\ \beta=|s-t|$$

则 $\max(s,t)=\alpha+\beta$,

$$\|T(s)x-T(t)x\|=\|T(\alpha+\beta)x-T(\alpha)x\|$$
$$\leqslant\|T(\alpha)\|\|T(\beta)x-x\|$$

由此立即得证。

若对任意 $x\in X$, (1.1) 有唯一解 $u(t;x)=T(t)x$, 它连续依赖于 x, 则它确定 C_0 半群, 且

$$\frac{dT(t)x}{dt}=-AT(t)x$$

于是

$$\lim_{h\to0+}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x=-AT(t)x$$

引进如下定义:

定义 9.1.7 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 并有算子 B,

$$D(B)=\left\{x\,\middle|\,x\in X,\ \lim_{h\to0+}\frac{T(h)x-x}{h}\text{存在}\right\}$$

$$Bx=\lim_{h\to0+}\frac{T(h)x-x}{h}=\left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0}$$

$$(x\in D(B))$$

称 B 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元(或生成算子).

显然, B 是线性的, 但不一定有界. Bx 即 $T(t)x$ 在 $t=0$ 处的右导数.

对于 C_0 半群 $T(t)$, 我们将证明: $T(t)x$ 在 $t=0$ 右可导保证了当 $\forall t>0$ 时 $T(t)x$ 可导.

下面我们来讨论 C_0 半群的积分与微分性质.

定理 9.1.8 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，B 是它的无穷小生成元，则

1° 当 $x\in X$，$t>0$ 时

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)xds=T(t)x$$

$t=0$ 时

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds=x$$

2° 当 $x\in X$，$t\geqslant 0$ 时 $\int_0^t T(s)xds\in D(B)$ 且

$$B\left(\int_0^t T(s)xds\right)=T(t)x-x$$

3° 对 $x\in D(B)$，$t\geqslant 0$，有 $T(t)x\in D(B)$ 且

$$\frac{dT(t)x}{dt}=BT(t)x=T(t)Bx$$

4° 对 $x\in D(B)$，t，$s\geqslant 0$ 有

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t BT(\tau)xd\tau$$

$$=\int_s^t T(\tau)Bxd\tau$$

证明 证明 1°

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)xds-T(t)x\right\|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\right|\left|\int_t^{t+h}\|T(s)x-T(t)x\|ds\right|$$

再由 $T(t)x$ 对 t 的连续性得证。

证明 2°

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds=\frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)xds$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds$$

令 $h\to 0+$，利用 1° 得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds=T(t)x-x$$

证明 3° 设 $x\in D(B)$，$h>0$，则当 $t\geqslant 0$ 时

$$\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}=\frac{T(h)-I}{h}T(t)x$$

$$=T(t)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right)\to T(t)Bx\ (h\to 0+)$$

由此又得 $T(t)x\in D(B)$，

$$BT(t)x=T(t)Bx,\ \frac{d^+T(t)x}{dt}=BT(t)x=T(t)Bx$$

又

$$\left\|\frac{T(t)-T(t-h)}{h}x-T(t)Bx\right\|$$

$$=\left\|T(t-h)\left[\frac{T(h)x-x}{h}-Bx\right]\right.$$

$$\left.+T(t-h)Bx-T(t)Bx\right\|$$

$$\leqslant M\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Bx\right\|+\|T(t-h)Bx$$

$$-T(t)Bx\|\to 0\ (h\to 0+)$$

于是

$$\frac{d^-T(t)x}{dt}=T(t)Bx$$

因此，当 $x\in D(B)$，$t\geqslant 0$ 时

$$\frac{dT(t)x}{dt}=T(t)Bx=BT(t)x$$

证明 4° 由 3° 从 s 到 t 积分即得。证毕。

推论 9.1.9 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，B 是它的无穷小生成元，则 B 是闭稠定线性算子。

证明　显然 B 是线性的：对 $\forall x\in X$，令 $x_t=\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$ $(t>0)$，由定理 9.1.8 的 2°，1°，$x_t\in D(B)$ 且 $t\to 0+$ 时 $x_t\to x$。因此 $\overline{D(B)}=X$。又设 $x_n\in D(B)$，当 $n\to+\infty$ 时 $x_n\to x$ 且 $Bx_n\to y$，由定理 9.1.8 的 4°，

$$T(t)x_n-x_n=\int_0^t T(s)Bx_nds$$

当 $n\to+\infty$ 时右端的被积函数在有限区间上是一致收敛的，所以

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)yds$$

两边除以 t，再令 $t\to 0+$ 得 $x\in D(B)$ 且 $Bx=y$，即 B 是闭的。证毕。

下面我们将证明：若 $T(t)$ 是 C_0 半群，以 $-A$ 为无穷小生成元，则对 $\forall x\in D(A)$，$u(t;x)=T(t)x$ 满足：

$$\left.\begin{array}{l}
1^\circ\ u:[0,+\infty)\to X \text{ 连续可微，}\\
2^\circ\ \dfrac{du}{dt}+Au=\theta(t\in[0,+\infty)),\\
3^\circ\ u(0)=x,\\
4^\circ\ u \text{ 是唯一的满足 } 1^\circ\text{—}3^\circ \text{ 的函数，}\\
5^\circ\ u \text{ 连续依赖于 } x\text{，关于 } t\in[0,+\infty)\text{的任一紧集是}\\
\text{一致的。}
\end{array}\right\}\quad(1.4)$$

定义 9.1.10　设 X_0 是 X 的线性子空间，若对 $\forall x\in X_0$，存在函数 $u:[0,+\infty)\to D(A)$ 满足(1.4)，则称初值问题(1.1)对 A 关于 X_0 是适定的。

定理 9.1.11　设 A 是 X 中的闭稠定线性算子，则初值问题(1.1)对 A 关于 $D(A)$ 是适定的充要条件是：存在 C_0 半群 $T(t)$，它的无穷小生成元 $\supseteq(-A)$。这时，对 $\forall x\in D(A)$，$u=T(t)x$ 是 (1.1) 的唯一解。

证明充分性。设 $T(t)$ 是 C_0 半群，以 $-A$ 为无穷小生成元。令 $u=T(t)x$，显然 u 满足(1.4)中的 1°—3°，现又设 $v(t)$

是(1.1)的任意一个解，令

$$w(t,s)=T(t-s)v(s)$$

则

$$\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}=-T(t-s)Av(s)$$
$$+T(t-s)Av(s)=0\ (0<s<t)$$

又 $w(t,s)$ 在 $0\leq s\leq t$ 连续，因此，

$$w(t,t)=w(t,0)$$

即

$$v(t)=T(t)x$$

(1.4)中的4°得证。因 $u(t;x)=T(t)x$，对 $\forall x,y\in D(A)$

$$\|u(t;x)-u(t;y)\|\leq\|T(t)\|\|x-y\|\leq Me^{\omega t}\|x-y\|$$

所以 u 满足(1.4)中的5°，充分性得证。

证明必要性。设(1.1)对 A 关于 $D(A)$ 是适定的。对 $\forall x\in D(A)$，由(1.1)确定唯一解 $u(t;x)$。定义

$$\hat{T}(t)x=u(t;x)\ (\forall x\in D(A))$$

$\hat{T}(t)$ 是 $D(A)$ 上的有界线性算子，$\overline{D(A)}=X$，存在唯一有界线性算子 $T(t):X\to X$，它是 $\hat{T}(t)$ 的延拓。显然，对 $\forall x\in D(A)$

$$\hat{T}(0)x=x,\ \hat{T}(t+s)x=\hat{T}(t)\hat{T}(s)x\quad(\forall t,s\geqslant0)$$

因 $\overline{D(A)}=X$，由此可得

$$T(0)=I,\ T(t+s)=T(t)T(s)\quad(\forall t,s\geqslant0)$$

现再证

$$\lim_{t\to0^+}\|T(t)x-x\|=0$$

由适定性定义，$\forall\eta>0$，$\exists\delta_\eta>0$，当 $y\in D(A)$，$\|y\|\leqslant\delta_\eta$，$t\in[0,T]$ 时

$$\|\hat{T}(t)y\|=\|u(t;y)\|<\eta$$

于是，对 $\forall y\in D(A)$，$y\neq\theta$，当 $t\in[0,T]$ 时

$$\left\|\hat{T}(t)\frac{y}{\|y\|}\delta_\eta\right\|<\eta$$

即
$$\|\hat{T}(t)y\| < \eta\delta_\eta^{-1}\|y\|$$
$\hat{T}(t)$ 作为 $D(A)$ 到 $D(A)$ 的有界线性算子，其范数
$$\|\hat{T}(t)\| \leqslant \eta\delta_\eta^{-1}$$
$T(t)$ 作为X到X的有界线性算子，其范数为 $\|T(t)\|$，则
$$\|T(t)\| \leqslant \|\hat{T}(t)\| \leqslant \eta\delta_\eta^{-1}$$
因此，存在常数 M_T，当 $t\in[0,T]$ 时 $\|T(t)\| \leqslant M_T$。

$\forall x\in X$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists y\in D(A)$ 使得
$$\|y-x\| < \frac{\varepsilon}{3}, \|T(t)x-T(t)y\| < \frac{\varepsilon}{3}\ (t\in[0,T])$$
对此 y，$\exists\tau>0$，当 $t\in[0,\tau]$ 时
$$\|T(t)y-y\| = \|\hat{T}(t)y-y\| < \frac{\varepsilon}{3}$$
于是，当 $t\in[0,\tau]$ 时
$$\|T(t)x-x\| \leqslant \|T(t)x-T(t)y\| + \|T(t)y - y\| + \|y-x\| < \varepsilon$$
即 $\lim\limits_{t\to0+}\|T(t)x-x\| = 0$。$T(t)$ 为 C_0 半群。

对 $\forall x\in D(A)$，当 $h\to0+$ 时
$$\frac{1}{h}[T(h)x-x] = \frac{1}{h}[u(h;x)-x] \to \left.\frac{d^+u}{dt}\right|_{t=0} = -Ax$$
即 $T(t)$ 的无穷小生成元 $\supseteq(-A)$. 证毕。

若 $T(t)$ 是 C_0 半群，以 $-A$ 为无穷小生成元，则当 $x\in X$ 而 $x\bar{\in}D(A)$ 时，初值问题(1.1)不一定有解。这时可引进广义解。

定义 9.1.12 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，以 $-A$ 为无穷小生成元，对 $x\in X$，称 $T(t)x$ 为(1.1)的广义解(或叫适度解)。

讨论 (1.1) 的古典解或广义解的存在唯一性与讨论由无穷小生成元去确定 C_0 半群是密切相关的。

9.2 线性算子是 C_0 半群的无穷小生成元的充要条件

现在考虑我们最重要的问题，从闭线性算子 A 去确定 C_0 半群

$T(t)$，使得 $-A$ 是它的无穷小生成元。为此，我们先设 $T(t)$ 是 C_0 半群，以 B 为无穷小生成元，探讨 B 有什么性质，然后指出 B 的哪些特点是本质的，即指出线性算子 B 为 C_0 半群无穷小生成元的充要条件。

推论 9.1.9 已经指出，C_0 半群的无穷小生成元一定是闭稠定线性算子，下面将考察 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元 B 的预解算子 $(\lambda I-B)^{-1}$。

若 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界线性算子对应的 $n\times n$ 矩阵，则

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-t(\lambda I-B)}x\right]=-(\lambda I-B)e^{-t(\lambda I-B)}x$$

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t(\lambda I-B)}x=\theta$，则

$$x=(\lambda I-B)\int_0^{+\infty}e^{-t(\lambda I-B)}x\,dt$$

$$(\lambda I-B)^{-1}x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}e^{tB}x\,dt$$

$$(\lambda I-B)^{-1}x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \tag{2.1}$$

其中 $T(t)=e^{tB}$，以 B 为无穷小生成元。

我们将对一般 C_0 半群 $T(t)$ 证明 (2.1)，为此先引入算子 $R(\lambda)$

$$R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

并讨论其性质。

定理 9.2.1 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，$B$ 是 $T(t)$ 的无穷小生成元，则

(B.1) B 是闭稠定的线性算子；

(B.2) 对任意 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 和自然数 n，$\lambda\in\rho(B)$

$$R(\lambda,B)^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

$$\|R(\lambda,B)^n\|\leqslant\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}$$

其中 $R(\lambda,B)=(\lambda I-B)^{-1}$ 是 B 的预解算子，$\rho(B)$ 是 B 的预解集。

(B.1) 已由推论 9.1.9 给出。(B.2) 的证明分成以下几个引理进行。

引理 9.2.2 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$。则当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，$x\in X$ 时，积分

$$R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)x dt$$

收敛于 X 中的某元素。

证明　只须注意，对任意 $b_2>b_1>0$，

$$\left\|\int_{b_1}^{b_2}e^{-\lambda t}T(t)x dt\right\|\leqslant M\int_{b_1}^{b_2}e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t}dt\cdot\|x\|$$

由此即可得证。

引理 9.2.3 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，$B$ 是 $T(t)$ 的无穷小生成元。则当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 时

$$R(\lambda)=(\lambda I-B)^{-1}$$

是定义在 X 上的有界线性算子且

$$\|R(\lambda)\|=\|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}.$$

证明　对任意 $h>0$，$x\in X$，$\mathrm{Re}\lambda>\omega$，

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x&=\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}[T(t+h)x-T(t)x]dt\\&=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)x dt\\&\quad-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h}e^{-\lambda t}T(t)x dt\end{aligned}$$

令 $h\to 0+$ 时，右端的极限是 $\lambda R(\lambda)x-x$，于是 $R(\lambda)x\in D(B)$ 且

$$BR(\lambda)x=\lambda R(\lambda)x-x$$

即

$$(\lambda I-B)R(\lambda)x=x\quad(x\in X)\qquad(2.2)$$

另一方面，当 $x\in D(B)$ 时

$$R(\lambda)Bx=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)Bxdt$$
$$=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}BT(t)xdt$$

由 B 的闭性能得

$$R(\lambda)Bx=B\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt=BR(\lambda)x$$

因此，由(2.2) 又得

$$R(\lambda)(\lambda I-B)x=x \quad (x\in D(B))$$

这就证明了 $(\lambda I-B)^{-1}=R(\lambda)$ 定义在整个空间 X 上。

进一步有估计式

$$\|R(\lambda)x\|\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-(\mathrm{Re}\lambda-\omega)t}dt\|x\|$$
$$\leqslant\frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}\|x\|$$

即

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}$$

证毕。

引理 9.2.4 在引理 9.2.3 的假定下，则当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 时

$$\frac{d^nR(\lambda,B)x}{d\lambda^n}=(-1)^n\int_0^{+\infty}t^ne^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$\frac{d^nR(\lambda)}{d\lambda^n}=(-1)^nn!R^{n+1}(\lambda)$$

$$R^n(\lambda)x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$\|R^n(\lambda)\|\leqslant\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}$$

证明 对

$$R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

可在积分号下对 λ 求导任意次，并利用预解算子 $R(\lambda, B)$ 的性质：

$$\frac{dR(\lambda, B)}{d\lambda} = -R^2(\lambda, B)$$

然后可归纳证得本引理结论。

由上述引理立即可证定理 9.2.1 的结论 (B.2)。定理 9.2.1 证毕。

定理 9.2.1 的逆定理也成立，即条件 (B.1)，(B.2) 完全决定了 B 是某 C_0 半群的生成元。事实上，我们还可证明：

定理 9.2.5 线性算子 B 是 C_0 半群 $T(t)(\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t})$ 的无穷小生成元的充要条件是：B 满足

(B.1) B 是闭稠定的线性算子；

(B.2) 对 $\forall \lambda > \omega$，有 $\lambda \in \rho(B)$ 且

$$\|R(\lambda, B)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

这个结果通常称为推广的 Hille-Yosida 定理。

当 $M = 1$ 时，我们有

定理 9.2.6 线性算子 B 是 C_0 半群 $T(t)(\|T(t)\| \leqslant e^{\omega t})$ 的无穷小生成元的充要条件是：B 满足

(B.1′) B 是闭稠定的线性算子；

(B.2′) 对 $\forall \lambda > \omega$，有 $\lambda \in \rho(B)$ 且

$$\|R(\lambda, B)\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}$$

定理 9.2.5 与 9.2.6 的必要性已经证明，充分性的证明可参见 [Paz, p.8—13]，这里略去。

现在回到初值问题(1.1)，我们可得到

定理 9.2.7 设 A 满足

(A.1) A 是闭稠定的线性算子；

(A.2) 存在实数 ω 和 $M \geqslant 1$，使得

$$\rho(A) \supset \{\lambda | \lambda < \omega\}$$

且当 $\lambda < \omega$ 时

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\omega - \lambda)^n}$$

或

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\omega - \lambda}$$

则(1.1)对 A 关于 $D(A)$ 是适定的。

现在自然有两个问题，一是对给定的线性算子 A，怎知它满足 (A.1) 和 (A.2)；另一是，怎样才能保证对 $\forall x \in X$ (不仅是 $x \in D(A)$),(1.1) 有唯一解。这些都是我们后面要考虑的问题。

9.3 解析半群与扇形算子

9.3.1 解析半群与初值问题的解

若 $T(t)$ 是X上的 C_0 半群,以 $-A$ 为无穷小生成元,则只能保证对任意 $x \in D(A)$, (1.1) 有解 $u(t; x) = T(t)x$。为了对任意 $x \in X$ 可求得(1.1)的解,我们考察可微半群与解析半群。

定义 9.3.1 设 $T(t)$ 是 Banach 空间X上的 C_0 半群，若对 $\forall x \in X$, $t \to T(t)x$, 对任意 $t > 0$ 可微，则称 $T(t)$ 是可微半群。

定义 9.3.2 X上的一族有界线性算子 $T(t)$，它们满足:

1° 对 $\forall x \in X$, $t \to T(t)x$ 在 $0 < t < +\infty$ 是实解析的;

2° $T(0) = I$, 对 $\forall x \in X$, $\lim\limits_{t \to 0+} T(t)x = x$;

3° 对 $\forall t, s \geqslant 0$, $T(t+s) = T(t)T(s)$。

则称 $T(t)$ 是实解析半群。

定义 9.3.3 设 $\Delta = \{z \mid \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$，对 $\forall z \in \Delta$, $T(z)$ 是有界线性算子族,称为解析半群,若

1° $z \to T(z)$ 在 Δ 解析;

2° $T(0) = I$ 是恒同算子,对任意 $x \in X$, $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Delta}} T(z)x = x$;

3° 对 $\forall z_1, z_2 \in \Delta$, $T(z_1+z_2)=T(z_1)T(z_2)$.

定理 9.3.4 设 $T(t)$ 是 X 上的可微半群，以 $-A$ 为无穷小生成元，则对 $\forall x\in X$，(1.1) 有唯一解 $u(t;x)=T(t)x$.

证明 因为 $T(t)$ 可微，所以对 $\forall t>0$，$x\in X$，存在极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(t+h)x-T(t)x}{h}$，于是 $T(t)x\in D(-A)$，

$$\frac{dT(t)x}{dt}=-AT(t)x$$

对 $\forall t>0$，可取 s，$t>s>0$，

$$AT(t)x=AT(t-s)T(s)x=T(t-s)AT(s)x$$

由此得 $\dfrac{dT(t)}{dt}$ 连续. 因此，$u(t;x)=T(t)x$ 是(1.1)的解. 类似于定理 9.1.11 可证唯一性. 证毕.

推论 9.3.5 若 $-A$ 是解析半群的无穷小生成元，则对任意 $x\in X$，(1.1) 有唯一解.

9.3.2 可微半群与解析半群的性质

定理 9.3.6 设 $T(t)$ 是可微半群，B 是它的无穷小生成元，则

1° $T(t): X\to D(B^n)$ $(\forall t>0,\ n=1,2,3,\cdots)$，对 $\forall x\in X$，$T(t)x$ 对 $t>0$ 无穷次可微且 $T^{(n)}(t)=B^nT(t)$ 是有界线性算子；

2° 对 $\forall$ 自然数 n，$T^{(n-1)}(t)$ 按算子范数对 $t>0$ 连续；

3° 对 $\forall$ 自然数 n，$T^{(n)}(t)=\left(BT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$.

证明 $n=1$ 时，由假设知，$\forall t>0$，$x\in X$，$T(t)x\in D(B)$，$T'(t)x=BT(t)x$. 因 B 是闭的，$T(t)$ 有界，所以 $\forall t>0$，$BT(t)$ 是闭的. 由闭图象定理，$BT(t)$ 是有界线性算子.

下面估计 $\|T(t_2)x-T(t_1)x\|$. 设当 $0\le t\le 1$ 时 $\|T(t)\|\le M_1$. 对 $\forall t_1,t_2, 0<t_1\le t_2\le t_1+1$，则

$$\|T(t_2)x-T(t_1)x\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}BT(s)x\,ds\right\|$$

$$= \left\|\int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)BT(t_1)x ds\right\|$$
$$\leqslant M_1\|BT(t_1)\|(t_2-t_1)\|x\|$$

即

$$\|T(t_2)-T(t_1)\| \leqslant M_2\|BT(t_1)\|(t_2-t_1)$$

$T(t)$ 按算子范数对 $t>0$ 连续。因此，当 $n=1$ 时结论 1°—3° 成立。

现设对自然数 n，结论 1°—3° 成立。则对 $\forall t>0, x\in X$ 取 $0<s<t$，由 $T(t): X\to D(B^n), T^{(n)}(t)x = B^nT(t)x$，得

$$T^{(n)}(t)x = B^nT(t-s)T(s)x = T(t-s)B^nT(s)x$$

于是 $T^{(n)}(t)x\in D(B)$，即 $T(t)x\in D(B^{n+1})$ 且

$$T^{(n+1)}(t)x = BT(t-s)B^nT(s)x = B^{n+1}T(t)x$$

显然，$B^{n+1}T(t) = B(B^nT(t))$ 是有界线性算子。

再估计，得

$$\|T^{(n)}(t_2)x - T^{(n)}(t_1)x\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} B^{n+1}T(s)x ds\right\|$$
$$= \left\|\int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)B^{n+1}T(t_1)x ds\right\|$$
$$\leqslant M_1M_2(t_2-t_1)\|x\|$$

其中 $\|B^{n+1}T(t_1)\|\leqslant M_2$。因此 $T^{(n)}(t)$ 按算子范数对 $t>0$ 连续。

最后由

$$T^{(n)}(t) = \left(BT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(BT\left(\frac{t-s}{n}\right)T\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$$
$$= \left(T\left(\frac{t-s}{n}\right)BT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = T(t-s)\left(BT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$$

$(0<s\leqslant t)$，得

$$T^{(n+1)}(t) = BT(t-s)\left(BT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$$

令 $s=\dfrac{n}{n+1}t$，得

$$T^{(n+1)}(t)=BT\left(\frac{t}{n+1}\right)\left(BT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n}$$
$$=\left(BT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n+1}$$

因此,对自然数 $n+1$，结论 1°—3° 也成立。证毕。

下面考察解析半群。

定理 9.3.7 设 $T(z)$ 在扇形 $\Delta_{\theta_1}=\{z \mid |\arg z|<\theta_1\}$ 上是解析半群且一致有界,(即存在常数 $M_1>0$，对任意 $z\in\Delta_{\theta_1}$ 有 $\|T(z)\|\leqslant M_1$), B 是 $T(z)$ 的无穷小生成元,则

1° 存在常数 $C>0$，对任意 $\sigma>0$，$\tau\neq 0$，有

$$\|R(\sigma+i\tau,B)\|\leqslant\frac{C}{|\tau|}\tag{3.1}$$

2° 存在 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 和 $M>0$ 使得

$$\rho(B)\supset\sum_\theta=\left\{\lambda \mid |\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}+\theta,\ \lambda\neq 0\right\}$$

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|}\ (\lambda\in\sum_\theta)\tag{3.2}$$

证明 证明 1° 对实数 $z\geqslant 0$，$T(z)$ 是一致有界 C_0 半群 ($\|T(Z)\|\leqslant M_1$)，于是对任意 $x\in X$ 和 $\sigma>0$ 我们有

$$R(\sigma+i\tau,B)x=\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}T(t)x\,dt$$

由 $T(z)$ 的解析性和一致有界性，当 $\tau>0$ 时我们把积分路径从正实轴移到射线 $\{Z=\rho e^{-i\theta'} \mid 0<\rho<+\infty\}$，当 $\tau<0$ 时,移到射线 $\{Z=\rho e^{i\theta'} \mid 0<\rho<+\infty\}$，其中 $0<\theta'<\theta$，则积分值保持不变。当 $\tau>0$ 时，

$$\|R(\sigma+i\tau,B)\|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|e^{-(\sigma+i\tau)\rho(\cos\theta'-i\sin\theta')}\right|\cdot M_1\|x\|d\rho$$
$$\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-\rho(\sigma\cos\theta'+\tau\sin\theta')}M_1\|x\|d\rho$$
$$\leqslant\frac{M_1\|x\|}{\sigma\cos\theta'+\tau\sin\theta'}\leqslant\frac{C}{\tau}$$

当 $\tau<0$ 时，则类似可证。

证明 2° 因为 B 是一致有界 C_0 半群的无穷小生成元，所以对 $\mathrm{Re}\lambda>0$，

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{M_1}{\mathrm{Re}\lambda}$$

又由 1° 证得，当 $\mathrm{Re}\lambda>0$，$\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 时

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{C}{|\mathrm{Im}\lambda|}$$

因此，存在常数 $M_2>0$，

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{M_2}{|\lambda|}\ (\mathrm{Re}\lambda>0)$$

对任意 $\sigma>0$，我们有 $R(\lambda,B)$ 在 $\lambda=\sigma+i\tau$ 的 Taylor 展式

$$R(\lambda,B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^nR(\lambda,B)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=\sigma+i\tau}(\lambda-\sigma-i\tau)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}R(\sigma+i\tau,B)^{n+1}(\sigma+i\tau-\lambda)^n \tag{3.3}$$

当 $\|R(\sigma+i\tau,B)\||\sigma+i\tau-\lambda|\leqslant K<1$ 时此级数收敛，取 $\lambda=\mathrm{Re}\lambda+i\tau$，由(3.1)，得

$$\begin{aligned}&\|R(\sigma+i\tau,B)\||\sigma+i\tau-\lambda|\\&\quad=\|R(\sigma+i\tau,B)\||\sigma-\mathrm{Re}\lambda|\\&\quad\leqslant\frac{C}{|\tau|}|\sigma-\mathrm{Re}\lambda|\end{aligned}$$

于是当 $|\sigma-\mathrm{Re}\lambda|\leqslant\frac{K|\tau|}{C}$ 时级数(3.3)收敛。由于 $\sigma>0$ 和 $K<1$ 是任意的，这就意味着

$$\rho(B)\supset\left\{\lambda\,|\,\mathrm{Re}\lambda\leqslant 0,\ |\mathrm{Re}\lambda|/|\mathrm{Im}\lambda|<\frac{1}{C}\right\}$$

因此，特别有

$$\rho(B)\supset\left\{\lambda\,\middle|\,|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}+\delta,\lambda\neq 0\right\}$$

其中 $\delta=K\operatorname{arctg}\dfrac{1}{C}$ $(0<K<1)$. 在这个区域上

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{1}{1-K}\frac{C}{|\tau|}\leqslant\frac{\sqrt{C^2+1}}{(1-K)}\frac{1}{|\lambda|}=\frac{M}{|\lambda|}$$

证毕。

对于实解析半群 $T(t)$，我们也可证明

定理 9.3.8 设 $T(t)$ 是一致有界(实)解析半群，以 B 为无穷小生成元，则存在 $0<\delta<\dfrac{\pi}{2}$ 和 $M>0$，使得

$$\rho(B)\supset\Sigma_\delta=\left\{\lambda\,\middle|\,|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}+\delta,\lambda\neq 0\right\}$$

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|}\quad(\lambda\in\Sigma_\delta)$$

证明略，可参见 [Er].

对于一般(实)解析半群 $T(t)$，它也是 C_0 半群，于是存在正数 M_1 和实数 a 使得

$$\|T(t)\|\leqslant M_1e^{-at}$$

注意到：

1° $T(t)$ 以 B 为无穷小生成元 $S(t)=e^{at}T(t)$ 以 $B+aI$ 为无穷小生成元，

2° $\lambda\in\rho(B)$，$\lambda+a\in\rho(B+aI)$，

我们立即可得

定理 9.3.9 设 $T(t)$ 是(实)解析半群，$\|T(t)\|\leqslant M_1e^{-at}$，以 B 为无穷小生成元，则存在 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 和 $M>0$，使得

$$\rho(B)\supset\Sigma_\varphi'=\left\{\lambda\,\middle|\,|\arg(\lambda+a)|\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi,\ \lambda+a\neq 0\right\}$$

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda+a|}\quad(\lambda\in\Sigma_\varphi')$$

推论 9.3.10 在定理 9.3.9 中，若 $B=-A$，则

$$\rho(A)\supset S_{a,\varphi}=\{\lambda \mid \varphi\leqslant|\arg(\lambda-a)|\leqslant\pi,\ \lambda\neq a\}$$

$$\|R(\lambda, A)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda-a|}\quad(\lambda\in S_{a,\varphi})$$

9.3.3 扇形算子

我们已证明线性算子 $-A$ 是某个解析半群的无穷小生成元时它一定满足如下条件：

1° A 是 Banach 空间 X 中的闭稠定线性算子。

2° 在复平面 $\mathbf{C}$ 上存在某扇形

$$S_{a,\varphi}=\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{C}, \varphi\leqslant|\arg(\lambda-a)|\leqslant\pi,\ \lambda\neq a\}\subset\rho(A)$$

其中 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 为某常数，a 为某实数(图 9-3.1)。

3° $\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{M}{|\lambda-a|}$ $(\lambda\in S_{a,\varphi})$，$M\geqslant 1$ 为某正数。

而更为重要的问题是，算子 A 满足什么条件时，$-A$ 一定是某解析半群的无穷小生成元。为讨论这个问题，首先要研究满足上述条件的一类算子。

定义 9.3.11 设 Banach 空间 X 中的线性算子 A 满足如上条件 1°,2°,3°，则称 A 为扇形算子，$S_{a,\varphi}$ 为相应的扇形。

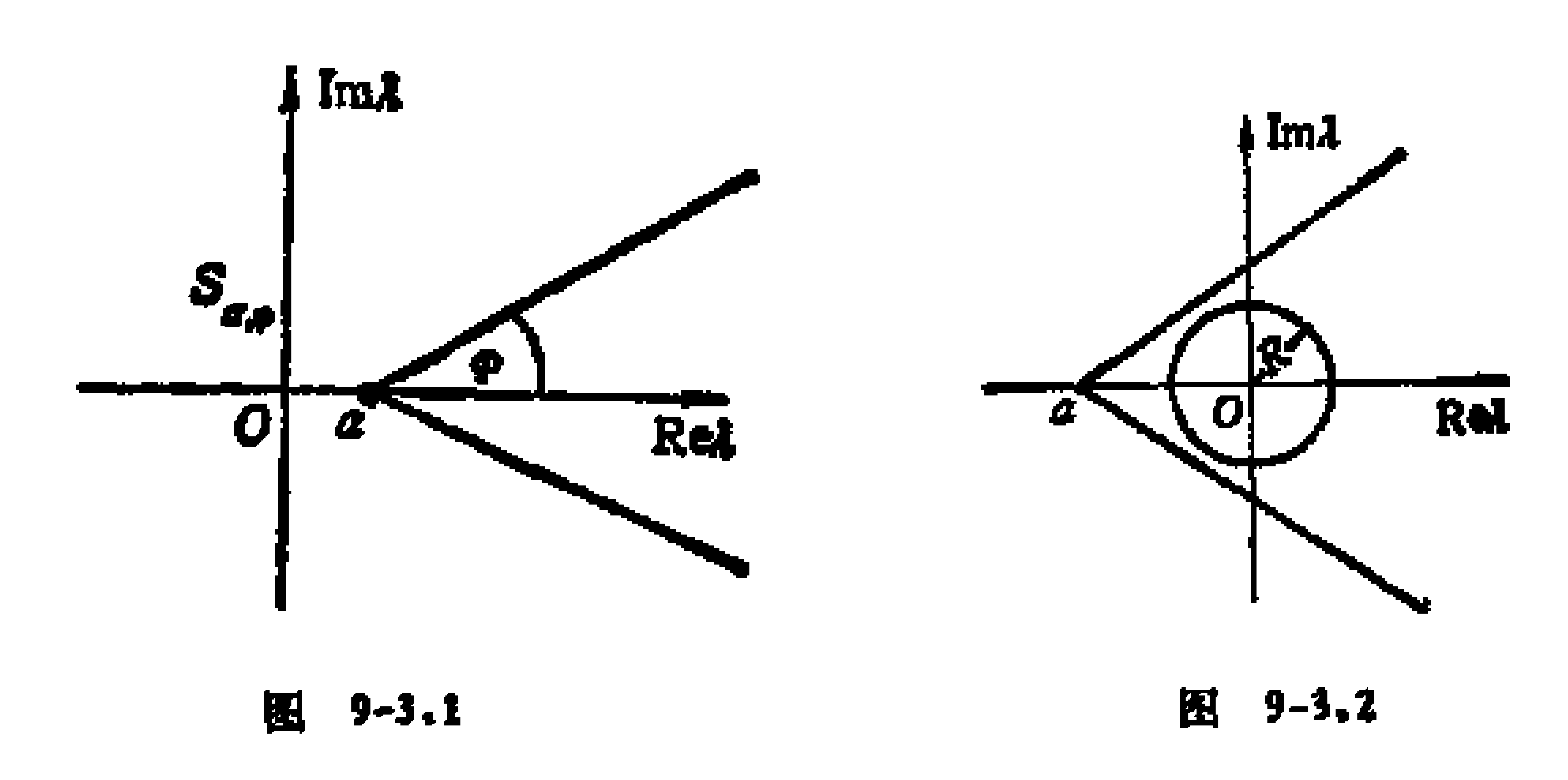


图 9-3.1　　　图 9-3.2

扇形 $S_{a,\varphi}$ 的张角是 $2\pi-2\varphi>\pi$。因为 A 是闭的，当 $\lambda\in\rho(A)$ 时必有 $R(\lambda I-A)=X$，即 $D((\lambda I-A)^{-1})=X$。

由定义易给出一个简单判别法。

引理 9.3.12 设 A 是 Banach 空间 X 上的闭稠定线性算子，满足：存在常数 $R_0>1$，当 $|\lambda|>R_0$ 时 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在，定义域在 X 中稠密，且

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{|\lambda|}$$

M_1 为某正常数，则 A 是扇形算子。

证明 作球 $|\lambda|=R>R_0$，球外属于 $\rho(A)$，并使得

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{|\lambda-a|}\cdot\frac{|\lambda-a|}{|\lambda|}$$

$$\leqslant\frac{M}{|\lambda-a|}\ (|\lambda|>R)$$

在负实轴上可取一定点 a，可作扇形 $S_{a,\varphi}$（图 9-3.2），当 $\lambda\in S_{a,\varphi}$ 时 $|\lambda|>R$，因此 A 是扇形算子。证毕。

下面举几个扇形算子的例子。

例 1 若 A 是 Banach 空间 X 中的有界线性算子，则 A 是扇形算子。

证明 $\lambda I-A=\lambda\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)$，当 $|\lambda|>\|A\|$ 时 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在且 $D((\lambda I-A)^{-1})=X$，当 $\frac{\|A\|}{|\lambda|}\leqslant\alpha_0<1$ 时，

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|=\left\|\lambda^{-1}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\alpha_0}$$

因此，A 是扇形算子。

例 2 若 A 是 Hilbert 空间上的自共轭稠定算子且是下有界的，即存在实数 μ 使得

$$(Ax,x)\geqslant\mu\|x\|^2$$

则 A 是扇形算子。

证明　这时所有非实数属于 $\rho(A)$，又实数 $\lambda<\mu$ 时属于 $\rho(A)$.

现作扇形 $S_{\mu,\varphi}$，则 $\rho(A)\supset S_{\mu,\varphi}$ 过实轴上 $\mathrm{Re}\lambda=\mu$ 处作直线垂直实轴，分 $S_{\mu,\varphi}$ 为两部分，右边为 $S^{(1)}_{\mu,\varphi}$，左边为 $S^{(2)}_{\mu,\varphi}$（图 9-3.3).

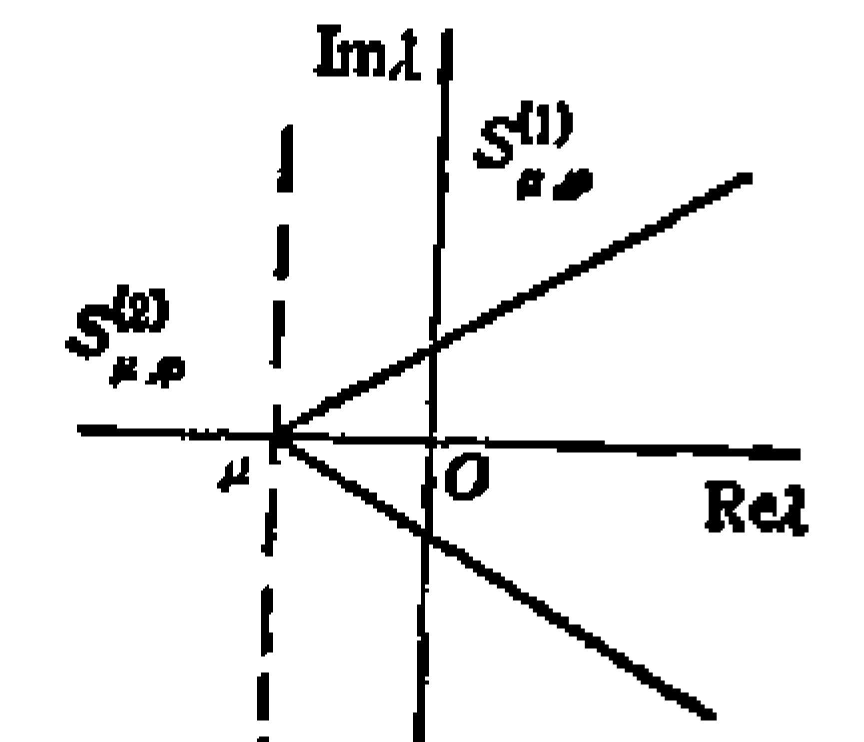


图　9-3.3

当 $\lambda\in S^{(1)}_{\mu,\varphi}$ 时，令 $(\lambda I-A)x=y$，则

$$\begin{aligned}((\lambda I-A)x,x)&=(x,(\lambda I-A)x)\\&=(x,y)\end{aligned}$$

由 $((\lambda I-A)x,x)=(y,x)$，$((\bar\lambda I-A)x,x)=(x,y)$ 得

$$(\lambda-\bar\lambda)(x,x)=(y,x)-(x,y)$$

$$2|\mathrm{Im}\lambda|\,\|x\|^2\leqslant|(y,x)|+|(x,y)|\leqslant2\|x\|\|y\|$$

$$|\mathrm{Im}\lambda|\,\|x\|\leqslant\|y\|$$

即

$$\begin{aligned}\|(\lambda I-A)^{-1}y\|&\leqslant\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\lambda|}\cdot\frac{1}{|\lambda|}\|y\|\\&\leqslant\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{1}{|\lambda|}\|y\|\end{aligned}$$

即

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{1}{|\lambda|}$$

当 $\lambda\in S^{(2)}_{\mu,\varphi}$ 时，

$$\begin{aligned}((\lambda I-A)x,x)&=\lambda(x,x)-(Ax,x)\\&=(\lambda-\mu)\|x\|^2+\mu\|x\|^2-(Ax,x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(\lambda I-A)x\|\|x\|&\geqslant|((\lambda I-A)x,x)|\\&\geqslant|(\lambda-\mu)|\,\|x\|^2\end{aligned}$$

于是

$$\|(\lambda I-A)^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{|\lambda-\mu|}\|y\|$$

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\lambda-\mu|}$$

因此，自然存在扇形 $S_{a,\varphi}$，使得

$$\rho(A)\supset S_{a,\varphi},\ \|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda-a|}(\lambda\in S_{a,\varphi})$$

故A是扇形算子。

例 3 设A是X中的扇形算子，B是Y中的扇形算子，定义

$$(A\times B)\{x,y\}=\{Ax,By\}(x\in D(A),y\in D(B))$$

则$A\times B$是$X\times Y$中的扇形算子。

证明

$$\lambda\{x,y\}-(A\times B)\{x,y\}=\{(\lambda-A)x,(\lambda-B)y\}$$

显然可取共同的扇形 $S_{a,\varphi}$，使得

$$\rho(A)\supset S_{a,\varphi},\ \rho(B)\supset S_{a,\varphi}$$

于是 $\rho(A\times B)\supset S_{a,\varphi}$，又

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda-a|}$$

$$\|(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda-a|}$$

所以

$$\|(\lambda-A\times B)^{-1}\|=\|(\lambda-A)^{-1}\|+\|(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant\frac{2M}{|\lambda-a|}$$

因此，$A\times B$是$X\times Y$中的扇形算子。

最后给出扇形算子的一些性质。

引理 9.3.13 设A是扇形算子，则对任意 $\eta\geqslant 0$，存在 $\varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$及正常数 R_0,C,M_0，使得

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_0}{|\lambda|+\eta},\ \|A(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant C$$

$$(|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0,\ |\lambda|\geqslant R_0)$$

推论9.3.14 设A是扇形算子，则对任意 $\eta\geqslant 0$，存在 $\varphi_0\in$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 及正常数 R_0, M_0, C 使得

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_0}{|\lambda| + \eta}, \ \|A(\lambda + A)^{-1}\| \leqslant C$$

$(|\pi - \arg\lambda| \geqslant \varphi_0, |\lambda| \geqslant R_0)$.

引理 9.3.13 及推论 9.3.14 的证明留作练习。

定理 9.3.15 设 A 是扇形算子，又设 B 是线性算子满足 $D(B) \supset D(A)$ 且对任意 $x \in D(A)$ 有

$$\|Bx\| \leqslant \varepsilon\|Ax\| + K\|x\|$$

其中 ε, K 为正常数，$\varepsilon C < 1$，C 如前一命题所指出，则 $A + B$ 是扇形算子。

证明 将 $\lambda - (A + B)$ 改写成

$$\lambda - (A + B) = [I - B(\lambda - A)^{-1}](\lambda - A)$$

先估计 $\|B(\lambda - A)^{-1}\|$：对任意 $x \in X$，有

$$\|B(\lambda - A)^{-1}x\| \leqslant \varepsilon\|A(\lambda - A)^{-1}x\| + K\|(\lambda - A)^{-1}x\| \leqslant \varepsilon C\|x\| + \frac{KM_0}{|\lambda|}\|x\|$$

于是

$$\|B(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \varepsilon C + \frac{KM_0}{|\lambda|} < 1$$

$$(|\arg\lambda| \geqslant \varphi_0, |\lambda| \geqslant R \geqslant R_0)$$

因此，当 $|\arg\lambda| \geqslant \varphi_0$，$|\lambda| \geqslant R$ 时 $[I - B(\lambda - A)^{-1}]^{-1}$ 是 $X \to X$ 的有界线性算子

$$\|[I - B(\lambda - A)^{-1}]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|B(\lambda - A)^{-1}\|}$$

由

$$[\lambda - (A + B)]^{-1} = (\lambda - A)^{-1}[I - B(\lambda - A)^{-1}]^{-1}$$

可得 $[\lambda - (A + B)]^{-1}$ 定义于X且

$$\|[\lambda - (A + B)]^{-1}\| \leqslant \|(\lambda - A)^{-1}\|\|[I - B(\lambda - A)^{-1}]^{-1}\| \leqslant \frac{M_0}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \|B(\lambda - A)^{-1}\|} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}$$

$(|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0,\ |\lambda|\geqslant R)$. 易证 $A+B$ 是闭稠定的. 因此, 由引理 9.3.12 知, $A+B$ 是扇形算子.

推论 9.3.16 若 A 是扇形算子, B 是有界线性算子, $D(B)\supset D(A)$, 则 $A+B$ 是扇形算子.

推论 9.3.17 若 A 是扇形算子, 则 $\lambda I+A$ 是扇形算子.

9.3.4 由扇形算子确定解析半群

本节将证明扇形算子 A 能确定一解析半群 $T(t)$, 使得 $-A$ 是它的无穷小生成元. 由此可得, 对任意 $x\in X$, 初值问题 (1.1) 存在唯一解.

我们将从

$$R(\lambda;-A)x=(\lambda+A)^{-1}x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

的逆变换得到解析半群. 引进

$$e^{-tA}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda & (t>0)\\ I & (t=0)\end{cases}\tag{3.4}$$

其中 Γ 是 $\rho(-A)$ 中的积分路径, $i=\sqrt{-1}$, 证明它确定一个解析半群, 以 $-A$ 为无穷小生成元.

定理 9.3.18 设 A 是扇形算子, 相应的扇形为 $S_{a,\varphi}$, Γ 是 $\rho(-A)$ 中的一条围道, 对某个 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 当 $|\lambda|\to\infty$ 时满足 $\arg\lambda\to\pm\theta$, $e^{-t\lambda}$ 由(3.4)定义, 则

1° 对任意 $t>0$, e^{-tA} 收敛, 是 X 上的有界线性算子族且积分与 Γ 的选择无关;

2° 存在常数 $C>0$, 对一切 $t>0$ 有

$$\|e^{-tA}\|\leqslant Ce^{-at},\ \|Ae^{-tA}\|\leqslant\frac{C}{t}e^{-at}$$

3° e^{-tA} 是解析半群, 以 $-A$ 为无穷小生成元, 并且 e^{-tA} 可以解析地开拓到一个包括正实轴在内的扇形 $\{t\,|\,|\arg t|<\varepsilon,t\neq0\}$ 中去;

4° 对 $t>0$，$\forall x\in X$ 有

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}=-Ae^{-tA},\quad \frac{d}{dt}e^{-tA}x=-Ae^{-tA}x$$

为证这个定理，先叙述一个引理。

引理 9.3.19 设 $B=A-aI$，则

1° $\rho(A)\supset S_{a,\varphi}$，$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{M}{|\lambda-a|}$ $(\lambda\in S_{a,\varphi})$

等价于

$$\rho(B)\supset S_{0,\varphi},\ \|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|}\ (\lambda\in S_{0,\varphi})$$

2° 若 e^{-tA} 或 e^{-tB} 收敛，则

$$e^{-tA}=e^{-tB}e^{-ta}$$

证明留给读者。

由引理 9.3.19 知，我们只须对 $a=0$ 来证明定理 9.3.18。

当 $a=0$ 时积分路径可以如图 9-3.4 所示。

证明定理 9.3.18 的 1°。

设 l 是两条 Γ 积分路径之间，以原点为心，R 为半径的圆弧段，则对任意 $t>0$，

$$\left\|\int_l(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right\|\leqslant M_1\int_l\frac{1}{R}e^{tR\cos\theta'}|d\lambda|$$

其中 θ' 是常数，$\cos\theta'<0$，于是

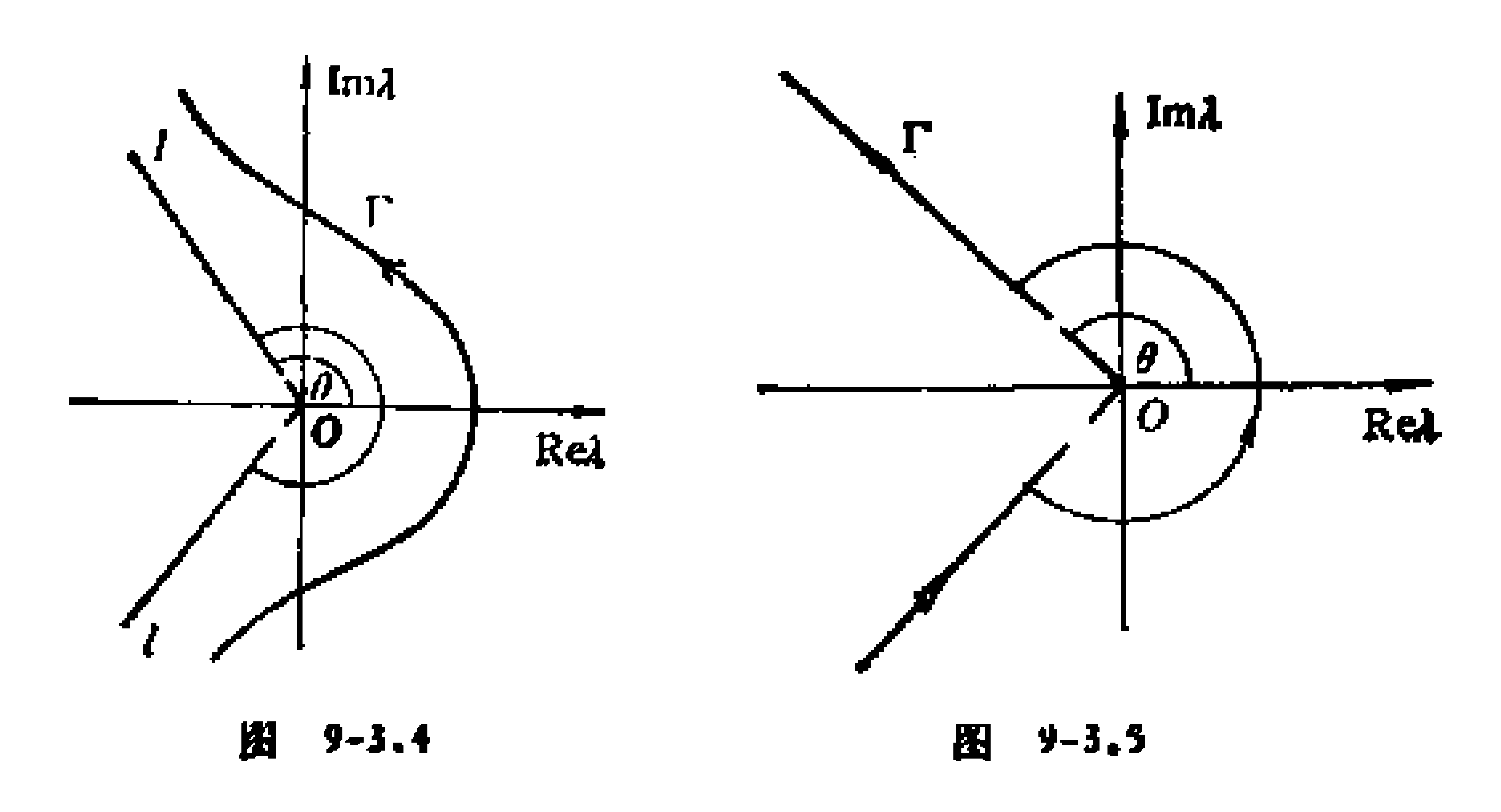


图 9-3.4　　　　图 9-3.5

$$\lim_{R\to\infty}\int_l (\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda=0$$

再由被积函数的解析性得到积分与Γ的选择无关。

现取积分路径如图 9-3.5。当 $r_0>0$ 时

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{1}{r}e^{tr\cos\theta}dr$$

$$\int_{r_0}^{+\infty}\frac{1}{r}e^{tr\cos(-\theta)}dr$$

收敛,其中 $\cos\theta<0$,因此,当 $t>0$ 时积分

$$\int_\Gamma(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

绝对收敛;且确定一个有界线性算子,显然,它的值域属于 $D(A)$。

证明定理 9.3.18 的 2°。

在 e^{-tA} 的积分中令 $\mu=\lambda t(t>0)$,相应地Γ变成Γ'。得

$$\|e^{-tA}\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_\Gamma e^\mu\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}\right\|$$

$$\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma'}|e^\mu|\frac{|d\mu|}{|\mu|}\leqslant C$$

由 $(\lambda+A)(\lambda+A)^{-1}=I$,并在积分中令 $\mu=\lambda t$ 得

$$Ae^{-tA}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\lambda(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

$$\|Ae^{-tA}\|\leqslant\frac{M_1}{t}\int_{\Gamma'}|e^\mu||d\mu|\leqslant\frac{C}{t}$$

证明定理 9.3.18 的 3°与 4°。

先证半群性质。由预解式性质

$$(\lambda+A)^{-1}(\mu+A)^{-1}=(\mu-\lambda)^{-1}[(\lambda+A)^{-1}-(\mu+A)^{-1}]$$

并将积分路径由Γ往右移得Γ',于是

$$e^{-tA}e^{-sA}=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\int_{\Gamma'}(\lambda+A)^{-1}(\mu+A)^{-1}e^{\lambda t+\mu s}d\mu d\lambda$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\int_{\Gamma'}[(\lambda+A)^{-1}$$

$$-(\mu+A)^{-1}](\mu-\lambda)^{-1}e^{\lambda t+\mu s}d\mu d\lambda$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}\int_{\Gamma'}(\mu-\lambda)^{-1}e^{\mu s}d\mu\cdot d\lambda$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma'}(\mu+A)^{-1}e^{\mu s}\int_\Gamma(\mu-\lambda)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\mu-\lambda)^{-1}e^{\mu s}d\mu=e^{\lambda s}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu-\lambda)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda=0$$

所以

$$e^{-tA}e^{-sA}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda+A)^{-1}e^{\lambda(t+s)}d\lambda=e^{-A(t+s)}$$

其次证明：对 $\forall x\in X,\lim\limits_{t\to0+}e^{-tA}x=x$。因为 $\|e^{-At}\|\leqslant C$，又 $\overline{D(A)}=X$，所以只要对任意 $x\in D(A)$ 来证明就够了。

若 $x\in D(A)$，$t>0$，则

$$e^{-tA}x-x=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}[(\lambda+A)^{-1}-\lambda^{-1}]xd\lambda$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma\lambda^{-1}e^{\lambda t}(\lambda+A)^{-1}Axd\lambda$$

令 $\lambda t=\mu$，相应地 Γ 变为 $\tilde{\Gamma}$，于是

$$\|e^{-tA}x-x\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{|e^\mu|}{|\mu|}\left(\frac{\mu}{t}+A\right)^{-1}\|Ax\||d\mu|$$

$$\leqslant M_1\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{|e^\mu|}{|\mu|^2}|d\mu|\,\|Ax\|\cdot t\leqslant M\|Ax\|t$$

因此

$$\lim_{t\to 0+} e^{-tA}x = x \quad (x \in D(A))$$

再证明微分公式并证明 $-A$ 是生成元。

易知，$t>0$ 时

$$\frac{d}{dt}e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1}\lambda e^{\lambda t}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda + A)(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

$$- A \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda - Ae^{-tA} = -Ae^{-tA}$$

同理可证 4° 中的另一式。又同理可证，对 $\forall x \in D(A)$，$t>0$

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}x = -e^{tA}Ax$$

$$\frac{1}{t}(e^{-tA}x - x) = -\frac{1}{t}\int_0^t e^{-sA}Axds$$

令 $t\to 0+$，得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(e^{-tA}x - x) = -Ax$$

记 e^{-tA} 的生成元为 G，则已证 $G \supset -A$。再证反包含关系。若 $x \in D(G)$，则

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(e^{-tA}x - x) = Gx$$

对任意 $s>0$，有

$$e^{-sA}Gx = Ge^{-sA}x = \lim_{t\to 0+}\frac{e^{-tA}e^{-sA}x - e^{-sA}x}{t}$$

$$= -Ae^{-sA}x \text{（因为 } e^{-sA}x \in D(A)\text{）}$$

又由

$$\lim_{s\to 0+} e^{-sA}Gx = Gx, \quad \lim_{s\to 0+} e^{-sA}x = x$$

及 A 的闭性得

$$\lim_{t\to 0+}(-Ae^{-tA}x)=Gx$$

$x\in D(A)$ 且

$$-Ax=Gx$$

即 $-A\supset G$。因此，$G=-A$。

最后证明解析性，前面实际上已证明 e^{-tA} 是可微半群，于是 $T(t)=e^{-tA}$ 满足

$$\|T^{(n)}(t)\|=\left\|T'\left(\frac{t}{n}\right)^n\right\|\leqslant\left\|AT\left(\frac{t}{n}\right)\right\|^n$$

$$\leqslant\left(\frac{cn}{t}\right)^n$$

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\|\leqslant\frac{n^n}{n!}\left(\frac{c}{t}\right)^n\leqslant\left(\frac{ec}{t}\right)^n\left(\frac{n^n}{n!}\leqslant e^n\right)$$

因此，当 $|z-t|\leqslant Kt/(ec)$ 时，级数

$$T(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n$$

按算子范数收敛，其中 $0<K<1$。取 $t=\mathrm{Re}z$，令

$$\Delta=\left\{z\,|\,|\arg z|<\operatorname{arctg}\frac{1}{ce}\right\}$$

$$T(z)=T(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n$$

则 $T(z)$ 在Δ是解析的。z 是实数时 $T(z)=T(t)$，它是 $T(t)$ 的解析延拓。证毕。

推论 9.3.20 设A是扇形算子，$\delta_0=\sup[\mathrm{Re}\sigma(A)]>0$，则$\exists\delta$，$0<\delta<\delta_0$ 及常数 $c>0$，使得

$$\|e^{-At}\|\leqslant ce^{-\delta t}$$

（证明留作习题）。

9.4 线性方程的初值问题

由定理 9.3.18 及定理 9.1.11 中证明唯一性的方法，我们立

即可得

定理 9.4.1 设 A 是扇形算子，则对任意 $x\in X$，(1.1) 存在唯一解

$$u(t,x)=e^{-tA}x$$

现在考虑线性非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=f(t)\ (0<t<T)\\ u(0)=x\end{cases}\tag{4.1}$$

解的存在唯一性，其中 A 为扇形算子。

定义 9.4.2 若 $u:[0,T)\to X$ 满足：$u\in C([0,T),X)$，$u\in C^1((0,T),X)$，当 $t\in(0,T)$ 时 $u(t)\in D(A)$ 且满足(4.1)，则称 $u(t)$ 是(4.1)的解(古典解)。

(4.1) 的解记为 $u(t,x)$，我们将导出类似于常微分方程的结果：即有常数变易公式：

$$u(t;x)=e^{-tA}x+\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

引理 9.4.3 设 A 是 X 中的扇形算子，$f:(0,T)\to X$ 是局部 Hölder 连续，对某 $\rho>0$，

$$\int_0^\rho\|f(t)\|dt<\infty$$

定义

$$U(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

则

1° $U(t)\in C([0,T),X)$。

2° 对任意 $t\in(0,T)$，$U(t)\in D(A)$ 且 $AU(t)$ 连续。

3° 对任意 $t\in(0,T)$，

$$\frac{dU}{dt}+AU=f(t)$$

证明 1° 对任意 $t\in[0,T)$，$h>0$ 充分小。

$$U(t+h)-U(t)=\int_0^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds$$

$$-\int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$=(T(h)-I)\int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$+\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \qquad (4.2)$$

其中 $T(t)=e^{-tA}$。由此得

$$\lim_{h\to 0+}[U(t+h)-U(t)]=\theta$$

对任意 $t\in(0,T)$，$h<0$，$|h|$ 充分小，由

$$U(t+h)-U(t)=-[T(-h)-I]\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$$

$$-\int_{t+h}^{t} T(t-s)f(s)ds$$

得

$$\lim_{h\to 0-}[U(t+h)-U(t)]=\theta$$

因此，$U(t)\in C([0,T),X)$。

证明 2° 将 $U(t)$ 表为

$$U(t)=U_1(t)+U_2(t)=\int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

$$+\int_0^t T(t-s)f(t)ds$$

而

$$U_2(t)=\int_0^t T(t-s)f(t)ds=\int_0^t T(s)f(t)ds$$

由引理 9.1.8 知 $U_2\in D(A)$ 且

$$AU_2=-T(t)f(t)+f(t)\in C((0,T),X)$$

对于 U_1，我们定义

$$U_{1,\varepsilon,\eta}(t)=\int_\eta^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

$$(0<\eta<t-\varepsilon)$$

$$U_{1,\varepsilon}(t)=U_{1,\varepsilon,0}(t)$$

对任意 $T>t>0$，总可取充分小的正数 ε,η，使得

$$0 < \eta < t - \varepsilon$$

当 $s \in [\eta, t-\varepsilon]$ 时，$AT(t-s)$ 有界，$f(s)-f(t)$ 连续，所以存在 Reimann 积分

$$\int_\eta^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

考察积分和

$$\sum AT(t-s_i)(f(s_i)-f(t))\Delta s_i$$
$$= A\sum T(t-s_i)(f(s_i)-f(t))\Delta s_i$$

令 $\max \Delta s_i \to 0$ 取极限得

$$\int_\eta^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$
$$= \lim A\sum T(t-s_i)(f(s_i)-f(t))\Delta s_i$$

由 A 的闭性得 $\int_\eta^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))ds \in D(A)$ 且

$$\int_\eta^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$
$$= A\int_\eta^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

由于左端 $\eta=0$ 时积分存在及 A 的闭性得 $U_{1,\varepsilon}(t) \in D(A)$ 且

$$AU_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

又由于

$$\int_0^t \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\|ds$$
$$\leqslant \int_0^{t-\varepsilon} \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\|ds$$
$$+ \int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{-1+\theta}ds$$

其中 $0<\theta<1$ 是 Hölder 指数，所以积分 $\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$ 存在，再由 A 的闭性得 $U_1(t) \in D(A)$ 且

$$AU_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$

最后证明 $AU_1(t)$ 的连续性。$[t_1,t_2]$ 是 $(0,T)$ 的任意闭子区间，对任意 $t\in[t_1,t_2]$，取 $0<\delta<t_1$，我们有

$$AU_1(t)=\int_0^{\delta}AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$
$$+\int_{\delta}^{t}AT(t-s)(f(s)-f(t))ds \qquad (4.3)$$

当 δ 固定时，(4.3)右端第二项积分对 t 连续，第一项积分是$O(\delta)$，关于 $t\in[t_1,t_2]$ 一致，这就证明了 $AU_1(t)\in C((0,T),X)$。
综合 U_1，U_2 的证明，我们得到

$$U(t)\in D(A)\quad(t\in(0,T))$$
$$AU(t)\in C((0,T);X)$$

证明 3° 当 $h>0$ 时，由 (4.2) 得

$$\frac{U(t+h)-U(t)}{h}=\frac{T(h)-I}{h}U(t)$$
$$+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds$$

因 $U(t)\in D(A)$，所以

$$\lim_{h\to0+}\frac{T(h)-I}{h}U(t)=-AU(t)$$

又

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_0^{h}T(s)f(t+h-s)ds=f(t)$$

于是

$$\frac{d^+U(t)}{dt}=-AU(t)+f(t)$$

当 $h<0$ 时类似可证

$$\frac{d^-U(t)}{dt}=-AU(t)+f(t)$$

因此

$$\frac{dU(t)}{dt} = -AU(t) + f(t),\ U(t) \in C^1((0,T),X)$$

证毕.

由此引理立即可得

定理 9.4.4 设 A 是 X 中的扇形算子, $x \in X$, $f:(0,T) \to X$ 局部 Hölder 连续的,并且对某 $\rho > 0$,

$$\int_0^\rho \|f(t)\| dt < \infty$$

则(4.1)有唯一解

$$u(t;x) = e^{-tA}x + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds$$

9.5 分数幂算子与分数幂空间

9.5.1 概述

现在我们讨论抽象的非线性微分方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,u), \quad (t > t_0) \tag{5.1}$$

及其相应的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t,u) \\ u(t_0) = x \end{cases} \tag{5.2}$$

其中 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子, X 中的范数记为 $\|\cdot\|$.

设 X_r 是 X 的线性子空间,在 X_r 中可引进另一范数 $\|\cdot\|_r$,构成 Banach 空间, U_r 是 $R \times X_r$ 中某开集, f 定义在 U_r 内, $f:U_r \to X$. 一种特殊情形是 $X_r = X$.

我们将把(5.2)化为等价的积分方程

$$u(t) = T(t-t_0)x + \int_{t_0}^t T(t-s) f(s,u(s)) ds \tag{5.2'}$$

其中 $T(t) = e^{-tA}$. 为了使 $[t_0,t_1)$ 上(5.1)的解 u 是线性初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}+Av=f(t,u(t)),\\ V(t_0)=x\end{cases}$$

的解，由定理 9.4.4，我们要求：在 (t_0,t_1) 上，$t\to f(t,u(t))$ 是局部 Hölder 连续的，且对某 $\rho>0$，$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|dt<+\infty$。因此，我们给出如下定义。

定义 9.5.1 $[t_0,t_1)$ 上初值问题 (5.2) 的解是一个连续函数 $u:[t_0,T)\to X_t$，满足

1° $u(t_0)=x$；

2° 在 (t_0,t_1) 上 $(t,u(t))\in U_t$，$u(t)\in D(A)$，$\dfrac{du}{dt}$ 存在并满足方程 (5.1)；

3° 在 (t_0,t_1) 上，$t\to f(t,u(t))$ 是局部 Hölder 连续的且对某 $\rho>0$，$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|dt<+\infty$。

象讨论 $\mathbb{R}^n$ 中的常数微分方程一样，我们首先建立初值问题 (5.2)与积分方程(5.2)′的等价性，然后建立初值问题解的局部存在唯一性及解的延拓定理。

我们假设：

(H_{X_t}) A 是 X 中的扇形算子，X_t 是 X 的完备子空间，其中的范数为 $\|\cdot\|_t$。U_t 是 $\mathbb{R}\times X_t$ 中的某开集，f：$U_t\to X$ 关于 t 局部 Hölder 连续，关于 u 局部 Lipschtz 连续，即若 $(t^*,u^*)\in U_t$，$\exists(t^*,u^*)$ 的一个邻域 $V\subset U_t$，使得对 $\forall(t,u)$，$(s,v)\in V$，有

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^\mu+\|u-v\|_t)\qquad(5.3)$$

其中 L,μ 为正常数，$0<\mu<1$。

取不同的空间 X_t (连同它的范数)，条件(5.3) 的强弱是不同的。一个特殊情形是 $X_t=X$，这时(5.3)即

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|\leqslant L(|t-s|^\mu+\|u-v\|)\qquad(5.4)$$

另一特殊情形是 $X_t=X^1=D(A)$。若 $0\in\rho(A)$，对 $\forall x\in X^1$，引进范数 $\|x\|_1=\|Ax\|$，易证 X^1 是 Banach 空间(习题 9.17)．这

时(5.3)即是

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^{\mu}+\|u-v\|_1) \qquad (5.5)$$

若 $\forall x\in D(A)=X^1$，由于 $x=A^{-1}Ax$，所以 $\|x\|\leqslant M\|x\|_1$，由此可知条件(5.4)强于(5.5)。

我们先对 $X_\alpha=X$，即在条件(5.4)下讨论初值问题，以后再选取另外的 X_α，以减弱 f 的条件。

本节只讨论 $X_\alpha=X$ 的情形，这时我们假设：

(H_X)　A 是扇形算子，U 是 $\mathbf{R}\times X$ 中的某开集，$f:U\to X$ 关于 t 是局部 Hölder 连续，关于 u 是局部 Lipschitz 连续，即若 $(t^*,u^*)\in U$，存在 (t^*,u^*) 的一个邻域 $V\subset U$，使得对 (t,u)，$(s,v)\in V$，有

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^{\mu}+\|u-v\|)$$

其中 L,μ 为某正数，$0<\mu<1$。

首先建立初值问题(5.2)与积分方程(5.2)′的等价性。在下面的讨论中要用到如下结论。

引理 9.5.2　设 A 是扇形算子，$0\in\rho(A)$，$T(t)=e^{-tA}$，对 $\forall 0<\alpha\leqslant 1$，则 $\exists$ 常数 M_α，使得对 $\forall t>0$，$h>0$，有

$$\|T(t+h)-T(t)\|\leqslant M_\alpha h^{\alpha}t^{-\alpha} \qquad (5.6)$$

(习题 9.18)。

定理 9.5.3　设 (H_X) 成立，则

1°　若 $u(t)$ 是 $[t_0,t_1)$ 上(5.2)的解，则 u 在 $[t_0,t_1)$ 上满足积分方程(5.2)′。

2°　如果 $u:[t_0,t_1)\to X$ 是连续函数，并且对某个 $\rho>0$，$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(s,u(s))\|ds<+\infty$，又对 $t_0\leqslant t<t_1$，u 满足积分方程(5.2)′，那么 $u(t)$ 是 $[t_0,t_1)$ 上(5.2)的解。

证明 1°　设 $u(t)$ 是 $[t_0,t_1)$ 上(5.2)的解。考察

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}+Av=\tilde f(t) & (t_0<t<t_1)\\ v(t_0)=x\end{cases} \qquad (5.7)$$

其中 $\tilde{f}(t)=f(t,u(t))$. 由解的定义知，$\tilde{f}:[t_0,t_1)\to X$ 是局部 Hölder 连续，对某 $\rho>0$，

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|\tilde{f}(t)\|dt=\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|dt<+\infty$$

因此，线性问题(5.7)存在唯一解

$$v(t)=e^{-(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^{t}e^{-(t-s)A}f(s,u(s))ds$$

但 $u(t)$ 也是(5.7)的解，所以在 $[t_0,t_1)u(t)$ 满足积分方程(5.2)′.

证明 2° 设 $u\in C([t_0,t_1);X)$，在 $[t_0,t_1)$ 满足(5.2)′，又对某 $\rho>0$，$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|dt<+\infty$. 先证，$u:(t_0,t_1)\to X$ 是局部 Hölder 连续的. 记 $T(t)=e^{-tA}$. 若 $[t_0^*,t_1^*]\subset(t_0,t_1)$，$t_0^*<t$ $t+h<t_1^*$，则

$$\begin{aligned}u(t+h)-u(t)&=[T(t+h-t_0)-T(t-t_0)]x\\&\quad+\int_{t_0}^{t}[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s,u(s))ds\\&\quad+\int_{t}^{t+h}T(t+h-s)f(s,u(s))ds\end{aligned}$$

由引理 9.5.2 (不妨设 $0\in\rho(A)$)，

$$\|T(t+h-t_0)-T(t-t_0)\|\leqslant M_1\frac{h}{t-t_0}\leqslant M_1'h$$

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{t_0}^{t}[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s,u(s))ds\right\|\\&\leqslant M_2h^\alpha\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\|f(s,u(s))\|ds\\&\leqslant M_2'h^\alpha\quad(0<\alpha<1)\end{aligned}$$

$$\left\|\int_{t}^{t+h}T(t+h-s)f(s,u(s))ds\right\|\leqslant M_3h$$

于是，

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqslant Mh^\alpha$$

因此，$u:(t_0,t_1)\to X$ 是局部 Hölder 连续的，从而在 (t_0,t_1) 上，$t\to\tilde{f}(t)=f(t,u(t))$ 是局部 Hölder 连续的. 这就证明了 $u(t)$ 是线性问题(5.7)的解，从而在 $[t_0,t_1)$ 上也是(5.2)的解. 证

毕．

利用积分方程，我们可得解的局部存在唯一性定理．

定理 9.5.4（解的局部存在唯一性定理） 设（H_X）成立，对 $\forall(t_0,x)\in U$，则 $\exists T=T(t_0,x)$，使得在 $[t_0,t_0+T)$ 上初值问题(5.2)有唯一解．

将解的存在区间进行延拓，可得整体解的存在唯一性．

定理 9.5.5（解的延拓） 设（H_X）成立，又设对每个有界闭集 $B\subset U$，象集 $f(B)$ 在 X 中有界．若 u 是 $[t_0,t_1)$ 上 (5.2) 的解且 t_1 是最大的．则或者 $t_1=+\infty$，或者存在序列 $t_n\to t_1-0$ $(n\to+\infty)$，使得 $(t_n,u(t_n))\to\partial U$（若 U 无界，无穷远点包含在 ∂U 中）．

§6 中将更一般地讨论初值问题 (5.2)，因而这里略去定理 9.5.4 与定理 9.5.5 的证明．

9.5.2 分数幂算子的定义与例子

在 §9.5.1，我们在 X 中讨论非线性初值问题，其优点是对初值 x 不加限制（$\forall x\in X$），缺点是对 f 有较强的限制． 现在我们要选择子空间 X_r，以减弱 f 的条件，当然初值的取值范围就要缩小．

怎样选择 X_r? 从定理 9.5.3 的证明看来，其关键是，要使积分方程的解 $u(t)$，从 $[t_0,t_1)$ 到 X_r 是局部 Hölder 连续的．

若取 $X_r=X^1$， 对 $\forall x\in X^1=D(A)$， $u:[t_0,t_1)\to X^1$ 是 (5.2)′的解，则 $\|u(t+h)-u(t)\|_1=\|A(u(t+h)-u(t))\|(h>0)$．易估计

$$
\begin{aligned}
&\|[T(t+h-t_0)-T(t-t_0)]x\|_1\\
&\quad=\|[T(t+h-t_0)-T(t-t_0)]Ax\|\\
&\quad\leqslant M_1\frac{h}{t-t_0}\|Ax\|
\end{aligned}
$$

但是

$$
\left\|\int_{t_0}^{t}[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s,u(s))ds\right\|
$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \|[T(h) - I]AT(t-s)f(s,u(s))\| ds$$

因为对 $\forall x \in X^1 = D(A)$，$h > 0$

$$[T(h) - I]x = \int_0^h \frac{dT(s)x}{ds} ds$$

$$= -\int_0^h AT(s)x ds = -\int_0^h T(s)Ax ds$$

$$\|[T(h) - I]x\| \leqslant C_1 h \|Ax\|$$

所以

$$\|[T(h) - I]AT(t-s)f(s,u(s))\|$$

$$\leqslant C_1 h \|A^2 T(t-s)f(s,u(s))\|$$

$$\leqslant C_1 h \left\|AT\left(\frac{t-s}{2}\right)\right\|^2 \|f(s, u(s))\|$$

$$\leqslant C_1 h (t-s)^{-2} \|f(s,u(s))\|$$

这样我们不能得到 $u:(t_0, t_1) \to X^1$ 的局部 Hölder 连续性。因此，我们必须另选子空间 X_r。

将 $[T(h) - I]x$ 形式地表为

$$[T(h) - I]x = -\int_0^h A^{1-\alpha} T(s) A^\alpha x ds$$

我们将引进分数幂算子 A^α，希望它满足：

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \quad A^\alpha \text{ 具有通常指数函数的运算法则，} \\ 2^\circ \quad \text{当 } 0 < \alpha \leqslant \beta < 1 \text{ 时} \\ \qquad\qquad D(A^\alpha) \supset D(A^\beta) \supset D(A) \\ 3^\circ \quad \|A^\alpha T(t)\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha} \quad (t > 0). \end{array}\right\} \tag{5.8}$$

然后取 $X_r = X^\alpha = D(A^\alpha)$，对 $\forall x \in D(A^\alpha)$，令 $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$，以 X^α 为我们的"工作空间"，可以证明积分方程(5.3)的解 $u:(t_0, t_1) \to X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的。§ 9.5 的主要目的是引进分数幂算子 A^α 与分数幂空间 X^α（当 $\alpha = 0$ 时 $X^0 = X$），以便在 X^α 中讨论非线性方程的初值问题。

为了引进分数幂算子，我们先看一个例子。

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds \quad (\alpha > 0)$$

$$= a^{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-at}dt \quad (\text{令 } s = at,\ a > 0)$$

即

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-at}dt$$

推广之，我们引进分数幂算子的如下定义.

定义 9.5.6 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$.

1° 对任意 $\alpha > 0$,

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-tA}dt$$

2° $A^0 = I$;

3° 对任意 $\alpha > 0$,

$$A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}$$

因为 $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$，所以存在正常数 δ, c 使得

$$\|e^{-tA}\| \leqslant ce^{-\delta t} \quad (t \geqslant 0)$$

因此定义 1° 中的积分是收敛的.

后面将证明：当 $\alpha > 0$ 时 $A^{-\alpha}$ 是一一的，因而存在逆算子，定义 3° 也是有意义的.

若 $\alpha \leqslant 0$，则 $D(A^{\alpha}) = X$. 若 $\alpha > 0$，则 $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$.

对 $\alpha = 1$，A^{-1} 就是 A 的逆. 因为 $\Gamma(1) = 1$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tA}dt = \int_0^{+\infty} -A^{-1}\frac{d}{dt}e^{-tA}$$

$$= -A^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}e^{-tA}dt = A^{-1}\ (A \text{ 的逆})$$

例 1 设 A 是正纯量算子（即 $X = \mathbf{R}^1$ 中的有界线性算子对应的 1×1 矩阵 (a)，其中元素 a 为正实数），则如前定义的 $A^{-\alpha}$ 就是通常意义下正数 a 的 $(-\alpha)$ 幂.

例 2 若 A 是 Hilbert 空间中的正定自共轭算子，其谱表示为

$$A = \int_0^{+\infty}\lambda dE(\lambda)$$

则

$$A^{-\alpha}=\int_0^{+\infty}\lambda^{-\alpha}dE(\lambda)\quad(\alpha\geqslant 0)$$

证明

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\left[\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}dE(\lambda)\right]\cdot dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}dt\right)dE(\lambda)$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda^{-\alpha}dE(\lambda)$$

例3 若 $A=I+B$，B 是有界线性算子，$\|B\|<1$，则

$$A^{-\alpha}=(I+B)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}B^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}B^n$$

证明

$$e^{-tA}=e^{-t}e^{-tB}=e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-Bt)^n$$

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-Bt)^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B^n\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{n+\alpha-1}e^{-t}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}B^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}B^n$$

9.5.3 分数幂算子的性质

定理 9.5.7 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$，则

1° 对任意 $\alpha>0$，$A^{-\alpha}$ 是 X 上的有界线性算子；

2° 当 $\alpha>0,\beta>0$ 时 $A^{-\alpha}A^{-\beta}=A^{-(\alpha+\beta)}$；

3° 对任意 $\alpha>0$，$A^{-\alpha}$ 是一一的。

证明

1° 由于 $\mathrm{Re}(\sigma(A))>0$，所以存在 $\delta>0,c>0$，使

$$\|e^{-tA}\|\leqslant ce^{-\delta t}\quad(t\geqslant 0)$$

于是

$$\|A^{-\alpha}x\|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}ce^{-\delta t}dt\|x\|$$

$A^{-\alpha}$ 是有界线性算子。

2° 令 $\Gamma^*=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$

$$\begin{aligned}A^{-\alpha}A^{-\beta}&=\frac{1}{\Gamma^*}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-(s+t)A}dsdt\\&=\frac{1}{\Gamma^*}\int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}e^{-uA}dudt\\&=\frac{1}{\Gamma^*}\int_0^{+\infty}\left[e^{-uA}\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}dt\right]du\ (\text{图 9-5.1})\\&=\frac{1}{\Gamma^*}\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}e^{-uA}\left[\int_0^u\left(\frac{t}{u}\right)^{\alpha-1}\right.\\&\qquad\left.\times\left(1-\frac{t}{u}\right)^{\beta-1}d\left(\frac{t}{u}\right)\right]du\\&=\frac{1}{\Gamma^*}\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}e^{-uA}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz\cdot du\\&=A^{-(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

3° 由 2°，对正整数 n，

$$A^{-n}=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots A^{-1}=(A^{-1})^n$$

因为 A^{-1}（A 的逆）是一一的，所以 A^{-n} 也是一一的。又若 $A^{-\alpha}x=\theta$，对任意正整数 $n>\alpha$

$$A^{-n}x=A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x=\theta$$

于是 $x=\theta$，即 $A^{-\alpha}$ 是一一的。证毕。

推论 9.5.8 若 $\alpha \geq \beta$，则 $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$.

证明 设 $\beta > 0$. 若 $y \in R(A^{-\alpha})$，则存在 $x \in X$，使得 $y = A^{-\alpha}x$.

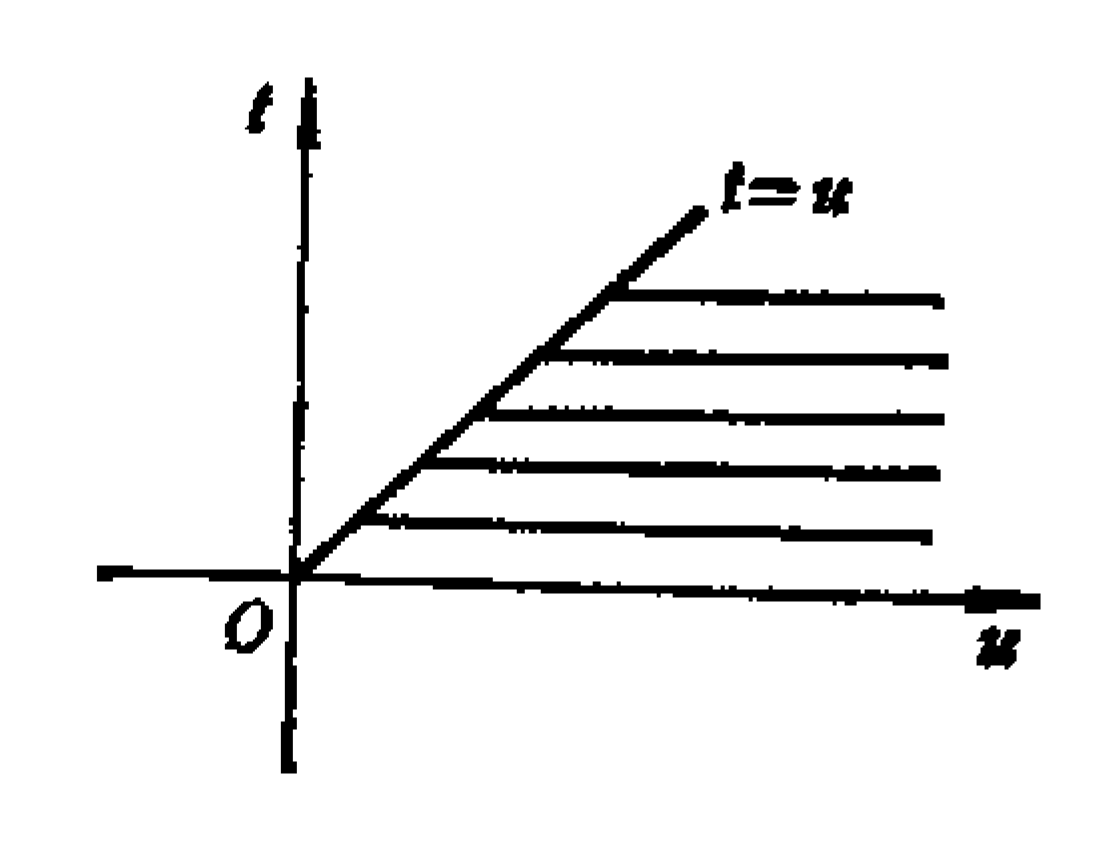


图 9-5.1

$$A^{-\alpha}x = A^{-\beta-(\alpha-\beta)}x$$
$$= A^{-\beta}(A^{-(\alpha-\beta)}x) \in R(A^{-\beta})$$

于是 $R(A^{-\alpha}) \subset R(A^{-\beta})$，即 $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$. 其余情形显然成立.

推论 9.5.9 对任意 α, β，令 $r = \max(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$，则在 $D(A^{r})$ 上有

$$A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha} = A^{\alpha+\beta}$$

证明 只须再考虑以下两种情形

(1) α, β 异号. 不妨设 $\alpha > 0, \beta < 0$. 此时 $r = \alpha$.

当 $\alpha + \beta < 0$ 时，有

$$A^{\alpha+\beta}A^{-\alpha} = A^{\beta}, \quad A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta} = A^{\beta}$$

即在 $D(A^{\alpha})$ 上

$$A^{\alpha+\beta} = A^{\beta}A^{\alpha} = A^{\alpha}A^{\beta}$$

当 $\alpha + \beta > 0$ 时，由

$$A^{-(\alpha+\beta)}A^{\beta} = A^{-\alpha}$$
$$A^{\beta}A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}$$

得结论.

当 $\alpha + \beta = 0$ 时结论显然成立.

(2) α, β 均为正的. 此时 $r = \alpha + \beta$.

这时由

$$A^{-\beta}A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha+\beta}A^{-\beta} = A^{\alpha}$$

得结论. 证毕.

定理 9.5.10 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0, 0 < \alpha < 1$. 则

1° $A^{-\alpha} = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} t^{-\alpha}(tI + A)^{-1}dt$;

2° 存在常数 C 使得

$$\|A^{-\alpha}\| \leqslant C$$

3° 对每个 $x \in X$，

$$\lim_{\alpha \to 0+} A^{-\alpha} x = x$$

证明 1° A是扇形的，所以 $\lambda I + A$ 也是扇形的。当 $\lambda \geqslant 0$ 时，

$$\mathrm{Re}\sigma(\lambda I + A) > \lambda \geqslant 0$$

于是按定义

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-tA} e^{-\lambda t} dt$$

由此得

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} \left[\int_0^{+\infty} e^{-tA} e^{-\lambda t} dt \right] d\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-tA} \left[\int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t} d\lambda \right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-tA} \left[\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} ds \right] dt$$

$$= \Gamma(1-\alpha) \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-tA} dt$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} A^{-\alpha}$$

证明 2° 由扇形算子的性质知，存在 $R_0 \geqslant 1$，$C_1 > 0$，当 $\lambda \geqslant R_0$ 时

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \frac{C_1}{\lambda}$$

对此 R_0，又存在 $C_0 > 0$，当 $0 \leqslant \lambda \leqslant R_0$ 时

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C_0$$

于是

$$\|A^{-\alpha}\| \leqslant \left| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \right| \int_0^{R_0} \lambda^{-\alpha} \|(\lambda I + A)^{-1}\| d\lambda$$

$$+ \left| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \right| \int_{R_0}^{+\infty} \lambda^{-1-\alpha} \|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| d\lambda$$

$$\leqslant \left|\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right| C_0R_0 + \left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right| C_1 \leqslant C$$

证明 3° 设 $x\in D(A)$。则存在 $y\in X$，使得 $x=A^{-1}y$。于是

$$A^{-\alpha}x - x = A^{-(1+\alpha)}y - A^{-1}y$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right)e^{-tA}y\,dt$$

因为 $\|e^{-At}\|\leqslant M_1e^{-\delta t}$ $(\delta>0)$，所以

$$\|A^{-\alpha}x - x\| \leqslant M_1\int_0^{T_0}\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right|dt\|y\|$$
$$+ M_2\int_{T_0}^{\infty} te^{-\delta t}dt\|y\|$$

其中 $T_0\geqslant 1$ 是任意给定的正数. 由这个不等式立即可得

$$\lim_{\alpha\to 0+} A^{-\alpha}x = x \quad (x\in D(A))$$

因为 $\overline{D(A)}=X$，$A^{-\alpha}$ 对 $\alpha\in(0,1)$ 是一致有界的,所以对任意 $x\in X$ 有

$$\lim_{\alpha\to 0+} A^{-\alpha}x = x$$

定理 9.5.11 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$，$0<\alpha<1$. 若 $x\in D(A)$，则

$$A^\alpha x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\,dt$$

证明 $0<1-\alpha<1$. 由定理 9.5.10 得

$$A^{\alpha-1}x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(tI+A)^{-1}x\,dt$$

因为 $x\in D(A)$，所以 $x\in D(A^\alpha)$，$A^{\alpha-1}x\in D(A)$. 由 A 的闭线性，若要

$$A^\alpha x = A(A^{\alpha-1}x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\,dt$$

成立,只须右端积分收敛.

因为存在 $R_0>0$ 和 $C_1>0$，当 $t\geqslant R_0$ 时

$$\|(tI+A)^{-1}\| \leqslant \frac{C_1}{t}$$

于是

$$\|t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\| \leqslant C_1 t^{\alpha-2}\|Ax\|$$

又因为

$$A(tI+A)^{-1} = I - tI(tI+A)^{-1}$$

所以 $\|A(tI+A)^{-1}\|$ 在 $t \in [0, R_0]$ 上一致有界。由以上估计我们知道积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\,dt$$

是收敛的。证毕。

定理 9.5.12 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$。则对任意 α，A^α 是闭稠定的。

证明 若 $\alpha \leqslant 0$，则 A^α 是 X 上的有界线性算子，于是 A^α 是闭稠定的。若 $\alpha > 0$，则 $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$。闭算子之逆仍然是闭的，于是 A^α 是闭的。余下的是证明：当 $\alpha > 0$ 时 $D(A^\alpha)$ 在 X 中稠密。

对任意 $x \in D(A)$，存在 y，$x = A^{-1}y$。对此 y，存在 $y_m \in D(A)$，$y_m \to y$，于是 $A^{-1}y_m \to A^{-1}y = x$。令 $x_m = A^{-1}y_m$，则 $x_m \in D(A)$ 且 $Ax_m = y_m \in D(A)$，即 $x_m \in D(A^2)$，$x_m \to x$。这就证明了 $D(A^2)$ 在 $D(A)$ 中稠密，从而 $D(A^2)$ 在 X 中稠密。

现设 $D(A^n)$ 在 X 中稠密．对任意 $x \in D(A^n)$ $(\subset D(A))$，存在某 y 使得 $x = A^{-1}y$。对此 y，存在 $y_m \in D(A^n)$，$y_m \to y$。令 $x_m = A^{-1}y_m$，则 $x_m \to x$。因为 $y_m = Ax_m$，所以 $x_m \in D(A^{n+1})$。因此 $D(A^{n+1})$ 在 $D(A^n)$ 中稠密，从而在 X 中稠密。这就证明了对任意自然数 n，$D(A^n)$ 在 X 中稠密，同时证明了对任意 $\alpha > 0$，$D(A^\alpha)$ 在 X 中稠密。证毕。

定理 9.5.13 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$。则对任意 $t > 0$，由 $-A$ 生成的解析半群 e^{-At} 满足：

1° $e^{-At}: X \to D(A^\alpha)$，

2° $A^{\alpha}e^{-At}$ 是X上的有界线性算子，

3° 对任意$x\in D(A^{\alpha})$，

$$A^{\alpha}e^{-At}x=e^{-At}A^{\alpha}x$$

证明 1° 只须对$\alpha>0$来证明．因为对任意自然数n，e^{-At}：$X\to D(A^{n})$，取$n>\alpha$，就得$e^{-At}:X\to D(A^{\alpha})$．

证明 2° 显然，$A^{\alpha}e^{-At}$是定义在X上的闭线性算子，由闭图象定理知，$A^{\alpha}e^{-At}$是X上的有界线性算子．

证明 3° 设$\beta>0$，利用$A^{-\beta}$的表达式及

$$e^{-At}e^{-As}=e^{-As}e^{-At}$$

可得

$$A^{-\beta}e^{-At}=e^{-At}A^{-\beta}$$

由此又得，$x\in D(A^{\beta})$时

$$e^{-At}x=e^{-At}A^{-\beta}A^{\beta}x=A^{-\beta}e^{-At}A^{\beta}x$$

$$A^{\beta}e^{-At}x=e^{-At}A^{\beta}x$$

证毕．

9.5.4 几个估计式

我们引进A^{α}，希望它满足(5.8)．已经证明过(5.8-1°，2°)式．下面要证明(5.8-3°)式成立．同时还证明一些与A^{α}有关的估计式．

定理 9.5.14 设A是扇形算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\geqslant\delta>0$，则

1° 当$\alpha\geqslant0$时存在常数C_{α}使得

$$\|A^{\alpha}e^{-At}\|\leqslant C_{\alpha}t^{-\alpha}e^{-\delta t}\quad(t>0)$$

2° 当$0<\alpha\leqslant1$时，对$x\in D(A^{\alpha})$有

$$\|(e^{-At}-I)x\|\leqslant\frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^{\alpha}\|A^{\alpha}x\|$$

对任意$b>0$，当$\alpha\in(0,b]$时C_{α}是有界的．

注．$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$，必有$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\geqslant\delta>0$．

证明 1° 利用已有的结论：对$t>0$，

$$\|e^{-At}\|\leqslant Ce^{-\delta t}$$

$$\|Ae^{-At}\| \leqslant Ct^{-1}e^{-\delta t}$$

可得当 $n=1,2,3,\cdots$时，

$$\|A^n e^{-At}\| = \|(Ae^{-At/n})^n\| \leqslant (nC)^n t^{-n} e^{-\delta t}$$

现设 $n-1<\alpha<n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha e^{-At}\| &= \|A^{\alpha-n}A^n e^{-tA}\| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\|A^n e^{-A(t+s)}\|ds \\
&\leqslant \frac{(nC)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}ds \\
&\leqslant \frac{(nC)^n}{t^\alpha\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}e^{-\delta t}du \\
&= \frac{(nC)^n}{\Gamma(n-\alpha)}B(n-\alpha,\alpha)\frac{1}{t^\alpha}e^{-\delta t} \\
&= \frac{(nC)^n}{(n-1)!}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\delta t}
\end{aligned}$$

令 $C_\alpha = \dfrac{(nC)^n}{(n-1)!}\Gamma(\alpha)$，得

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}$$

证明 2° 因为

$$[e^{-At}-I]x = \int_0^t -Ae^{-As}xds$$

对任意 $x\in D(A^\alpha)$，有 $e^{-At}x\in D(A)$，$A^\alpha e^{-At}x = e^{-At}A^\alpha x$，所以

$$\begin{aligned}
\|(e^{-At}-I)x\| &\leqslant \int_0^t \|A^{1-\alpha}e^{-As}A^\alpha x\|ds \\
&\leqslant \int_0^t C_{1-\alpha}s^{\alpha-1}e^{-\delta s}\|A^\alpha x\|ds \\
&\leqslant \frac{C_{1-\alpha}}{\alpha}t^\alpha\|A^\alpha x\|
\end{aligned}$$

由 C_α 的表达式知 C_α 的有界性．证毕．

定理 9.5.15 设 $0<\alpha<1$，A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$．则

存在常数 $C_0>0$，对任意 $x\in D(A)$ 和 $\rho>0$ 有

$$\|A^\alpha x\|\leqslant C_0(\rho^\alpha\|x\|+\rho^{\alpha-1}\|Ax\|)$$

与

$$\|A^\alpha x\|\leqslant 2C_0\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha$$

证明　由定理9.5.11 得到,对任意 $x\in D(A)$ 有

$$\begin{aligned}\|A^\alpha x\|\leqslant&\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right|\int_0^\rho t^{\alpha-1}\|A(tI+A)^{-1}\|\|x\|dt\\&+\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right|\int_\rho^\infty t^{\alpha-1}\|(tI+A)^{-1}\|\|Ax\|dt\\\leqslant&\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right|M\rho^\alpha\|x\|\\&+\left|\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right|M\rho^{\alpha-1}\|Ax\|\\\leqslant&C_0(\rho^\alpha\|x\|+\rho^{\alpha-1}\|Ax\|)\end{aligned}$$

若 $x\neq 0$，取 $\rho=\|Ax\|/\|x\|$，得

$$\|A^\alpha x\|\leqslant 2C_0\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha$$

当 $x=\theta$ 时此式显然成立。

推论 9.5.16　设 A 是扇形算子，满足 $\operatorname{Re}\sigma(A)>0$。又设 B 是一个线性算子,使得对于 $0\leq\alpha<1$ 中的某个 α, $BA^{-\alpha}$ 在 X 上有界,则 $A+B$ 是扇形的.

证明　由条件知,

$$D(B)\supset R(A^{-\alpha})=D(A^\alpha)\supset D(A)$$

又由定理结论得：当 $x\in D(A)$ 时,

$$\begin{aligned}\|Bx\|=\|BA^{-\alpha}A^\alpha x\|&\leqslant M\|Ax^\alpha\|\\&\leqslant\varepsilon\|Ax\|+C(\varepsilon)\|x\|\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon>0$ 可以任意给定。因此,由定理 9.3.15 知，$A+B$ 是扇形算子.

推论 9.5.17　设 A 是扇形算子，$\operatorname{Re}\sigma(A)>0$，则存在常数 $\varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$R_0>0$，使得对 $0\leqslant\beta\leqslant 1$，当 $|\lambda|\geqslant R_0$，$|\pi-$

$|\arg\lambda| \geqslant \varphi_0$ 时

$$\|A^\beta(\lambda + A)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^{\beta-1} \tag{5.9}$$

当 $\lambda \in \rho(-A)$，$|\lambda| \leqslant R_0$ 时

$$\|A^\beta(\lambda + A)^{-1}\| < C \tag{5.10}$$

其中 C 为某个正的常数。

证明 对任意 x，有

$$\|A^\beta(\lambda + A)^{-1}x\| \leqslant C_0\|A(\lambda + A)^{-1}x\|^\beta\|(\lambda + A)^{-1}x\|^{1-\beta}$$
$$\leqslant C_0\|A(\lambda + A)^{-1}\|^\beta\|(\lambda + A)^{-1}\|^{1-\beta}\|x\|$$

由推论 9.3.13，存在 $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，$R_0 > 0$，得 (5.9)。

当 $\lambda \in \rho(-A)$，$|\lambda| \leqslant R_0$ 时，由

$$A(\lambda + A)^{-1} = I - \lambda(\lambda + A)^{-1}$$
$$A^\beta(\lambda + A)^{-1} = A^{\beta-1}A(\lambda + A)^{-1}$$

得 (5.10)。证毕。

推论 9.5.18 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$，B 是闭线性算子，$D(B) \supset D(A^\alpha)(0 < \alpha \leqslant 1)$。则

1° 存在常数 $C > 0$

$$\|Bx\| \leqslant C\|A^\alpha x\| \quad (X \in D(A^\alpha))$$

2° 存在常数 $C_1 > 0$，对任意 $\rho > 0$ 和 $x \in D(A)$，

$$\|Bx\| \leqslant C_1(\rho^\alpha\|x\| + \rho^{\alpha-1}\|Ax\|)$$

证明留作练习。

9.5.5 分数幂空间与图范数

设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子。若 $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$，我们就可引进 A^α。若 $\mathrm{Re}\sigma(A)$ 非正，我们可选取 a，使得 $A_1 = A + aI$，$\mathrm{Re}\sigma(A_1) > 0$，而 A_1 也是扇形算子。对 A_1 就可引进 A_1^α，以后我们将考虑新的空间

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha) \quad (\alpha \geqslant 0)$$

并引进图范数

$$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\| \quad (x \in X^\alpha) \tag{5.11}$$

对于不同的 a，只要 $\mathrm{Re}\sigma(A_1)>0$，显然 A_1^α 有相同的定义域。我们将进一步证明：对于 a 的不同选择，(5.11)给出了 X^α 上的等价范数。因此我们就不必考虑对于 a 的选择的依赖性。

先证明以下定理。

定理 9.5.19 设 A，B 是X中的扇形算子，满足 $D(A)=D(B)$，$\mathrm{Re}\sigma(A)>0$，$\mathrm{Re}\sigma(B)>0$，对于$[0,1)$中某 α，$(A-B)A^{-\alpha}$ 在X中有界，则对任意 $\beta\in[0,1]$，$A^\beta B^{-\beta}$ 和 $B^\beta A^{-\beta}$ 都在X上有界。

证明 当 $\beta=0$ 时是恒同算子，显然成立。$\beta=1$ 时，因$(B-A)A^{-\alpha}$ 有界(已知条件)，$A^{-(1-\alpha)}$ 有界 $(1-\alpha>0)$，所以

$$BA^{-1}=I+(B-A)A^{-\alpha}A^{-(1-\alpha)}$$

有界。BA^{-1} 是X到X的有界线性算子，它有逆算子 AB^{-1}，由 Banach 逆算子定理知，AB^{-1} 也是有界的。

以下假设 $0<\beta<1$，由

$$B^{-\beta}-A^{-\beta}=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{-\beta}[(\lambda+B)^{-1}-(\lambda+A)^{-1}]d\lambda$$

$$=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{-\beta}(\lambda+B)^{-1}(A-B)(\lambda+A)^{-1}d\lambda$$

得到：

$$B^\beta A^{-\beta}=I-\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{-\beta}B^\beta(\lambda+B)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}A^\alpha(\lambda+A)^{-1}d\lambda$$

再由假设条件及推论 9.5.17 得到

$$\|B^\beta A^{-\beta}\|\leqslant 1+C\left[\int_0^{R_0}\lambda^{-\beta}d\lambda+\int_{R_0}^{+\infty}\lambda^{-\beta}\lambda^{-1+\beta}\lambda^{-1+\alpha}d\lambda\right]$$

即 $B^\beta A^{-\beta}$ 在X上有界。类似可证 $A^\beta B^{-\beta}$ 在X上有界。证毕。

推论 9.5.20 设A是扇形算子。对不同的 a，只要 $\mathrm{Re}\sigma(A_1)=\mathrm{Re}\sigma(A+aI)>0$，则范数

$$\|X\|_\alpha=\|A_1^\alpha X\| \quad (\alpha\geqslant 0)$$

是等价的。

证明　令

$$\tilde{A} = A + a_1 I,\ \tilde{B} = A + a_2 I$$

$$(\mathrm{Re}\,\sigma(\tilde{A}) > 0,\ \mathrm{Re}\,\sigma(\tilde{B}) > 0)$$

则 $\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - a_2)I$，$\tilde{A}^{-\alpha}$ 在X上有界，于是 $(\tilde{A} - \tilde{B})\tilde{A}^{-\alpha}$ 在 X 上有界．由定理 9.5.19 得

$$\|\tilde{B}^{\alpha}x\| = \|\tilde{B}^{\alpha}\tilde{A}^{-\alpha}\tilde{A}^{\alpha}x\| \leqslant \|\tilde{B}^{\alpha}\tilde{A}^{-\alpha}\|\|\tilde{A}^{\alpha}x\|$$

$$\|\tilde{A}^{\alpha}x\| = \|\tilde{A}^{\alpha}\tilde{B}^{-\alpha}\tilde{B}^{\alpha}x\| \leqslant \|\tilde{A}^{\alpha}\tilde{B}^{-\alpha}\|\|\tilde{B}^{\alpha}x\|$$

证毕。

今后，X^{α} 是我们讨论非线性方程初值问题时的"工作空间"。所以我们还要研究它的某些性质．

定理 9.5.21　设A是扇形算子．则

1°　$(X^{\alpha}, \|\cdot\|_{\alpha})$ 为一族 Banach 空间，$X^0 = X$，且当 $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ 时有 $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$，嵌入为连续且稠密的．（即 X^{α} 在 X^{β} 中稠密，若在 X^{α} 中 $x_n \to x$，则在 X^{β} 中 $x_n \to x_0$.）

2°　若A有紧预解式，则当 $\alpha > \beta \geqslant 0$ 时嵌入为紧的．（即 X^{α} 中的有界集为 X^{β} 中的紧集．）

3°　若 B_1, B_2 是扇形算子，$D(B_1) = D(B_2)$，$\mathrm{Re}\,\sigma(B_j) > 0$ $(j = 1,2)$．存在 $0<\alpha<1$，$(B_1 - B_2)B_1^{\alpha}$ 是有界性算子，对任意 $0\leq\beta\leqslant 1$，$X_j^{\beta} = D(B_j^{\beta})$ $(j = 1,2)$．则 $X_1^{\beta} = X_2^{\beta}$ 且有等价的范数．

证明 1°　显然 $(X^{\alpha}, \|\cdot\|_{\alpha})$ 为 Banach 空间，$X^0 = X$，当 $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ 时 $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$．若 $x_n, x \in X^{\alpha}$，$x_n \xrightarrow{X^{\alpha}} x$，则 $x_n, x \in X^{\beta}$，

$$\|x_n - x\|_{\beta} = \|A_1^{\beta}(x_n - x)\| = \|A_1^{\beta-\alpha}A_1^{\alpha}(x_n - x)\|$$

$$\leqslant M\|A_1^{\alpha}(x_n - x)\|$$

于是 $x_n \xrightarrow{X^{\beta}} x$，因为 $X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha})$ 在X中稠密，所以在 X^{β} 中稠密．

证明 2°　因为

$$A_1^{\beta} = A_1^{\beta-\alpha}A_1^{\alpha}$$

$A_1^{-1} = (A + aI)^{-1}$ 是紧的，所以 $A_1^{-(\alpha-\beta)} = A_1^{\beta-\alpha}$ 是紧的（习题

9.19)．X^{β} 紧包含 X^{α}．

证明 3° 类似于推论 9.5.20 可得证．证毕．

定理 9.5.22 设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$，B 是闭线性算子，$D(B)\supset D(A)$．若对某 $0<r<1$，和每个 $\rho\geqslant\rho_0>0$，$x\in D(A)$ 有

$$\|Bx\|\leqslant C(\rho^r\|x\|+\rho^{r-1}\|Ax\|) \tag{5.12}$$

则对任意 $r<\alpha<1$ 有

$$D(B)\supset D(A^{\alpha})=X^{\alpha}$$

证明 设 $x\in D(A^{1-\alpha})$，则 $A^{-\alpha}x\in D(A)\subset D(B)$．因为 B 是闭的，所以

$$BA^{-\alpha}x=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}Be^{-At}x\,dt$$

只要右端积分收敛，而

$$\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{\delta}t^{\alpha-1}\|Be^{-At}x\|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\delta}^{\infty}t^{\alpha-1}\|Be^{-At}x\|dt\right)$$

当 $t>0$ 时 $e^{-At}x\in D(A)$．于是取 $\delta=\rho_0^{-1}$，$\rho=t^{-1}$，由(5.12)得

$$\begin{aligned}t^{\alpha-1}\|Be^{-At}x\|&\leqslant Ct^{\alpha-1}[t^{-r}\|e^{-At}x\|+t^{-r+1}\|Ae^{-At}x\|]\\&\leqslant M_1t^{\alpha-r-1}\|x\|\quad(0<t\leqslant\delta)\end{aligned}$$

取 $\rho=\rho_0$，由(5.12)得

$$\begin{aligned}t^{\alpha-1}\|Be^{-At}x\|&\leqslant Ct^{\alpha-1}[\rho_0^r\|e^{-tA}x\|\\&+\rho_0^{r-1}\|Ae^{-At}x\|]\leqslant Ct^{\alpha-1}[\rho_0^r\\&+t^{-1}\rho_0^{r-1}]M_2e^{-\delta_1t}\|x\|\quad(t\in[\delta,+\infty))\end{aligned}$$

其中 $\delta_1>0$．

因此，对任意 $x\in D(A^{1-\alpha})$，

$$\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant M\|x\|$$

因为 $BA^{-\alpha}$ 是闭的而且 $D(A^{1-\alpha})$ 在 X 中稠密，所以对任意 $x\in X$，

$$\|BA^{-\alpha}x\| \leqslant M\|x\|, \quad D(B) \supset D(A^{\alpha})$$

9.6 非线性方程的初值问题

现在我们可以比 §9.5.1 更一般地来讨论抽象的非线性微分方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u) \quad (t > t_0) \tag{E}$$

及相应的初值问题（Cauchy 问题）

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t, u) \quad (t > t_0) \\ u(t_0) = x \end{cases} \tag{E_0}$$

我们假定（$H_{X^{\alpha}}$）:

1° A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子使得 $A_1 = A + aI$ 的分数幂是有定义的，而且对于 $\alpha \geqslant 0$，带有图范数 $\|x\|_{\alpha} = \|A_1^{\alpha}x\|$ 的空间 $X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha})$ 是有意义的。

2° 对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$，f 把 $R \times X^{\alpha}$ 中的某开集 U 映到 X 中去，并且在 U 上 f 关于 t 局部 Hölder 连续，关于 u 局部 Lipschitz 连续，即若 $(t^*, u^*) \in U$，存在 (t^*, u^*) 的一个邻域 $V \subset U$，使得对于 $(t, u) \in V$，$(s, v) \in V$，有

$$\|f(t, u) - f(s, v)\| \leqslant L(|t-s|^{\mu} + \|u - v\|_{\alpha})$$

其中 L, μ 为某正常数，$0 < \mu < 1$。

本节的主要任务是，把常微分方程的主要结果推广到方程（E），初值问题（E_0）的解的定义由定义 9.5.1 给出，其中 $X_t = X^{\alpha}$。

9.6.1 带奇性的 Gronwall 不等式

论讨常微分方程时常常用到 Gronwall 不等式：

设 $v(t) \geqslant 0$ 在 $[t_0, T]$ 上连续。若存在正常数 C, L，有

$$v(t) \leqslant C + L\int_{t_0}^{t} v(s)ds \quad (t \in [t_0, T])$$

则

$$v(t) \leqslant Ce^{L(t-t_0)}$$

而讨论抽象方程（E）时，常常要用到如下带奇性的 Gronwall 不等式。

引理 9.6.1 设 $v(t) \geqslant 0$ 在 $[t_0, T]$ 上连续。若存在正的常数 $a, b, \alpha, \alpha < 1$，使得当 $t \in [t_0, T]$ 时

$$v(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \qquad (6.1)$$

则存在常数 $M > 0$，它与 a 无关，使得

$$v(t) \leqslant Ma \quad (t \in [t_0, T])$$

证明　将(6.1) 迭代 $n-1$ 次，并利用等式

$$\int_{\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds = (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

得到

$$\begin{aligned} v(t) &\leqslant a + b\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \Big[a + b \\ &\quad \times \int_{t_0}^{s} (s-\tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau\Big] ds \leqslant a\left[1 + b\frac{(T-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right] \\ &\quad + b^2\int_{t_0}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1} ds\right] v(\tau) d\tau \\ &= a\left[1 + b\frac{(T-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right] \\ &\quad + b^2\frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{2\alpha-1} v(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &\leqslant a\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{b(T-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{j} \\ &\quad + \frac{(b\Gamma(\alpha))^{n}}{\Gamma(n\alpha)}\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n\alpha-1} v(\tau) d\tau \end{aligned}$$

取 n 充分大使得 $n\alpha - 1 > 0$，于是

$$v(t) \leqslant C_1 a + C_2 \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau$$

常数 C_1, C_2 只依赖于 $T - t_0$, b, 与 α, a 无关, 最后利用 Gronwall 不等式可得结论。

9.6.2 与初值问题等价的积分方程

如同定理 9.5.3，我们先建立 (E_0) 与积分方程

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A} f(s, u(s)) ds \qquad (6.2)$$

的等价性.

定理 9.6.2 设 (H_{X^α}) 成立,则

1° 若 u 是 $[t_0,t_1)$ 上 (E_0) 的解,则 $u(t)$ 满足(6.2);

2° 若 u 是从 $[t_0,t_1)$ 到 X^α 的一个连续函数，且对某 $\rho > 0$, $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s,u(s))\| ds < +\infty$, 又对 $t_0 \leqslant t < t_1$, u 满足(6.2),则 u 是 $[t_0,t_1)$ 上 (E_0) 的解.

证明 1° 与定理 9.5.3 的 1° 相同.

证明 2° 设 $u \in C([t_0,t_1), X^\alpha)$ 满足 (6.2).又设对某 $\rho > 0$, $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s, u(s))\| ds < +\infty$, 只须证 $u:(t_0, t_1) \to X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的. 余下的证明与定理 5.9.3 的 2° 相同. 以下不妨设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$.

若 $[t_0^*, t_1^*] \subset (t_0, t_1)$, $t_0^* < t < t + h < t_1^*$, 则

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (e^{-hA} - I)e^{-(t-t_0)A}x \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} (e^{-hA} - I)e^{-(t-s)A} f(s, u(s)) ds \\ &\quad + \int_{t}^{t+h} e^{-(t+h-s)A} f(s, u(s)) ds \end{aligned}$$

取 $0 < \delta < 1 - \alpha$, 则对任意 $z \in X$, 由定理 9.5.14 得

$$\begin{aligned} \|(e^{-hA} - I)e^{-(t-s)A}z\|_\alpha &= \|(e^{-hA} - I)A^\alpha e^{-(t-s)A}z\| \\ &\leqslant C_0 h^\delta \|A^{\delta+\alpha} e^{-(t-s)A} z\| \leqslant C_1 h^\delta (t-s)^{-(\delta+\alpha)} \|z\| \end{aligned}$$

$$(0 < s < t)$$

同时又有

$$\|(e^{-hA} - I)e^{-(t-t_0)A}x\|_\alpha \leqslant C_0 h^\delta \|A^\delta e^{-(t-t_0)A}x\|$$
$$\leqslant C_2 h^\delta \quad (t \in [t_0^*, t_1^*])$$

于是

$$\|u(t+h) - u(t)\|_\alpha \leqslant C_2 h^\delta$$
$$+ C_1 h^\delta \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(\alpha+\delta)} \|f(s, u(s))\| ds + C_3 h \leqslant M h^\delta$$

因此 $u: (t_0, t_1) \to X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的。证毕。

9.6.3 解的局部存在性和唯一性

对积分方程(6.2)，利用压缩映射原理可得

定理 9.6.3 (解的局部存在性和唯一性) 设 (H_{X^α}) 成立，任给 $(t_0, x) \in U$，则存在 $T = T(t_0, x)$ 使得在 $[t_0, t_0 + T)$ 上 (E_0) 有唯一解。

证明 因为 $(t_0, x) \in U$，U 是开集，所以可取 $\delta > 0$，$\tau > 0$ 使得

$$V = \{(t, u) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau, \|u - x\|_\alpha \leqslant \delta\} \subset U$$

并且对一切 $(t, u_1), (t, u_2) \in V$ 有

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leqslant L\|u_1 - u_2\|_\alpha \tag{6.3}$$

$0 < T \leqslant \tau$，令

$$S = \{v \mid v: [t_0, t_0 + T] \to X^\alpha \text{ 是连续的}, \|v(t) - x\|_\alpha \leqslant \delta\}$$

在 S 中引进任意两个元素 u, v 的距离

$$\|u - v\|_S = \max\{\|u(t) - v(t)\|_\alpha \mid t \in [t_0, t_0 + T]\}$$

则 S 是一完备的度量空间。

对于 $v \in S$，由

$$G(v)(t) = e^{-(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A} f(s, v(s)) ds$$

定义 $G(v)$。我们证明可适当选取 T 使 G 是映 S 到自身的压缩映射。

显然，若 $v\in X^{\alpha}$，则 $Gv\in X^{\alpha}$。若 $v\in S$，则

$$\|G(v)(t)-x\|_{\alpha}\leqslant\|(e^{-(t-t_0)A}-I)x\|_{\alpha}+\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}f(s,v(s))\|ds$$

而

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}&\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}f(s,v(s))\|ds\\&=\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}[f(s,v(s))-f(s,x)]\|ds\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}f(s,x)\|ds\\&\leqslant(L\delta+K)\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|ds\\&\leqslant M(L\delta+K)\int_{0}^{T}u^{\alpha}e^{au}du\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_0+T)\end{aligned}$$

其中

$$K=\max\{\|f(t,x)\|\mid t\in[t_0,t_0+\tau]\}$$

当 $t>0$ 时

$$\|A_1^{\alpha}e^{-tA}\|\leqslant Mt^{-\alpha}e^{at}$$

可取 $T>0$ 充分小使得

$$\|(e^{-(t-t_0)A}-I)x\|_{\alpha}\leqslant\frac{\delta}{2}\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_0+T)$$

$$M(L\delta+K)\int_{0}^{T}u^{\alpha}e^{au}du\leqslant\frac{\delta}{2}$$

于是

$$\|G(v)(t)-x\|_{\alpha}\leqslant\delta$$

即 $Gv\in S$。

若 $u,v\in S$，则

$$\|G(u)(t)-G(v)(t)\|_{\alpha}\leqslant\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|ds\leqslant ML\int_{0}^{T}u^{-\alpha}e^{au}du\|u-v\|_{s}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|_s$$

$$\|Gu-Gv\|_s \leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|_s$$

即G是压缩的。

由压缩映射原理，G在S中有唯一不动点 u，u 是积分方程(6.2)的一个连续解。因为

$$\|f(t,u(t))\| \leqslant \|f(t,u(t))-f(t,x)\| + \|f(t,x)\| \leqslant L\delta + K$$

所以自然满足

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(t, u(t))\|dt < +\infty$$

因此 $u(t)$ 也是 (E_0) 在 $[t_0,t_0+T)$ 上的唯一解。

9.6.4 解的延拓

定理 9.6.4 设 H_{X^α} 成立。又设对每个有界闭集 $B\subset U$，象$f(B)$ 在X中有界，若u是 $[t_0, t_1)$ 上 (E) 的解且 t_1 是最大的，则或者 $t_1=+\infty$，或者存在序列 $t_n\to t_1-0$ ($n\to+\infty$) 使得$(t_n,u(t_n))\to \partial U$，(若$U$无界，无穷远点包含在 ∂U 中)。

证明 用反证法。若不然，则 $t_1<+\infty$，存在有界闭集 $B\subset U$ 及 $t_2<t_1$，使得当 $t_2\leqslant t<t_1$ 时，$(t, u(t))\in B$。若我们证得在X中存在 $\lim\limits_{t\to t_1-0} u(t)=x_1\in B$，由局部存在性定理知，解还可延拓到 $t>t_1$ (满足 $u(t_1)=x_1$)，这与t_1的最大性矛盾。因此，余下的是证明：存在 $x_1\in B$，在X中有 $\lim\limits_{t\to t_1-0} u(t)=x_1$。

分两步证明。

先证明对任意β ($\alpha\leqslant\beta<1$)；当 $t_2\leqslant t<t_1$ 时

$$\|u(t)\|_\beta \leqslant M \text{（}M\text{ 为常数）}$$

因为 $f(B)$ 有界，可设 $C=\sup\{\|f(t, u)\|, (t, u)\in B\}$。于是

$$\|u(t)\|_\beta \leqslant \|A_1^{\beta-\alpha}e^{-(t-t_0)A}\|\|u(t_0)\|_\alpha$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\beta}e^{-(t-s)A}\|\|f(s, u(s))\|ds$$

$$\leqslant M_1\Big[(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)}\|u(t_0)\|_\alpha$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\beta}ds\Big] \tag{6.4}$$

$$\|u(t)\|_\beta\leqslant M \quad (t_0<t_2\leqslant t<t_1)$$

再估计 $\|u(t)-u(\tau)\|$，其中 $t_2\leqslant\tau<t<t_1$.

因为

$$u(t)-u(\tau)=(e^{-(t-\tau)A}-I)u(\tau)$$

$$+\int_{\tau}^{t}e^{-(t-s)A}f(s,u(s))ds$$

所以

$$\|u(t)-u(\tau)\|_\alpha\leqslant C_1(t-\tau)^{\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta$$

$$+C_2\int_{\tau}^{t}(t-s)^{-\alpha}ds\leqslant C_3(t-\tau)^{\beta-\alpha}$$

由这个估计式立即可得存在 $\lim\limits_{t\to t_1-0}u(t)=x_1$，$B$ 是闭的，所以 $(t_1,x_1)\in B$. 证毕.

推论 9.6.5 设 H_{X^α} 成立，其中 $U=(\tau,+\infty)\times X^\alpha$，又对任意 $(t,u)\in U$，f 满足

$$\|f(t,u)\|\leqslant k(t)(1+\|u\|_\alpha)$$

其中 $k(\cdot)$ 在 (τ,∞) 上连续. 若 $t_0>\tau$，$x\in X^\alpha$，则对一切 $t\geqslant t_0$，(E_0) 的解存在且唯一.

证明　解的延拓定理是适用的. 若此推论不成立，则存在 $t_1<+\infty$ 且存在 $t_n\to t_1-0$ 使得 $\|u(t_n)\|_\alpha\to+\infty$. 但是，

$$\|u(t)\|_\alpha\leqslant\|e^{-(t-t_0)A}x\|_\alpha+\int_{t_0}^{t}\|A_1^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|$$

$$\cdot k(s)(1+\|u(s)\|_\alpha)ds\leqslant C_1\|x\|_\alpha+\int_{t_0}^{t}C_2(t-s)^{-\alpha}$$

$$(1+\|u(s)\|_\alpha)ds\leqslant a+b\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_\alpha ds$$

由带奇性的 Gronwall 不等式得 $\|u(t)\|_\alpha\leqslant M$，这便矛盾了.

9.6.5 解的紧性

定理 9.6.6 设 A 有紧的预解式，对任意有界闭集 $B\subset X^{\alpha}$，$\mathrm{R}^{+}\times B\subset U\subset \mathrm{R}^{+}\times X^{\alpha}$，都有 $f(\mathrm{R}^{+}\times B)$ 在 X 中有界。若 $u(t;t_0,x)$ 是 $[t_0,+\infty)$ 上 (E_0) 的一个解，当 $t\to+\infty$ 时 $\|u(t;t_0,x)\|_{\alpha}$ 有界，则

$$\{u(t;\ t_0,\ x)\}_{t>t_0}$$

是 X^{α} 中的一个紧集。

证明 我们已经知道，当 A 有紧预解式时，若 $0\leqslant\alpha<\beta<1$，则 $X^{\beta}\subset X^{\alpha}$ 是紧包含关系，因而只要证明当 $t\geqslant t_0+1$ 时 $\|u(t;t_0,x)\|_{\beta}$ 有界就够了。

不失一般性，可设 $\mathrm{Re}\sigma(A)\geqslant\delta>0$

$$\|f(t,u(t;t_0,x))\|\leqslant C\quad(t\geqslant t_0)$$

因此

$$\begin{aligned}\|u(t;t_0,x)\|_{\beta}&\leqslant\|A^{\beta-\alpha}e^{-(t-t_0)A}\|\|x\|_{\alpha}\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\|A^{\beta}e^{-(t-s)A}\|\|f(s,u(s))\|ds\\&\leqslant M_0(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)}e^{-\delta(t-t_0)}\|x\|_{\alpha}\\&\quad+M_0\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\beta}e^{-\delta(t-s)}ds\leqslant M\quad(t\geqslant t_0+1)\end{aligned}$$

若 $\mathrm{Re}\sigma(A)>-a$，则 $\mathrm{Re}\sigma(A+a)>0$。令

$$g(t,u)=f(t,u)+au$$

考察

$$\frac{du}{dt}+(A+a)u=g(t,u)$$

并注意

$$\|au\|=\|A^{-\alpha}A^{\alpha}au\|\leqslant M\|au\|_{\alpha}$$

g 与 f 满足相同条件，证毕。

注 如果不假定 A 有紧预解式，那么上述论证证明了：若解在 X^{α} 中有界，则解在 X^{β} 中也有界，其中 $0\leqslant\alpha<\beta<1$，当然，f 仍满足定理的条件。

9.6.6 解的连续性和可微性

现在讨论解对右端函数及初值、参数的连续性和可微性.

设有初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+\mu_n Au=f_n(t,u) \quad (n=1,2,\cdots)\\ u(t_0)=x_n\end{cases} \tag{6.5}$$

及

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+\mu_0 Au=f_0(t,u)\\ u(t_0)=x_0\end{cases} \tag{6.6}$$

它们的解分别为 $\varphi_n(t)$, $\varphi_0(t)$. 若 $n\to+\infty$ 时

$$f_n(t,u)\to f_0(t,u)$$

$$\mu_n\to\mu_0,\ x_n\to x_0$$

是否有 $\varphi_n(t)\to\varphi_0(t)$? 下面的定理回答这个问题.

定理 9.6.7 假设

1° A 是扇形算子,

2° 对某 $\alpha\in[0,1)$, $U\subset\mathbf{R}\times X^\alpha$ 是开集, $\{f_n(t,u),\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是 U 到 X 的函数序列, 每个 f_n 关于 u 局部 Lipchitz 连续, 关于 t 局部 Hölder 连续, 并且

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t,u)=f_0(t,u)$$

对于 U 的任意一点邻域中的 (t,u) 一致成立,

3° 当 $n\to+\infty$ 时, $(t_0,x_n)\in U$, $\|x_n-x_0\|_\alpha\to0$, 且实数 $\mu_n\to\mu_0>0$,

4° $\varphi_0(t)$ 是 (6.6) 的极大定义解, 它在 $[t_0,t_0+T_0)$ 上存在.

则对任意 $t_1\in(t_0,t_0+T_0)$, 当 n 充分大时 (6.5) 的解 $\varphi_n(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 存在并在 $[t_0,t_0+T_0)$ 的紧子区间上一致地有

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_0(t)\|_\alpha\to0$$

证明　显然不妨认为 $t_0=0$, $x_0=0$, $\mu_0=1$, $\frac{1}{2}<\mu_n<2$, 进一步可设在 $[0,T_0)$ 上 $f_0(t,0)=\theta$, $\varphi_0(t)=\theta$, 不然的话，考察 $v(t)=u(t)-\varphi_0(\mu_n t)$, 相应的方程是

$$\frac{dv}{dt}+\mu_n Av=f_n(t,v+\varphi_0(\mu_n t))$$

$$-\mu_n f_0(\mu_n t,\varphi_0(\mu_n t))$$

任取 $t_1\in(0,T_0)$, 于是 $[0,t_1]\times\{\theta\}$ 是 U 上的一个紧集，因此存在 $\delta>0$ 和 $L>0$, 使得

$$\|f_0(t,u_1)-f_0(t,u_2)\|\leqslant L\|u_1-u_2\|_\alpha$$

(当 $\|u_1\|_\alpha$, $\|u_2\|_\alpha\leqslant\delta$, $0\leqslant t\leqslant t_1$ 时)，而且当 $0\leqslant t\leqslant t_1$, $\|u\|_\alpha\leqslant\delta$ 时一致地有 $\|f_n(t,u)-f_0(t,u)\|\to 0$, 由此也可得到，当 $0\leqslant t\leqslant t_1$ $\|u\|_\alpha\leqslant\delta$ 时，对充分大的 n, $\|f_n(t,u)\|$ 有界.

对于充分大的 n, $\varphi_n(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上是有定义的. 事实上，只要在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_1$ 上，$\|\varphi_n(s)\|_\alpha\leqslant\delta$, 我们就有

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(t)\|_\alpha &\leqslant \|e^{-\mu_n At}x_n\|_\alpha+\left\|\int_0^t e^{-\mu_n(t-s)A}[f_n(s,\varphi_n(s))\right.\\&\quad\left.-f_0(s,\varphi_n(s))]ds\right\|_\alpha\\&\quad+\left\|\int_0^t e^{-\mu_n(t-s)A}f_0(s,\varphi_n(s))ds\right\|_\alpha\\&\leqslant Me^{-\mu_n\delta t}\|x_n\|_\alpha+M\mu_n^{-\alpha}\\&\quad\cdot\int_0^t(t-s)^{-\alpha}e^{\mu_n\delta(t-s)}\Delta_n ds\\&\quad+LM\mu_n^{-\alpha}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}e^{\mu_n\delta(t-s)}\|\varphi_n(s)\|_\alpha ds\\&\leqslant C_1(\|x_n\|_\alpha+\Delta_n)\\&\quad+C_2\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\|\varphi_n(s)\|_\alpha ds\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_n=\sup\{\|f_n(t,u)-f_0(t,u)\|\mid 0\leqslant t\leqslant t_1,\ \|u\|_\alpha\leqslant\delta\}$$

再由带奇性的 Gronwall 不等式得

$$\|\varphi_n(t)\|_\alpha \leqslant C(\|x_n\|_\alpha + \Delta_n) \quad (n\ 充分大) \tag{6.7}$$

其中C与n无关，只要n充分大，就有

$$C(\|x_n\|_\alpha + \Delta_n) < \delta$$

因此，由解的延拓定理知，当n充分大时在$[0, t_1]$上$\varphi_n(t)$存在，(6.7)在$0 \leqslant t \leqslant t_1$上成立，从而当$n \to +\infty$时在$0 \leqslant t \leqslant t_1$中一致地有$\|\varphi_n(t)\|_\alpha \to 0$，证毕。

下面叙述解对初值，参数的可微性定理，其证明可见[Hen, p.64. Th3. 4.4]。

定理 9.6.8 假设

1° A是X上的扇形算子，

2° 对某$\alpha \in [0, 1)$，U在$\mathbb{R} \times X^\alpha$中是开的，$\Lambda$在Banach空间$L$中是开的，$f: U \times \Lambda \to X$，$f$，$D_u f$，$D_\lambda f$在$U \times \Lambda$上连续，而$t \to f(t, u, \lambda)$对$t$是局部Hölder连续的，

3° 对于$\mu > 0$，$\lambda \in \Lambda$，$(\tau, \xi) \in U$，设$u(t) = u(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$是

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mu A u = f(t, u, \lambda) & (t > \tau) \\ u(\tau) = \xi \end{cases}$$

的极大定义的解。

则$(\xi, \lambda, \mu) \to u(t; \tau, \xi, \lambda, \mu)$在解的存在区域上是从$X^\alpha \times \Lambda \times \mathbb{R}^+$到$X^\alpha$中连续可微的．导数

$$h(t) = D_\xi u(t),\quad v(t) = D_\lambda u(t),\quad w(t) = D_\mu u(t)$$

是

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} + \mu A h = D_u f(t, u(t), \lambda) h \\ h(\tau) = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \mu A v = D_u f(t, u(t), \lambda) v + D_\lambda f(t, u(t), \lambda) \\ v(\tau) = \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}+\mu Aw=D_uf(t,u(t),\lambda)w-Au(t)\\ w(\tau)=\theta\end{cases}$$

的适度解。

若 $(t,u)\to D_uf$, $D_\lambda f$ 在U上还是 Hölder 连续的，则它们都是古典解。对于w的方程，注意 $t\to\tau+$ 时 $\|Au(t)\|=o((t-\tau)^{\alpha-1})$。

本定理的证明可参见 [Hen, p65]。

9.6.7 微分方程的光滑作用

在前面的讨论中我们已经看到扇形算子对应的微分方程有某种光滑效应，即若初值 $x\in X^\alpha(0<\alpha<1)$，则对任意 $t>t_0$, $u(t,x)\in D(A)=X^1$。下面将证明扇形算子对应的微分方程有进一步的光滑效应，即在一定条件下，可证明：若 $x\in X^\alpha$，则对任意 $r<1$，在解的存在区间上，$\dfrac{du(t;x)}{dt}\in X^r$ 且是 Hölder 连续的。

先证一个引理。

引理 9.6.9 设A是扇形算子，$g:(0,T)\to X$ 满足：

$$\|g(t)-g(s)\|\leqslant k(s)(t-s)^{r_0}$$
$$(0<s<t<T<+\infty) \qquad (6.8)$$

其中 $k(\cdot)$ 在 $(0,T)$ 连续且 $\int_0^T k(s)ds<\infty$，令

$$G(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}g(s)ds \quad (t\in(0,T))$$

则只要 $0\leqslant r<r_0$ 就有

1° $G:(0,T)\to X^r$ 是连续可微的；

2° $$\left\|\frac{dG}{dt}\right\|_r\leqslant Mt^{-r}\|g(t)\|+M\int_0^t(t-s)^{r_0-r-1}k(s)ds$$

$$(0<t<T) \qquad (6.9)$$

其中M是不依赖于 r_0, r 和 $g(\cdot)$ 的常数；

3° 若对某 $\delta>0$

$$\int_0^h k(s)ds = O(h^\varepsilon) \quad (h \to 0+)$$

则 $\frac{dG}{dt}$ 从 $(0, T)$ 到 X^r 局部 Hölder 连续的。

证明 1° 由引理 9.4.3 的证明，有 $G: (0,T) \to X$.

$$\frac{dG}{dt} = -AG(t) + g(t)$$

且连续.

证明 2° 以下不妨设 $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$，由于

$$-AG(t) + g(t) = -\int_0^t Ae^{-(t-s)A}g(s)ds$$

$$+ \int_0^t Ae^{-(t-s)A}g(t)ds + e^{-tA}g(t)$$

令

$$H(t) = \int_0^t Ae^{-(t-s)A}[g(t) - g(s)]ds$$

得

$$\frac{dG}{dt} = e^{-tA}g(t) + H(t)$$

因为

$$\|e^{-tA}g(t)\|_r \leqslant M_1 t^{-r}\|g(t)\|, \|H(t)\|_r \leqslant \int_0^t \|A^{1+r}e^{-(t-s)A}\|$$

$$\|g(t) - g(s)\|ds \leqslant M_2 \int_0^t (t-s)^{-r-1+r_0}k(s)ds$$

所以得 (6.9).

证明 3° 任取 $[t_1, t_2] \subset (0, T)$，对任意 $t_1 \leqslant t + h \leqslant t_2$，有

$$H(t+h) - H(t) = \Delta_{\mathrm{I}} + \Delta_{\mathrm{II}},$$

其中

$$\Delta_{\mathrm{I}} = \int_0^h Ae^{-(t+h-s)A}(g(t+h) - g(s))ds$$

$$\Delta_{\mathrm{II}} = \int_0^t Ae^{-(t-s)A}[g(t+h)$$

$$- g(s+h) - g(t) + g(s)]ds$$

由于

$$\|\Delta_{\rm I}\|_r \leqslant M_1\int_0^h (t+h-s)^{-1-r+r_0}k(s)ds$$

$$\leqslant M_2 t^{-1-r+r_0}\int_0^h k(s)ds \leqslant M_3 h^{\theta}$$

$$\|\Delta_{\rm II}\|_r \leqslant \int_0^{\sigma} + \int_{\sigma}^{t-h} + \int_{t-h}^{t}$$

$$\int_0^{\sigma} \leqslant M_3\int_0^{\sigma}(t-s)^{-1-r}[k(t)+k(s)]h^{r_0}ds$$

$$\leqslant M_4\int_0^{\sigma}k(t)dt\cdot h^{r_0}\quad (\sigma\ 充分小)$$

$$\int_{\sigma}^{t-h} \leqslant M_5\int_{\sigma}^{t-h}(t-s)^{-1-r}h^{r_0}ds \leqslant M_6 h^{r_0-r}$$

$$\int_{t-h}^{t} \leqslant M_6\int_{t-h}^{t}(t-s)^{-1-r+r_0}ds \leqslant M_7 h^{r_0-r}$$

以及

$$\|e^{-(t+h)A}g(t+h)-e^{-At}g(t)\|_r$$
$$\leqslant \|e^{-(t+h)A}[g(t+h)-g(t)]\|_r$$
$$+\|(e^{-(t+h)A}-e^{-At})g(t)\|_r \leqslant M_8 h^{r_0}+M_9 h$$

我们得到 $\dfrac{dG}{dt}$ 从 $(0,T)$ 到 X^r 是局部 Hölder 连续的，证毕。

定理 9.6.10 设 A 是扇形算子，对某 $0\leqslant\alpha<1$，开集 $U\subset \mathbb{R}\times X^{\alpha}$，$f$：$U\to X$ 是局部 Lipschitz 的。又设 $u(\cdot)$ 是 (E_0) 在 $[t_0,t_1]$ 上的解，而且 $(t_0,x)\in U$，若 $0<r<1$，则对于 $t_0<t\leqslant t_1$，$t\to\dfrac{du}{dt}(t)\in X^r$ 是局部 Hölder 连续的，且存在常数 C 满足

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_r \leqslant C(t-t_0)^{\alpha-r-1}\tag{6.10}$$

证明 (E_0) 的解 $u(\cdot)$ 满足

$$u(t)=e^{-(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^{t}e^{-(t-s)A}f(s,u(s))ds\tag{6.11}$$

令 $g(t)=f(t,u(t))$，验证 $g(t)$ 满足(6.8)．对任意的 $t,s\in[t_0,t_1]$，

$$\|g(t)-g(s)\| \leqslant L(|t-s|+\|u(t)-u(s)\|_\alpha)$$

若 $t_0<\tau<t<t+h\leqslant t_1$，由(6.11)有

$$u(t+h)-u(t)=(e^{-hA}-I)e^{-(t-\tau)A}u(\tau)$$
$$+\int_\tau^t e^{-(t-s)A}[g(s+h)-g(s)]ds$$
$$+\int_\tau^{\tau+h} e^{-(t+h-s)A}g(s)ds \triangleq \Delta_I+\Delta_{II}+\Delta_{III}$$

又对任意 $\alpha\leqslant\beta<1$，

$$\|\Delta_I\|_\alpha \leqslant C_1h\|A^{\alpha+1-\beta}e^{-(t-\tau)A}A^\beta u(\tau)\|$$
$$\leqslant C_2h(t-\tau)^{-1-\alpha+\beta}\|u(\tau)\|_\beta$$

$$\|\Delta_{II}\|_\alpha \leqslant C_3\int_\tau^t (t-\tau)^{-\alpha}\|g(s+h)-g(s)\|ds$$

$$\|\Delta_{III}\|_\alpha \leqslant C_4\int_\tau^{\tau+h}(t+h-s)^{-\alpha}\|g(s)\|ds \leqslant C_5h(t-\tau)^{-\alpha}$$

故得

$$\|g(t+h)-g(t)\| \leqslant Lh+M_1h[(t-\tau)^{-1+\beta+\alpha}\|u(\tau)\|_\beta+(t-\tau)^{-\alpha}]$$
$$+M_1\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|g(s+h)-g(s)\|ds$$

由带奇性的 Gronwall 不等式知

$$\|g(t+h)-g(t)\| \leqslant M_2h[(t-\tau)^{-1+\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta+(t-\tau)^{-\alpha}]=hk(t)$$

其中

$$k(t)=M_2[(t-\tau)^{-1+\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta+(t-\tau)^{-\alpha}] \quad (r_0=1)$$

显然它满足引理 9.6.9 的全部条件. 易证 $Ae^{-(t-t_0)A}x$ 在 $(t_0,t_1]$ 上局部 Lipschitz 连续，因此在 $(\tau,t_1]$ 上 $t\to\frac{du}{dt}\in X^r(r<1)$ 是 Hölder 连续的，而且

$$\left\|\frac{dG}{dt}\right\|_r \leqslant M_2(t-\tau)^{-r}$$

$$+ M_2\int_\tau^t (t-s)^{-\gamma}[(s-\tau)^{-1+\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta$$
$$+ (s-\tau)^{-\alpha}]ds$$

因为

$$\int_\tau^t (t-s)^{-\gamma}(s-\tau)^{-\alpha}ds$$
$$= (t-\tau)^{-\gamma+1-\alpha}\int_0^1 u^{-\alpha}(1-u)^{-\gamma}du$$

所以

$$\left\|\frac{dG}{dt}\right\|_\gamma \leqslant M_4[(t-\tau)^{\beta-\gamma-1}\|u(\tau)\|_\beta + (t-\tau)^{-\gamma}]$$

由定理 9.6.4 证明中的(6.4)可得

$$\|u(\tau)\|_\beta \leqslant M_5(\tau-t_0)^{\alpha-\beta}$$

代入上式,并取

$$t-\tau = \tau - t_0 = \frac{1}{2}(t-t_0)$$

得

$$\left\|\frac{dG}{dt}\right\|_\gamma \leqslant M_6[(t-\tau)^{\beta-\gamma-1}(\tau-t_0)^{\alpha-\beta}$$
$$+ (t-\tau)^{-\gamma}] \leqslant M_7(t-t_0)^{\alpha-\gamma-1}$$

又

$$\|Ae^{-(t-t_0)A}x\|_\gamma = \|A^{\gamma+1-\alpha}e^{-(t-t_0)A}A^\alpha x\|$$
$$\leqslant M_8(t-t_0)^{\alpha-\gamma-1}$$

因此最后得到(6.10)。证毕。

9.7 应用与例子

9.7.1 由微分算子所确定的扇形算子

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界区域,$\partial\Omega$ 是光滑的,考虑 $2m$ 阶偏微分算子

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

其中 $a_\alpha(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的足够光滑的复值函数（$a_\alpha(x)\in C^{2m}(\bar{\Omega})$ 或 $C^\infty(\bar{\Omega})$）。

定义 9.7.1 若存在常数 $C>0$，对任意 $x\in\Omega$，$\xi\in\mathbb{R}^n$，有

$$\operatorname{Re}\left[(-1)^m\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\right]\geqslant C|\xi|^{2m}$$

其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=|\alpha|$，$\alpha_k$ 为非负整数，

$$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$$

则称 $-A(x,D)$ 在 Ω 上是强椭圆型的。也称 $A(x,D)$ 在 Ω 上是强椭圆型的。

我们总是假设 $A(x,D)$ 是 Ω 上的强椭圆型的 $2m$ 阶偏微分算子。引进 $A(x,D)$ 的形式共轭算子

$$A^*(x,D)u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}u)$$

以 $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ 记为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 中的闭包。对任意 $1<p<+\infty$，在 $L_p(\Omega)$ 中引进算子 A_p。

$$A_pu=A(x,D)u$$

A_p 的定义域

$$D(A_p)=W_p^{2m}(\Omega)\cap\mathring{W}_p^m(\Omega)$$

同样，对 $q=p/(p-1)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，在 $L_q(\Omega)$ 中引进

$$A_q^*u=A^*(x,D)u$$

$$D(A_q^*)=W_q^{2m}(\Omega)\cap\mathring{W}_q^m(\Omega)$$

我们将证明 A_p 是扇形算子，先证明判断扇形算子的一个定理：

定理 9.7.2 设 B 是 X 上的闭稠定线性算子，B' 是 B 的共轭算子，存在常数 $R_0>0$，$C>0$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，当 $\lambda\in\mathbf{C}$，$|\lambda|>R_0$，$|\arg\lambda|\geqslant\varphi$ 时，对 $\forall u\in D(B)$，

$$\|u\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I - B)u\| \tag{7.1}$$

且方程 $(\lambda I - B')v = 0$ 只有零解，则 B 是扇形算子。

证明　由 (7.1) 知，当 $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > R_0$, $|\arg\lambda| \geqslant \varphi$ 时，$(\lambda I - A)^{-1}$ 存在且对 $\forall u \in D((\lambda I - B)^{-1}) = R(\mu I - B)$

$$\|(\lambda I - B)^{-1}u\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|u\|$$

即

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}$$

现在证 $R(\lambda I - B) = X$. 因为 $(\lambda I - B)'v = (\lambda I - B')v = 0$ 只有零解，$\lambda I - B$ 是闭线性算子，若 $R(\lambda I - B)$ 是闭的，则 $(\lambda I - B) = X$，余下证明 $R(\lambda I - A)$ 是闭的。

对 $v_n \in R(\lambda I - B)$, $v_n \to v$，则 $\exists u_n \in D(B)$, $(\lambda I - B)u_n = v_n$，由(7.1)得

$$\|u_n - u_l\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|v_n - v_l\|$$

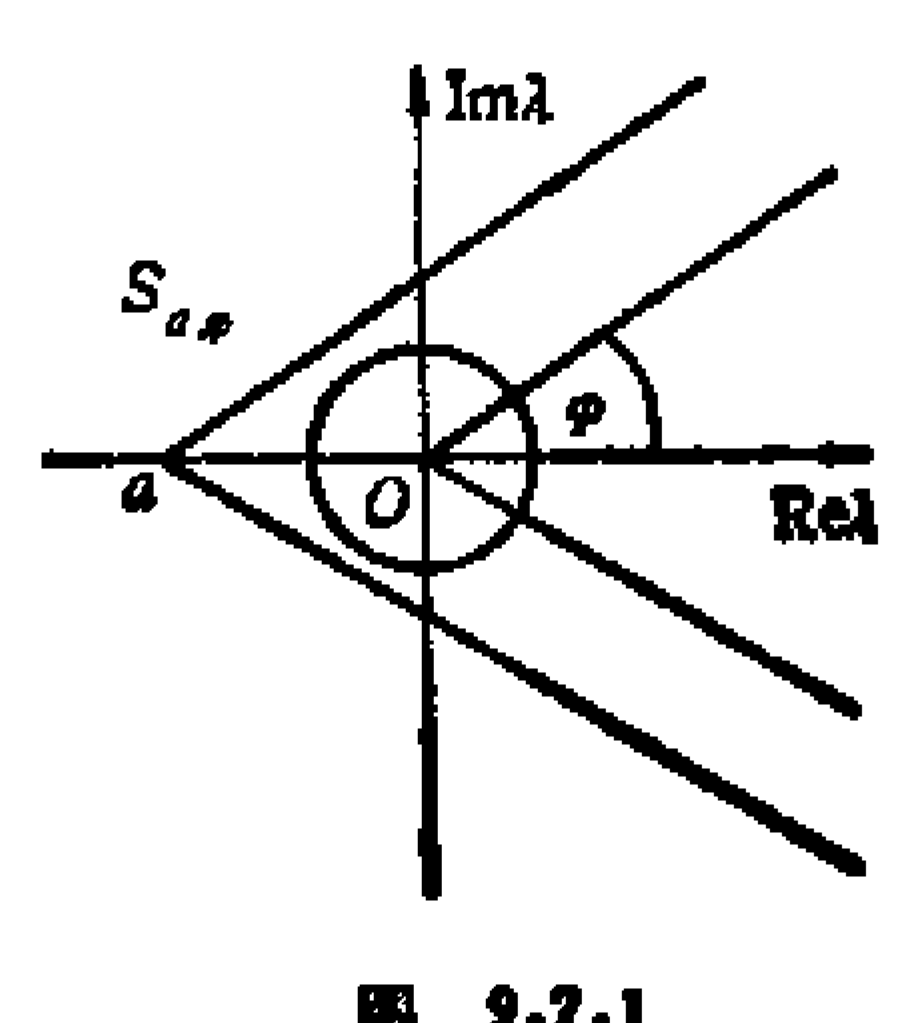


图　9.7.1

即 u_n 是 X 中的基本列，于是存在 $u \in X$, $u_n \to u$，由 $\lambda I - B$ 的闭性得 $u \in C(B)$, $v = (\lambda I - B)u$，即 $v \in R(\lambda I - B)$, $R(\lambda I - B)$ 是闭的。

最后求出相应的扇形 $S_{a,\varphi}$ (图 9.7.1)，对 $\lambda \in S_{a,\varphi}$

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} = \frac{C}{|\lambda - a|} \cdot \frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \leqslant \frac{C}{|\lambda - a|}$$

证毕。

为了利用定理 9.7.2，我们先引述关于先验估计的定理(不证明)。

定理 9.7.3　设 $1 < p < \infty$，则存在常数 $C > 0$，使得对任

意 $u\in W_p^{2m}(\Omega)\cap \mathring{W}_p^m(\Omega)$ 有

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C(\|Au\|_{0,p}+\|u\|_{0,p})$$

定理 9.7.4 设 $1<p<+\infty$. 则存在常数 $C>0$, $R>0$ 和 $0<\theta<\pi/2$, 使得对任意 $u\in W_p^{2m}(\Omega)\cap \mathring{W}_p^m(\Omega)$ 和复数 λ, $|\lambda|\geqslant R$, $\theta-\pi<\arg\lambda<\pi-\theta$, 有

$$\|u\|_{0,p}\leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I+A)u\|_{0,p}$$

其次证明 A_p 是闭算子，A_p 的共轭算子是 A_q^*。

引理 9.7.5 对 $1<p<+\infty$. A_p 在 $L_p(\Omega)$ 上是闭稠定的.

证明 因为$C_0^\infty(\Omega)\subset D(A_p)$，而$\overline{C_0^\infty(\Omega)}=L_p(\Omega)$，所以$\overline{D(A_p)}=L_p(\Omega)$. 设 $u_k\in D(A_p)$, $\|u_k-u\|_{0,p}\to 0$, $\|A_pu_k-v\|_{0,p}\to 0(k\to+\infty)$. 由定理 9.7.3

$$\begin{aligned}\|u_k-u_l\|_{m,p}&\leqslant\|u_k-u_l\|_{2m,p}\\&\leqslant C[\|A_p(u_k-u_l)\|_{0,p}+\|u_k-u_l\|_{0,p}]\end{aligned}$$

再由 L_p 中极限的唯一性得 u_k 在 $W_p^{2m}(\Omega)$ 与 $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ 中收敛到 u. 于是 $u\in D(A_p)$ 且 $\|u_k-u_l\|_{2m,p}\to 0(k\to+\infty)$. 因为 $\|A_p(u_k-u_l)\|_{0,p}\leqslant M(\|u_k-u_l\|_{2m,p})$，所以又有 $\|A_p(u_k-u)\|_{0,p}\to 0(k\to+\infty)$. $A_pu=v$. 因此，A_p 在 $L_p(\Omega)$ 是闭稠定的.

引理 9.7.6 对 $1<p<+\infty$. A_p 的共轭算子是 A_q^*.

证明 以 $<.,.>$ 记为共轭空间 $L_p(\Omega)$ 与 $L_q(\Omega)$ 之间的配对. A' 为 A_p 的共轭算子. 由分部积分可得

$$\langle A_pu,v\rangle=\langle u,A_q^*v\rangle(\forall u\in D(A_p),\ v\in D(A_q^*))\qquad(7.2)$$

因此，$D(A_q^*)\subset D(A')$ 且对 $v\in D(A_q^*)$. $A_q^*v=A'v$.

又设 $v\in D(A')$ 且 $w=A'v$. 由共轭算子的定义，

$$\langle A_pu,v\rangle=\langle u,w\rangle\quad(\forall u\in D(A_p))\qquad(7.3)$$

因为 $\overline{D(A_q^*)}=L_q(\Omega)$. 所以存在 $v_k\in D(A_q^*)$. 使得 $\|v_k-v\|_q\to 0(k\to+\infty)$. 由(7.2),

$$\langle A_pu,v_k\rangle=\langle u,A_q^*v_k\rangle$$

以及

$$\langle A_p u, v_k\rangle \to \langle A_p u, v\rangle \quad (k\to+\infty)$$

再由(7.3)得

$$\langle u, A_q^* v_k\rangle \to \langle u, w\rangle \quad (\forall u\in D(A_p))$$

因为 $\overline{D(A_p)} = L_p(\Omega)$，故得 $A_q^* v_k$ 弱收敛到 W。再由 A_q^* 的闭性，最后得 $v\in D(A_q^*)$。即 $D(A')\subset D(A_q^*)$。因此证明了 $A' = A_q^*$。证毕。

由上述定理和引理我们可证明

定理 9.7.7 设 $1 < p < +\infty$。则 A_p 是 $X = L_p(\Omega)$ 上的扇形算子，因而 $-A_p$ 是某解析半群的无穷小生成元。

证明 由引理 9.7.5 和引理 9.7.6，A_p 是 $L_p(\Omega)$ 上的闭调定线性算子，$A'_p = A_q^*$，对 A_p 和 A_q^* 利用定理 9.7.4。$\exists\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$R>0$，$C>0$。对 $\forall\lambda$，$|\lambda|\geqslant R$，$|\arg\lambda|\geqslant\varphi$，有

$$\|u\|_{0,p}\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I - A_p)u\|_{0,p} \quad (\forall u\in D(A_p))$$

$$\|v\|_{0,q}\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\|(\bar\lambda I - A_q)v\|_{0,q} \quad (\forall v\in D(A_q^*))$$

于是 $(\bar\lambda I - A'_p)v = \theta$ 只有零解。因此，由定理 9.7.2 A_p 是扇形算子。

9.7.2 由微分算子所确定的分数幂空间

取 $X = L_p(\Omega)$，现由 A_p 来构造分数幂空间。

总可取正数 a 使得 $\mathrm{Re}\sigma(A_p + aI) > 0$。于是有分数幂空间

$$X^\alpha = D((A_p + aI)^\alpha) \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

以下不妨设 $\mathrm{Re}\sigma(A_p) > 0$。

$$X^\alpha = D(A_p^\alpha)$$

由定理 9.7.3

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C(\|A_p u\|_{0,p} + \|u\|_{0,p}) \quad (\forall u\in D(A_p))$$

因为 A_p 在 $L_p(\Omega)$ 中存在有界逆算子，所以存在某常数 C 使

得

$$\|u\|_{2m,p} \leqslant C\|A_p u\|_{0,p} \quad (\forall u \in D(A_p)) \tag{7.4}$$

我们将讨论 X^α 的几个嵌入关系。为此先引述 Nirenberg-Gagliardo 不等式和嵌入定理。

引理 9.7.8 (Nirenberg-Gagliardo 不等式) 设 $\partial\Omega \in C^m$, $u \in W_p^m(\Omega) \cap L_r(\Omega)$.

1° 若 $q \geqslant p$, $q \geqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 且

$$k - \frac{n}{q} \leqslant \theta\left(m - \frac{n}{p}\right) - \frac{n(1-\theta)}{r}$$

当 p 或 $r = 1$ 时满足严格不等号，则有

$$\|u\|_{k,q} \leqslant C\|u\|_{m,p}^{\theta} \cdot \|u\|_{0,r}^{1-\theta}$$

2° 若 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 且 $\nu \leqslant \theta\left(m - \frac{p}{n}\right) - \frac{n(1-\theta)}{r}$($p = 1$ 或 $r = 1$，或 ν 是整数，满足严格不等号)，则有

$$\|u\|_{C^\nu} = \|u\|_\nu \leqslant C\|u\|_{m,p}^{\theta}\|u\|_{0,r}^{1-\theta}$$

引理 9.7.9 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是有界开区域，$\partial\Omega$ 光滑，则

$$W_p^{l+m}(\Omega) \subset W_q^l(\Omega) \quad \left(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n-mp},\ n-mp > 0\right)$$

$$W_p^m(\Omega) \subset L_\mu(\Omega) \quad (\mu = np/(n-mp),\ n-mp > 0)$$

$$W_p^k(\Omega) \subset C^\nu(\Omega) \quad \left(0 \leqslant \nu < k - \frac{n}{p}\right)$$

现在证明下列嵌入关系:

定理 9.7.10 设 $\partial\Omega \in C^m$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. 则

$$X^\alpha \subset W_q^k(\Omega) \quad \left(\text{当 } k - \frac{n}{q} < 2m\alpha - \frac{n}{p},\ q \geqslant p \text{ 时}\right)$$

$$X^\alpha \subset C^\nu(\bar{\Omega}) \quad \left(\text{当 } 0 \leqslant \nu < 2m\alpha - \frac{n}{p} \text{ 时}\right)$$

并且嵌入是连续的。

证明 由 Nironberg-Gaglinrdo 不等式 1° 知，若

$$q \geqslant p,\ k - \frac{n}{q} < \theta\left(m - \frac{n}{p}\right)$$

$$-\frac{n(1-\theta)}{p}=m\theta-\frac{n}{p} \tag{7.5}$$

则

$$\|u\|_{k,q}\leqslant C\|u\|_{m,p}^{\theta}\|u\|_{0,p}^{1-\theta} \tag{7.6}$$

由(7.4)和(7.6)得

$$\|u\|_{k,q}\leqslant C(\rho^{-1+\theta}\|A_p u\|_{0,p}+\rho^{\theta}\|u\|_{0,p})$$

对 $\forall\rho\geqslant\rho_0>C$ 和 $u\in D(A_p)$ 成立，若令 $B=D^{\beta}$，$|\beta|=k$，根据定理 9.5.17，$D(B)\supset D(A_p^{\theta})$ $(\theta<\alpha\leqslant 1)$，从而 $BA_p^{-\alpha}$ 是有界的．由已知条件，总可取 θ 满足(7.5)且 $\theta<\alpha$．又因为

$$X^{\alpha}=D(A_p^{\alpha})=R(A_p^{-\alpha})$$

由 $BA_p^{-\alpha}$ 的有界性立即得

$$X^{\alpha}\subset W_q^k(\Omega)$$

同理可证另一结论。证毕。

例 $\Omega\subset R^3$，$P=2$ 即 $X=L_2(\Omega)$，$A=-\Delta$，$D(A)=W_2^2(\Omega)\cap\mathring{W}_2^1(\Omega)$，由定理 9.7.10 知

$$X^{\alpha}\subset C^{\nu}(\bar{\Omega}),\ \text{当}\ \alpha>\frac{3}{4},\ \nu<(4\alpha-3)/2\ \text{时}$$

$$X^{\alpha}\subset W_q^1(\Omega),\ \text{当}\ \frac{1}{q}>(5-4\alpha)/6,\alpha>\frac{1}{2}\ \text{时}$$

$$X^{\alpha}\subset L_q(\Omega),\ \text{当}\ \frac{1}{q}>(3-4\alpha)/6\ \text{时}$$

9.7.3 一个例子

考虑初边值问题

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+A(x,D)u=f(t,x,u,\nabla u) & (x\in\Omega,\ t>0)\\ u(x,t)=0 & (x\in\partial\Omega,t>0)\\ u(x,0)=u_0(x) & (x\in\Omega)\end{cases}\right\} \tag{7.7}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界开区域，$\partial\Omega$ 是光滑的，$A(x,D)$ 是强椭圆算子

$$A(x,D)=-\sum_{k,i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{k,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$a_{k,i}(x)=a_{i,k}(x)$ 在 Ω 是实值连续可微的。

我们假设 $f(t,x,u,p)$ $(p\in\mathbf{R}^3)$ 对所有变元是局部 Lipschitz 的且存在连续函数 $\rho(t,r)$: $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$，对 r 是增函数，以及存在常数 $1\leq\gamma<3$ 使得

$$\left.\begin{aligned}&|f(t,x,u,p)|\leq\rho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma})\\&|f(t,x,u,p)-f(t,x,u,q)|\\&\qquad\leq\rho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma-1}+|q|^{\gamma-1})|p-q|\\&|f(t,x,u,p)-f(t,x,v,p)|\\&\qquad\leq\rho(t,|u|+|v|)(1+|p|^{\gamma})|u-v|\\&|f(t_1,x,u,p)-f(t_2,x,u,p)|\\&\qquad\leq\rho(t_1+t_2,|u|)(1+|p|^{\gamma})|t_1-t_2|\end{aligned}\right\}\tag{7.8}$$

取 $X=L_2(\Omega)$

$$Au=A(x,D)u$$
$$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$$

其中 $H^2(\Omega)=W_2^2(\Omega)$，$H_0^1(\Omega)=\mathring{W}_2^1(\Omega)$。则 $-A$ 是 $L_2(\Omega)$ 上一个解析半群的无穷小生成元，且 $\operatorname{Re}\sigma(A)>0$，可定义 $X^{\alpha}=D(A^{\alpha})$ $(0\leq\alpha\leq1)$。当

$$1>\alpha>\max\left(\frac{3}{4},(5\gamma-3)/4\gamma\right)$$

$$0\leq\nu<(4\alpha-3)/2$$

时

$$X^{\alpha}\subset W_{2\gamma}^1(\Omega)\cap C^{\nu}(\bar{\Omega})$$

且嵌入是连续的。

这时原问题(7.7)可写为 X 上的算子方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=F(t,u)\\u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{7.9}$$

其中 $F(t,u)(x)=f(t,x,u(x),\nabla u(x))$。

现证明 F 满足以下条件:

1° $F:\mathrm{R}_+\times X^\alpha\to X$，且将有界集映为有界集。

证明　由条件(7.8)得

$$\|F(t,u)\|_2\leqslant\rho(t,|u|_0)(M^{\frac{1}{2}}+\|u\|_{1,2\gamma}^\gamma)$$

其中 M 是 Ω 的测度。

2° $F:\mathrm{R}_+\times X^\alpha\to X$ 是局部 Lipschitz

证明　若 (t_1,u_1)，$(t_2,u_2)\in\mathrm{R}_+\times X^\alpha$，则有

$$\begin{aligned}
&|F(t_1,u_1)(x)-F(t_2,u_2)(x)|\\
&\quad\leqslant|f(t_1,x,u_1,\nabla u_1)-F(t_2,x,u_1,\nabla u_1)|\\
&\qquad+|f(t_2,x,u_1,\nabla u_1)-f(t_2,x,u_2,\nabla u_1)|\\
&\qquad+|f(t_2,x,u_2,\nabla u_1)-f(t_2,x,u_2,\nabla u_2)|\\
&\quad\leqslant\rho(t_1+t_2,|u_1|)(1+|\nabla u_1|^\gamma)|t_1-t_2|\\
&\qquad+\rho(t_2,|u_1|+|u_2|)(1+|\nabla u_1|^\gamma)|u_1-u_2|\\
&\qquad+\rho(t_2,|u_2|)(1+|\nabla u_1|^{\gamma-1}\\
&\qquad+|\nabla u_2|^{\gamma-1})|\nabla(u_1-u_2)|
\end{aligned}$$

因为

$$\int_\Omega[1+|\nabla u_1|^{2\gamma}]|u_1-u_2|^2dx$$

$$\leqslant M_1[1+\|u_1\|_{1,2\gamma}^{2\gamma}]|u_1$$

$$-u_2|_0^2\int_\Omega[1+|\nabla u_1|^{2\gamma-2}+|\nabla u_2|^{2\gamma-2}]$$

$$|\nabla(u_1-u_2)|^2dx\leqslant M_2\left[\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)|^{2\gamma}dx\right]^{\frac{1}{2\gamma}\cdot 2}$$

$$\cdot\left[\left(\int_\Omega|\nabla u_1|^{2\gamma}dx\right)^{\frac{2\gamma-2}{2\gamma}}+\left(\int_\Omega|\nabla u_2|^{2\gamma}dx\right)^{\frac{2\gamma-2}{2\gamma}}\right]$$

所以

$$\begin{aligned}
&\|F(t_1,u_1)-F(t_2,u_2)\|_{0,2}\leqslant M\rho(t_1+t_2,|u_1|_0)\\
&\cdot|t_1-t_2|(1+\|u_1\|_{1,2\gamma}^\gamma)+M\rho(t_2,|u_1|_0+|u_2|_0)\\
&\cdot(1+\|u_1\|_{1,2\gamma}^\gamma)|u_1-u_2|_0+M\rho(t_2,|u_2|_0)\\
&\cdot(1+\|u_1\|_{1,2\gamma}^{\gamma-1}+\|u_2\|_{1,2\gamma}^{\gamma-1})\|u_1-u_2\|_{1,2\gamma}\\
&\leqslant C(t_1,t_2,\|u_1\|_\alpha,\|u_2\|_\alpha)[|t_1-t_2|
\end{aligned}$$

$+\|u_1 - u_2\|_\alpha]$

$C(\cdot)$ 是常数，依赖于 $t_1, t_2, \|u_1\|_\alpha, \|u_2\|_\alpha$。

因此，当 $u_0 \in X^\alpha$ 时，在某极大区间 $0 \le t < t_1$ 上(7.9)有唯一解 $u(t;u_0)$，并且或 $t_1 = +\infty$，或 $t \to t_1 - 0$ 时 $\|u(t;u_0)\| \to +\infty$。

下面证明这个解 $u(t;u_0) = u(x,t)$ 实际上是 (7.9) 的古典解。

因为当 $0 < t < t_1$ 时 $u \in D(A) \subset C(\bar{\Omega})$ 且由定理 9.6.10 知，$\to \frac{du}{dt} \in X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的。所以 $(x,t) \to u(x,t)$ 和 $(x,t) \to \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$ 在 $\bar{\Omega} \times (0,t_1)$ 上连续。当 $0 < t < t_1$ 时 $u(\cdot,t) \in D(A)$，我们有 $\nabla u \in W^1_{q_1}(\Omega) \subset L_{p_1}$，$q_1 = 2$，$p_1 = 6/(3-2) = 6$。所以 $Au = F(t,u) - \frac{du}{dt} \in L_{p_1/\gamma}(\Omega)$，这蕴含着 $u \in W^1_{q_1/\gamma}(\Omega)$ 且 $\nabla u \in W^1_{q_2}(\Omega)$，$q_2 = 6/\gamma > 2$。重复这种论证可得 $\nabla u \in W^1_{q_n}(\Omega)$，其中 $\frac{1}{q_n} = \gamma\left(\frac{1}{q_{n-1}} - \frac{1}{3}\right)$。因为 $1 \le \gamma < 3$，我们最终可得 $q_n > 3$ 并且 $\nabla u(\cdot,t)$ 是 Hölder 连续的。于是 $F(t,u)$ 在Ω上是 Hölder 连续的。因为 $\alpha > 3/4$。且 $\frac{\partial}{\partial t} u(\cdot,t) \in X^\alpha$，所以 $\frac{\partial}{\partial t} u(\cdot,t)$ 是 Hölder 连续。$Au = F(t,u) - \frac{du}{dt}$ 也就是 Hölder 连续。由椭圆型方程的正则性定理得到，对某 $\theta > 0$，$u(\cdot,t) \in C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$。因此，当 $t > 0$ 时 $(x,t) \to u(t)$ 关于 t 连续可微，关于 x 两次连续可微，$u(x,t)$ 是古典解。

习　题　九

9.1 以 $\bar{D}^+w$ 记为 w 的右上导数

$$\bar{D}^+w(t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{w(t+h) - w(t)}{h}$$

设实函数 $w(t)$ 在 $[a,b)$ 连续且右上可导。证明：

(1) 若 $w(a)\leqslant 0$ 且在 $[a,b)$ 上 $\bar{D}^+w\leqslant -\alpha<0$，则在 $[a,b)$ 上 $w(t)\leqslant 0$。

(2) 若 $w(a)\leqslant 0$ 且在 $[a, b)$ 上 $\bar{D}^+w\leqslant 0$，则在 $[a, b)$ 上 $w(t)\leqslant 0$。

(3) 若在 $[a,b)$ 上 $\bar{D}^+w(t)\leqslant 0$，则 $w(t)$ 在 $[a,b)$ 单调下降。

(4) 若在 $[a,b)$ 上 $\bar{D}^+w(t)=0$，则 $w(t)$ 在 $[a,b)$ 上为常数。

9.2 设 $\varphi(t)\in C[a, b)$，$\varphi(t)$ 的右上导数 $\bar{D}^+\varphi(t)\in C[a, b)$。证明：$\varphi(t)\in C^1[a,b)$ 且 $\varphi'(t)=\bar{D}^+\varphi(t)(t\in[a,b))$。

9.3 设抽象函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ Reimann 可积，即存在 $\exists\int_a^b f(t)dt$。又设 B 是闭线性算子，$Bf(t)$ 在 $[a, b]$ 上 Reimann 可积，即存在 $\int_a^b Bf(t)dt$。证明：$\int_a^b f(t)dt\in D(B)$ 且

$$B\left(\int_a^b f(t)dt\right)=\int_a^b Bf(t)dt$$

9.4 设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积，对 $\forall\varepsilon>0$，在 $[a+\varepsilon,b]$ 上 Reimann 可积，B 是闭线性算子，$Bf(t)$ 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上 Reimann 可积. 证明

$$B\left(\int_a^b f(t)dt\right)=\int_a^b Bf(t)dt$$

9.5 设 X 是 Banach 空间，$B:X\to X$ 是有界线性算子，令 $T(t)=e^{tB}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!}$。证明：

(1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!}$ 对 t 的任意有限区间是一致收敛的，它定义了 X 上的一个有界线性算子族。

(2) $T(t)(t\geqslant 0)$ 是一致连续半群，即满足：

1° $T(0)=I$，

2° $T(t+s)=T(t)T(s)\quad(\forall t, s\geqslant 0)$，

3° $\lim_{t\to 0+}\|T(t)-I\|=0$。

(3) B 是 $T(t)$ 的无穷小生成元，且

$$\lim_{h\to 0+}\frac{T(h)-I}{h}=B$$

9.6 设 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。$T(t)$ 满足 $\|T(t)\|\leqslant$

$M(\forall t\geqslant 0)$。又设 $x\in D(A^2)$。证明：

(1) $T(t)x-x=tAx+\int_0^t(t-s)T(s)A^2xds$；

(2) $\|Ax\|\leqslant\frac{2M}{t}\|x\|+\frac{Mt}{2}\|A^2x\|$；

(3) $\|Ax\|^2\leqslant 4M^2\|A^2x\|\|x\|$。

9.7　令 $X=\{f|f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界且一致连续$\}$，$\forall f\in X$，定义

$$\|f\|=\sup_{(-\infty,+\infty)}|f(x)|,(T(t)f)(x)=f(x+t)$$
$$(Bf)(x)=f'(x)$$
$$f\in D(B)=\{f|f\in X,f'\in X\}$$

证明：

(1) $T(t)$ 是 C_0 半群，$\|T(t)\|\leqslant 1$.

(2) B是 $T(t)$ 的无穷小生成元.

(3) 若 $f,f',f''\in X$，则

$$(\sup_{(-\infty,+\infty)}|f'(x)|)^2\leqslant 4(\sup|f''(x)|)\cdot(\sup|f(x)|)$$

9.8　设 $T(t)$ 是X上的 C_0 半群. 证明：

(1) 若对 $\forall t>0$，$V(t):t\to X$ 连续，则

$$\lim_{h\to 0}T(t+h)V(t+h)=T(t)V(t)$$

(2) 若 $T(t)$ 以 $-A$ 为无穷小生成元，$V(t):t\to X$ 对 $\forall t>0$ 可微且 $V(t)\in D(A)$. 则对 $\forall 0<s<t$，$T(t-s)\cdot V(s)$ 对 S 可微且

$$\frac{\partial T(t-s)V(s)}{\partial s}=T(t-s)V'(s)+AT(t-s)V(s)$$

9.9　设 $T(t)$ 是 C_0 半群，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，$\omega$ 为实数，

$$R(\lambda)x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt\quad(\forall x\in X,\mathrm{Re}\lambda>\omega)$$

证明：

(1) 对 $\forall x\in X$，

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R(\lambda)x=x$$

(2) B是 $T(t)$ 的无穷小生成元，则

$$R(\lambda)Bx=BR(\lambda)x\quad(\forall x\in D(B),\ \mathrm{Re}\lambda>\omega)$$

9.10　设 $X=\mathbf{C}^n$. A是 $n\times n$ 矩阵，$A=NDN^{-1}$，其中 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是对角矩阵，λ_k 是 A的特征值 $(k=1,2,\cdots,n)$. N是酉矩阵. 证

明：

(1) $\mathrm{Re}(Au,u)\leqslant\omega\|u\|^2(\forall u\in X)$. 其中 $\omega=\max\{\mathrm{Re}\lambda_k\}$.

(2) 对 $\forall f\in X$, $\mathrm{Re}\lambda>\omega$.

$$\|R(\lambda,A)\|\leqslant\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}.$$

9.11 设 $X=\mathbf{C}^2$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 证明：

(1) $R(\lambda,A)^k=\begin{pmatrix}\lambda^{-k}&k\lambda^{-k-1}\\0&\lambda^{-k}\end{pmatrix}$ $(\lambda\neq0)$.

(2) $\|R(\lambda,A)^k\|\leqslant\left(1+\frac{k}{|\lambda|}\right)|\lambda|^{-k}$ $\quad(\lambda\neq0)$.

(3) 对 $\forall 0<\omega\leqslant1$, $\forall\lambda>\omega$

$$(1+k\lambda^{-1})(\lambda-\omega)^k\lambda^{-k}\leqslant\omega^{-1}.$$

(4) 对 $\forall\omega\in(0,1]$

$$\|R(\lambda,A)^k\|\leqslant\frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^k}\frac{1}{\omega}$$

9.12 设 $X=\mathbf{C}^2$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 生成的 C_0 半群 $T(t)$.

(2) 求 $\|T(t)\|$ 的形如 $Me^{\omega t}$ 的估计式.

9.13 令 $X=C_0(\mathbf{R})=\{u\,|\,u\in C(\mathbf{R}),\ u(\pm\infty)=0\}$, 对 $\forall u\in X$, 令 $\|u\|=\sup\limits_{x}|u(x)|$, 则 X 是 Banach 空间. 考察一个初值问题.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial U}{\partial x}=0 & (0\leqslant t<+\infty)\\ U(\pm\infty,t)=0 & (0\leqslant t<+\infty)\\ U(x,0)=U_0(x)\end{cases}$$

将它改写成

$$\frac{du}{dt}+Au=0$$

$$u(0)=U_0$$

其中

$$(Au)(x)=u'(x)$$

$$(\forall u \in D(A) = \{u \mid u \in X,\ u' \in X\})$$

$U_0 \in X$。证明：

(1) A是X上的闭稠定线性算子。

(2) 对 $\forall \lambda \in \mathbf{C}$，$\mathrm{Re}\lambda < 0$，$\forall v \in X$，

$$\begin{cases} u' - \lambda u = v \\ u(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

有唯一解。

(3) $\rho(A) \supset \{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ 且

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Re}\lambda|}$$

(4) 存在 C_0 半群 $T(t)$ 以 $-A$ 为无穷小生成元，并求出 $T(t)$。

9.14 设 $X = L_2(\Omega)$，定义算子 A：

$$Au = \Delta u,\quad u \in D(A) = W_2^2(\Omega) \cap {}_0W_2^1(\Omega)$$

证明：

(1) A是闭稠定算子。

(2) 对 $\forall u \in D(A)$，$(Au, u) \leqslant 0$，$(\cdot\,,\cdot)$ 是 $L_2(\Omega)$ 中的内积。

(3) 存在 C_0 半群 $T(t)$ 以A为无穷小生成元且 $\|T(t)\| \leqslant 1$。

9.15 证明引理 9.3.13 与推论 9.3.14。

9.16 证明引理 9.3.19。

9.17 证明推论 9.3.20。

9.18 设A是Banach 空间X中的扇形算子，$0 \in \rho(A)$。令 $X^1 = D(A)$，对 $\forall x \in X^1$，令 $\|x\|_1 = \|Ax\|$。证明 X^1 是 Banach 空间。

9.19 设A是扇形算子，$0 \in \rho(A)$，$T(t) = e^{-tA}$。证明：对 $\forall 0 < \alpha \leqslant 1$，存在常数 C_α，使得对 $\forall t > 0$，$h > 0$，有

$$\|T(t+h) - T(t)\| \leqslant C_\alpha h^\alpha t^{-\alpha}$$

9.20 设A是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$。证明下列条件是等价的：

1° 对 $\forall \alpha > 0$，$A^{-\alpha}$ 是紧的；

2° A^{-1} 是紧的；

3° 对 $\forall t > 0$，e^{-At} 是紧的。

9.21 设A是扇形算子。证明：

(1) 对 $\forall x \in X$，$\lim\limits_{t\to 0+} \|tAe^{-At}x\| = 0$。

(2) 对 $\forall x \in X$，$t \mapsto tAe^{-At}x$ 为 $[0, +\infty) \to X$ 连续.

9.22　设 A 是扇形算子，$\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$。证明：对 $\forall 0 < \alpha \leqslant 1$，$x \in X$.

$$\lim_{t \to 0+} t^{\alpha} \|A^{\alpha} e^{-At} x\|_X = 0$$

第十章 抽象理论——动力系统与平衡点的稳定性

10.1 动 力 系 统

我们考察自治方程

$$\frac{du}{dt}+Au=f(u) \tag{1.1}$$

其中 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子，对某个 $0\leq\alpha<1$，U 是 X^{α} 中的一个开集，而 $f:U\to X$ 是局部 Lipschitz 的。我们还假定 E 是 U 的闭子集，如果 $u(0)\in E$，则(1.1)的解 $u(t)$ 对于一切 $t\geq 0$ 存在且 $u(t)\in E$（E 是正不变的）。若 $u(t;x)$ 是(1.1)满足初值 $u(0;x)=x$ 的解，则由

$$S(t)x=u(t;x)\quad(x\in E,\ t\geq 0) \tag{1.2}$$

确定了度量空间 E 上的一族映射 $\{S(t):E\to E,\ t\geq 0\}$，它满足：

1° 对每一 $t\geq 0$，$S(t)$ 从 E 到 E 是连续的（(1.1)的解 $u(t;x)$ 对初值 x 是连续的），

2° 对每一 $x\in E$，$t\to S(t)x$ 是连续的（$u(t;X)$ 对 t 可微，当然连续），

3° 在 E 上 $S(0)$ 是恒同映射（$u(0;x)=x$），

4° 对一切 $x\in E$ 和 $t,\tau\geq 0$，

$$S(t)(S(\tau)x)=S(t+\tau)x$$

（因为 $u(t+\tau;x)$ 也是(1.1)的解，$u(\tau,x)=u(0;u(\tau;x))$，由唯一性知，$u(t+\tau;x)=u(t;u(\tau;x))$）。

我们将一般地讨论满足上述性质的映射族。

定义 10.1.1 在度量空间 E 上的一个动力系统(非线性半群)是一族映射 $\{S(t): E \to E; t \geqslant 0\}$，它满足上述性质 1°—4°。

因此，由(1.2)确定了 E 上的动力系统。对于方程(1.1)，若 A 是 X 中的扇形算子，要证它确定一个动力系统，只须证明：

(1) 有开集 $U \subset X^{\alpha}$ (某 $0 \leqslant \alpha < 1$)，$f: U \to X$ 是局部 Lipschitz 的；

(2) U 中存在(1.1)的闭的正不变集。

定义 10.1.2 设 $S(t)$ 是 E 上的动力系统，对任意给定的 $x \in E$，点集

$$\gamma(x) = \{S(t)x \mid t \geqslant 0\}$$

称为通过 x 的轨道(正半轨)。点集

$$\gamma(x; t_1, t_2) = \{S(t)x \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$$

称为轨道的有限弧，正数 $t_2 - t_1$ 叫做这一弧段的时间长度。

有两种特殊类型的轨道：

1° 平衡点。若 $\gamma(x) = \{x\}$，则称 x 为动力系统的平衡点。等价条件是：对任意 $t \geqslant 0$，$S(t)x = x$。

2° 周期轨道。若存在 $\tau > 0$，使得

$$\gamma(x) = \{S(t)x,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\} \neq \{x\}$$

则称 $\gamma(x)$ 为周期轨道。

容易证明：

1° 若 $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t)y = x$，则 x 是平衡点。

2° 若存在 $l > 0$，对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$S(t)x = S(t+l)x$$

又 x 不是平衡点，则存在最小正数 τ，使得对一切 $t \geqslant 0$ 有 $S(t)x = S(t+\tau)x$，因而

$$\gamma(x) = \{S(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$$

我们还常考虑动力系统的如下连续性：对任意 $x \in E$ 及任意 $T > 0$，若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $y \in E$，$\rho(y, x) < \delta$，$t \in [0, T]$ 时，有

$$\rho(S(t)y, S(t)x) < \varepsilon$$

则称动力系统对空间变量 x 连续，关于有限时间 t 一致，其中 $\rho(\cdot,\cdot)$ 表示 E 中两点的距离。

由 (1.1) 确定的动力系统在上述假定下就具有这种连续性。

本章主要讨论动力系统的极限性质与平衡点的稳定性。先讨论抽象的动力系统，然后讨论由自治方程 (1.1) 所确定的动力系统。

10.2 Liapunov 函数与稳定性判别准则

设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是度量空间 E 上的一个动力系统，与 1.8.1 中常微分方程平衡点稳定性概念类似，我们引进动力系统平衡点的各种稳定性定义。

设 $x_0 \in E$ 是 $S(t)$ 的平衡点。

定义 10.2.1 若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $x \in E$，$\rho(x, x_0) < \delta$ 时对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$\rho(S(t)x, x_0) < \varepsilon$$

则称 $x = x_0$ 是(局部) 稳定的。若存在 $\eta > 0$，当 $x \in E$，$\rho(x, x_0) < \eta$ 时

$$\lim_{t \to +\infty} S(t)x = x_0 \tag{2.1}$$

则称 $x = x_0$ 是吸引的。集合 $\{x \mid x \in E, \lim\limits_{t \to +\infty} S(t)x = x_0\}$ 称为 x_0 的吸引区域。若 x_0 既是稳定的又是吸引的，则称 x_0 是 (局部) 渐近稳定的。若 x_0 是稳定的且 E 是 x_0 的吸引区域，则称 x_0 是全局渐近稳定的。

下面利用 Liapunov 函数讨论平衡点的稳定性。

定义 10.2.2 设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是度量空间 E 上的动力系统。E 上的一个实值连续函数 V，对一切 $x \in E$ 有

$$\dot{V}(x) = \lim_{t \to 0+} \operatorname{Sup} \frac{1}{t} [V(S(t)x) - V(x)] \leqslant 0$$

$\dot{V}(x)$ 是 $V(S(t)x)$ 在 $t = 0$ 处的右上导数，则称之为 Liapunov 函

数。由定义可知，Liapunov 函数 $V(x)$ 有以下性质：

1° 对任意 $x\in E$，$t\geqslant 0$

$$\dot{V}(S(t)x)=\lim_{\Delta t\to 0+}\operatorname{Sup}\frac{1}{\Delta t}[V(S(t+\Delta t)x)$$
$$-V(S(t)x)]\leqslant 0$$

证明

$$V(S(t+\Delta t)x)-V(S(t)x)$$
$$=V(S(\Delta t)S(t)x)-V(S(t)x)$$

令 $y=S(t)x$。则 $\dot{V}(S(t)x)=\dot{V}(y)\leqslant 0$。

2° 当 $x\in E$ 时，对一切 $t\geqslant 0$，$V(S(t)x)$ 是非增的。

证明　$V(S(t)x)$ 对 t 连续，对 t 的右上导数 $\dot{V}(S(t)x)\leqslant 0$，所以 $V(S(t)x)$ 对 $t\geqslant 0$ 非增。

3° 若 $V(0)=0$，则存在 $r>0$，当 $\|x\|<r$ 时

$$V(x)\leqslant b(\|x\|)$$

其中 $b(\cdot)$ 是 $[0,r]$ 上的连续严格增函数，$b(0)=0$，$\|x\|=\rho(x,\theta)$。

证明　因为 $V(0)=0$，又 $V(x)$ 连续，所以存在 $r>0$，当 $\|x\|\leqslant r$ 时 $|V(x)|\leqslant K$，K 为常数。

令 $b_1(\|x\|)=\sup\limits_{\|y\|\leqslant\|x\|}|V(y)|$；$\|x\|\leqslant r$，再令 $b(\|x\|)=b_1(\|x\|)+\|x\|$ 即可。

下面的定理给出了经由 Liapunov 函数给出的关于平衡点 $x=\theta$ 的稳定性的判别准则。函数类 $K[0,r]$，$K[0,+\infty)$，KR 由定义 1.8.7 给出。

定理 10.2.3　设 $S(t):t\geqslant 0$ 是 E 上的动力系统，θ 是它的平衡点。又设 V 是 E 上的 Liapunov 函数，满足 $V(0)=0$，$a(\|x\|)\leqslant V(x)(x\in E,\|x\|<r)$，其中 $a(\cdot)\in K[0,r]$，$\|x\|=\rho(x,\theta)$，则 $x=\theta$ 是稳定的。

若又有 $\dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|)$ $(x\in E,\|x\|<r)$，$c(\cdot)\in K[0,r]$，则 $x=\theta$ 是渐近稳定的，且对 x，$\|x\|<r_0\leqslant r$ 是一致的，即

任给 $\varepsilon>0$，存在 $T>0$，当 $t>T$ 时对一切 $x\in E$，$\|x\|<r_0$ 有 $\|S(t)x\|<\varepsilon$。

证明　先证稳定性。由 $V(0)=0$ 及 $V(x)$ 的连续性知，任给 $0<\varepsilon<r$，存在 $0<\delta<r$，当 $\|x\|<\delta$ 时 $V(x)<a(\varepsilon)$。又存在 $\sigma>0$，当 $0\leqslant t<\sigma$ 时 $\|S(t)x\|<r$，于是

$$a(\|S(t)x\|)\leqslant V(S(t)x)\leqslant V(x)<a(\varepsilon)$$

故当 $0\leqslant t<\sigma$ 时

$$\|S(t)x\|<a^{-1}(a(\varepsilon))=\varepsilon$$

由此显见，当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，上式成立，即 $x=\theta$ 稳定。

为证第二个结论，考察

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}+c(b^{-1}(w))=0\\ w(0)=w_0\end{cases}\tag{2.2}$$

其中 $b\in K[0,r_1]$，满足 $V(x)\leqslant b(\|x\|)$。不妨设 $r_1=r$。b 存在反函数 b^{-1}，$b^{-1}\in K[0,b(r)]$。令 $w_0=\sup[V(x):\|x\|\leqslant\varepsilon_0]$，其中 $0<\varepsilon_0<r$ 充分小，使得当 $0\leqslant s\leqslant w_0$ 时 $b^{-1}(s)\in[0,r]$。记 (2.2) 的最大解为 $w_M(t)$，则在解的存在区间上 $w_M(t)\geqslant 0$。因为，若存在第一个使 $w_M(t)$ 为零的 $t=t_0$，则

$$w^*(t)=\begin{cases}w_M(t) & (0\leqslant t\leqslant t_0)\\ 0 & (t>t_0)\end{cases}$$

也是(2.2)的解，于是 $w_M(t)\geqslant w^*(t)\geqslant 0$。显然，在解的存在区间上 $w_M(t)$ 单调下降，因而解的存在区间是 $[0,+\infty)$，$\lim\limits_{t\to+\infty}w_M(t)=l$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{dw_M}{dt}=0$，再由(2.2)得 $l=0$，即 $\lim\limits_{t\to+\infty}w_M(t)=0$。

已经证明：存在 $0<r_0\leqslant r$，ε_0，当 $\|x\|<r_0$ 时 $\|S(t)x\|\leqslant\min(r,w_0)$。于是

$$\dot V(S(t)x)\leqslant -c(\|S(t)x\|)$$

又

$$V(S(t)x)\leqslant b(\|S(t)x\|)$$

$$-c(\|S(t)x\|)\leqslant -c(b^{-1}(V(S(t)x))$$

所以

$$\dot{V}(S(t)x)\leqslant -c(b^{-1}(V(S(t)x)))$$

$$V(S(0)x)-V(x)\leqslant w$$

与(2.2)比较，根据定理 1.2.3 得

$$V(S(t)x)\leqslant w_M(t)\quad (t\geqslant 0)$$

因此

$$\|S(t)x\|\leqslant a^{-1}(w_M(t))\quad (t\geqslant 0,\ \|x\|<r_0)$$

即 $x=\theta$ 渐近稳定，且对 $\|x\|<r_0$ 一致，证毕。

10.3 动力系统的极限性质与不变性原理

如果我们求得了动力系统的 Liapunov 函数 $V(x)$，但它不满足定理 10.2.3 中给出的附加条件，我们还是可以利用 Liapunov 函数来讨论动力系统的极限性质。先引进动力系统的极限集，然后讨论极限集与 Liapunov 函数的关系。

10.3.1 极限集

在完备度量空间 E 上给定动力系统 $\{S(t):t\geqslant 0\}$。通过 $x\in E$ 的轨线为 $\gamma(x)$。

定义 10.3.1 若存在 $t_n>0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=+\infty$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}S(t_n)x_0=x$$

则称 x 为 $\gamma(x_0)$ 或 x_0 的 ω 极限点。$\gamma(x_0)$（或 x_0）的 ω 极限点集，记为 $L_\omega(x_0)$。

等价定义是：

$$L_\omega(x_0)=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\gamma(S(\tau)x_0)}=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\{S(t)x_0:t\geqslant\tau\}}$$

证明　若 $x\in L_\omega(x_0)$，则存在 $t_n\to+\infty$，$S(t_n)x_0\to x$. 对任意 $\tau\geqslant 0$，存在 N，当 $n>N$ 时 $t_n\geqslant\tau$，于是 $S(t_n)x_0\in$

$\{S(t)x_0: t \geqslant \tau\}$，即 $x \in$ 等式右端。反之，若 $x \in$ 等式右端，则对任意自然数 n，$x \in \{\overline{S(t)x_0; t \geqslant n}\}$。于是存在 $x_n \in \{S(t)x_0: t \geqslant n\}$，即存在 $t_n \geqslant n, x_n = S(t_n)x_0$，使得 $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$。因此，当 $n \to +\infty$ 时，$t_n \to +\infty$，$x_n \to x$，即 $x \in L_\omega(x_0)$。证毕。

定理 10.3.2（极限集的一般性质）

1° $L_\omega(x_0)$ 是闭的。

2° 若 $x_1 \in \gamma(x_0)$，则 $L_\omega(x_0) = L_\omega(x_1)$。

3° $L_\omega(x_0)$ 是正不变集。

证明留给读者。

定理 10.3.3（紧轨线的极限集） 设 $x_0 \in E$，$\gamma(x_0)$ 包含在 E 的紧集内。则

1° $L_\omega(x_0)$ 是非空的紧集。

2° 当 $t \to +\infty$ 时

$$\rho(S(t)x_0,\ L_\omega(x_0)) \to 0$$

3° $L_\omega(x_0)$ 是连通的(区域连通)。

4° $L_\omega(x_0)$ 是不变集：对任意 $y_0 \in L_\omega(x_0)$，存在一条连续曲线 $x: \mathrm{R}^1 \to L_\omega(x_0)$，满足 $x(0) = y_0$ 和

$$S(t)x(\tau) = x(t + \tau) \quad (-\infty < \tau < +\infty,\ t \geqslant 0)$$

证明 1° $L_\omega(x_0)$是非空的递减的紧集族的交集，所以 $L_\omega(x_0)$ 非空且是紧的。

证明 2° 若不然，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，$t_n \to +\infty$，使得

$$\rho(S(t_n)x_0,\ L_\omega(x_0)) \geqslant \varepsilon_0 \tag{3.1}$$

令 $x_n = S(t_n)x_0$，则 $x_n \in \gamma(x_0)$。由紧性，不妨设 $x_n \to x^*$，则 $x^* \in L_\omega(x_0)$。于是

$$\rho(S(t_n)x_0,\ L_\omega(x_0)) \leqslant \rho(S(t_n)x_0, x^*) \to 0$$

与(3.1) 矛盾。

证明 3° 见定理 1.6.6 的证明。

证明 4° 设 $y_0 \in L_\omega(x_0)$，则存在 $t_n \to +\infty$，$S(t_n)x_0 \to y_0$。根据紧性，存在子列 $t_n^{(1)} \to +\infty$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} S(t_{n^{(1)}}-1)x_0=y_1$$

存在。继续取子序列，然后按通常方法取对角线序列 $t_{n'}\to+\infty$，使得对 $j=0,1,2,3,\cdots$，当 $n'\to+\infty$ 时存在极限

$$S(t_{n'}-j)x_0\to y_j\quad(j=0,1,2,\cdots)$$

对 $-\infty<t<+\infty$，定义

$$y(t)=S(t+j)y_j$$

其中 $j\geqslant 0$，$j\geqslant -t$。定义的合理性在于：当 $k\geqslant j\geqslant -t$ 时 $S(t+k)y_k=S(t+j)y_j$。因为

$$S(t+k)y_k=S(t+k)\lim_{n'\to\infty} S(t_{n'}-k)x_0$$

$$=\lim_{n'\to+\infty} S(t+t_{n'})x_0$$

同理

$$S(t+j)y_j=\lim_{n'\to+\infty} S(t+t_{n'})x_0$$

所以

$$S(t+j)y_j=S(t+k)y_k$$

现证明 $y(t)$ 满足要求：

(1) $y(0)=S(0+0)y_0=y_0$。

(2) $S(t)y(\tau)=S(t)S(\tau+j)y_j$

$$=S(t+\tau+j)y_j=y(t+\tau)$$

(3) 因为 $L_\omega(x_0)$ 是正不变集，又 $y_j\in L_\omega(x_0)$，所以 $S(t+j)y_j\in L_\omega(x_0)(j\geqslant -t)$，即当 $t\in(-\infty,+\infty)$ 时 $y(t)\in L_\omega(x_0)$，$y:\mathbf{R}^1\to L_\omega(x_0)$。

(4) 显然 $y(t)$ 是连续。

证毕。

推论 10.3.4 在定理 10.3.3 的条件下，$L_\omega(x_0)$ 只有唯一的点 p_0 的充要条件是：

$$\lim_{t\to+\infty} S(t)x_0=p_0$$

10.3.2 极限集与 Liapunov 函数的关系．动力系统的极限性质

定理10.3.5 设 V 是 E 上的 Liapunov 函数，定义 $E_V=\{x|x$

$\in E, \dot{V}(x)=0\}$，M是 E_V 的最大不变子集。若 $\gamma(x_0)$ 包含在 E 中的一个紧集内，则

1° $L_\omega(x_0)\subset M$；

2° $t\to+\infty$ 时 $S(t)x_0\to M$。

证明 因为 $t\geqslant 0$ 时 $S(t)x_0$ 包含在紧集内，所以 $V(S(t)x_0)$ 有下界，又它对 $t\geqslant 0$ 非增，所以存在极限

$$\lim_{t\to+\infty} V(S(t)x_0)=l$$

$L_\omega(x_0)$ 是非空的。若 $y\in L_\omega(x_0)$，则存在 $t_n\to+\infty$，$S(t_n)x_0\to y$，于是 $l=V(y)$。由 $L_\omega(x_0)$ 的正不变性，对任意 $t\geqslant 0$，$S(t)y\in L_\omega(x_0)$，所以

$$V(S(t)y)=l,\ \dot{V}(y)=0$$

即 $y\in E_V$，因此 $L_\omega(x_0)\subset E_V$，又 $L_\omega(x_0)$ 是不变集，而M是 E_V 的最大不变子集，所以 $L_\omega(x_0)\subset M$。

最后由

$$\rho(S(t)x_0,M)\leqslant\rho(S(t)x_0,\ L_\omega(x_0))\to 0\quad(t\to+\infty)$$

得当 $t\to+\infty$ 时

$$S(t)x_0\to M$$

证毕。

推论 10.3.6 设V是E上的一个 Liapunov 函数.若$\gamma(x_0)$包含在E中的一个紧集内，则对任意 $y\in L_\omega(x_0)$，有

$$V(S(t)y)=\text{常数}\quad(t\geqslant 0)$$

推论 10.3.7 在推论 10.3.6 的条件下，若对任意 $x\in E$，x不是平衡点，$V(S(t)x)$ 是严格下降的，则对任意 $y\in L_\omega(x_0)$，y 是 $S(t)$ 的平衡点。

定义 10.3.8 若V是E上的一个 Liapunov 函数，又 $E_V=\{x\mid x\in E,\dot{V}(x)=0\}$ 属于平衡点集，则称V是E上的严格 Liapunov 函数。

推论 10.3.9 设V是E上的一 个 严 格 Liapunov 函 数，若 $\gamma(x_0)$ 包含在E中的一个紧内，则

1° $L_\omega(x_0)$ 属于平衡点集，

2° 若平衡点是孤立的，则 $L_\omega(x_0)$ 由一个平衡点组成。

10.3.3 关于不稳定性的一个结论

定理 10.3.10 设 x_0 是 E 中的平衡点，N 是 x_0 在 E 中的一个邻域，U 是 E 中的开集，$x_0 \in \overline{U}$。记 $G = N \cap U$。
假定：

1° V 是 $\overline{G}$ 上的 Liapunov 函数；

2° $\overline{G} \cap \{x \mid \dot{V}(x) = 0\}$ 中唯一可能的不变集是 $\{x_0\}$；

3° $V(x_0) = \eta$，$V(x) < \eta (x \in G \setminus \{x_0\})$；

4° 当 $x \in (N \cap \partial G)$ 时 $V(x) = \eta$。

若 N_0 是真包含在 N 中的 x_0 的有界邻域，又 $x_1 \in (G \cap N_0) \setminus \{x_0\}$，则或者 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非紧子集，或者存在 $\tau > 0$ 使得 $S(\tau)x_1 \in \partial N_0$。

证明 先证明：若 $\gamma(x_1) \subset N_0$，则 $\gamma(x_1) \subset G \cap N_0$。因为 $x_1 \in (G \cap N_0) \setminus \{x_0\}$，所以由条件 3°，$V(x_1) < \eta$。于是对一切 $t \geq 0$，$V(S(t)x_1) \leqslant V(x_1) < \eta$。再由条件 4°，$S(t)x_1$ 不能到达 $N_0 \cap \partial G$。

再证明：若 $\gamma(x_1) \subset N_0$，则 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非紧子集。若不然，则 $L_\omega(x_1)$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非空不变集，由定理 10.3.5，$L_\omega(x_1) \subset \{x : \dot{V}(x) = 0\}$，于是由条件 2°，$L_\omega(x_1) = \{x_0\}$。这时 $t \to +\infty$ 时 $S(t)x_1 \to x_0$。因为

$$V(S(t)x_1) \leqslant V(x_1)$$

令 $t \to +\infty$，得

$$\eta = V(x_0) \leqslant V(x_1)$$

与 $V(x_1) < \eta$ 矛盾。

这样我们得到，或者 $\gamma(x_1) \subset N_0$，或者存在 $\tau > 0$，使得 $S(\tau)x_1 \in \partial N_0$，若是前者，$\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非紧子集，证毕。

推论 10.3.11 在定理 10.3.10 的条件下，若 $x_1 \in (G \cap N_0) \setminus \{x_0\}$，而 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的紧子集，则 x_0 是不稳定的。

10.4 自治方程与 Liapunov 函数

考察自治方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u) \tag{4.1}$$

A 是 X 中的扇形算子，有某 $0 \leqslant \alpha < 1$，U 是 X^α 中的开集，$f: U \to X$ 是局部 Lipschitz 的。

对任意 $x \in U$，方程(4.1)满足初值 $u(0) = x$ 的解是存在且唯一的，记为 $u(t; x)$。解的最大存在区间为 J。

不管 (4.1) 是否确定动力系统，也不管 (4.1) 的解是否全局存在，也可引进 Liapunov 函数 V，它是 U 上的实值连续函数 V，使得对一切 $x \in U$，

$$\dot{V}(x) = \lim_{t \to 0+} \sup \frac{1}{t} [V(u(t; x)) - V(x)] \leqslant 0$$

本节讨论：

(1) 利用 Liapunov 函数证明(4.1)解的全局存在性。

(2) 利用 Liapunov 函数证明(4.1)解的稳定性。

(3) 零解的一致渐近稳定性保证了 Liapunov 函数的存在性。

10.4.1 Liapunov 函数与解的全局存在性

设 $U = X^\alpha$，对任意的有界闭集 $B \subset X^\alpha$，$f(B)$ 在 X 中有界，于是由解的延拓定理，只要对(4.1)的解 $u(t; x)$ 在解的存在区间上有先验估计

$$\|u(t; x)\|_\alpha \leqslant M$$

，则解的存在区间是 $[0, +\infty)$。

若(4.1)的 Liapunov 函数 $V(x)$ 满足：$V(x) \geqslant a(\|x\|_\alpha)$，其

中 $a(\cdot)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续严格增函数，$a(0)=0$，则

$$a(\|u(t;x)\|_\alpha)\leqslant V(u(t;x))\leqslant V(x)$$

于是

$$\|u(t;x)\|_\alpha\leqslant a^{-1}(V(x))\quad(t\in J)$$

因此，解的存在区间是 $[0,+\infty)$，从而 (4.1) 在 X^α 上确定动力系统。

尽管，有时我们不能证明 $V(x)$ 满足 $V(x)\geqslant a(\|x\|_\alpha)$，但作为 Liapunov 函数，总有

$$V(u(t,x))\leqslant V(x)\quad(t\in J)$$

再由 V 的特殊结构，有可能对解做先验估计（见后面 10.4.3 中的例子）。

10.4.2 Liapunov 函数与解的稳定性

先给出稳定性的定义。

对右端含时间 t 的非自治方程

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t,u)\quad(t>t_0)\tag{4.2}$$

来叙述解的稳定性定义，方程(4.1)自然是它的特殊情形。

定义 10.4.1 一个在 $[t_0,+\infty)$ 上的解 $\bar{u}(t)$ 称为是稳定的（在 X^α 内）：若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得满足 $\|u(t_0)-\bar{u}(t_0)\|_\alpha<\delta$ 的 $\forall$ 解 $u(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在且对一切 $t\geqslant t_0$，有

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_\alpha<\varepsilon$$

即若 $u_0\mapsto u(t;t_0,u_0)$ 在 $u_0=u(t_0)$ 连续（在 X^α 内）且对 $t\geqslant t_0$ 是一致的，其中 $u(t;t_0,u_0)$ 是(4.2)的解，满足 $u(t_0;t_0,u_0)=u_0$。

一个在 $[t_0,+\infty)$ 上的解 $\bar{u}(t)$ 称为是吸引的。若存在 $\eta>0$，使得满足 $\|u(t_0)-\bar{u}(t_0)\|_\alpha<\eta$ 的 $\forall$ 解 $u(t)$ 有

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(t)-\bar{u}(t)\|_\alpha=0$$

若 $\bar{u}(t)$ 既是稳定又是吸引的，则称为是渐近稳定的。

定义 10.4.2 一个在 $[t_0,+\infty)$ 上的解 $\bar{u}(t)$ 是一致稳定

的(在 X^a 内)：若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，对任意 $t_1\geqslant t_0$，使得满足 $\|u(t_1)-\bar{u}(t_1)\|_a<\delta$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$ 与 t_1 无关) 的任意解 $u(t)$ 在 $[t_1,+\infty)$ 上存在且对 $\forall t\geqslant t_1$ 有

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_a<\varepsilon$$

即若 $u_1\to\bar{u}(t_1)$ 时 $u_1|\to u(t;t_1,u_1)$ 是连续的，它对 $t\geqslant t_1$ 和 $t_1\geqslant t_0$ 是一致的。

此外，若又对任意 $\varepsilon>0$ 和 $t_1\geqslant t_0$，存在与 t_1，ε 无关的 δ_1 和 $T(\varepsilon)>0$，使得满足 $\|u(t_1)-\bar{u}(t_1)\|_a<\delta_1$ 的任意解 $u(t)$，当 $t\geqslant t_1+T(\varepsilon)$ 时

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_a<\varepsilon$$

则称 $\bar{u}(t)$ 是(局部)一致渐近稳定的。

类似于常微分方程，还可引进全局渐近稳定，全局一致渐近稳定，指数稳定等概念。

下面对 $f(t,u)=f(u)$ 的情形给出利用 Liapunov 函数判断零解稳定性的两个定理。

定理10.4.3 设 $U=\{u\,|\,u\in X^a,\ \|u\|_a<r\}$，$f$ 还满足 $f(0)=0$，对 $\forall$ 有界闭集 $B\subset U$，$f(B)$ 在 X 中有界。又 (4.1) 在 U 上有 Liapunov 函数 $V(x)$ 满足

$$V(0)=0,\ a(\|x\|_a)\leqslant V(x)\quad (x\in U)$$

其中 $a(\cdot)\in K[0,r]$，则(4.1)的零解是一致稳定的。若 $V(x)$ 又满足

$$\dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|_a)\quad (x\in U)$$

其中 $c(\cdot)\in K[0,r]$，则(4.1)的零解是一致渐近稳定的。

定理 10.4.4 设 $U=X^a$，f 还满足 $f(0)=0$，对 $\forall$ 有界闭集 $B\subset X^a$，$f(B)$ 在 X 中有界，又(4.1)在 X^a 上有 Liapunov 函数 $V(x)$ 满足

$$V(0)=0\quad a(\|x\|_a)\leqslant V(x)\leqslant b(\|x\|_a)$$

$$\dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|_a)$$

其中 $a(\cdot)$，$b(\cdot)\in KR$，$c(\cdot)\in K[0,+\infty)$ 则 (4.1)的零解是全局一致渐近稳定的。

以上定理的证明与动力系统的相应定理的证明完全一样，不过这里还要用到解的延拓定理。

如果不知道 Liapunov 函数是否有上述性质，还能用它来讨论解的极限性质吗？下面的定理回答这个问题。

定理 10.4.5 设 A 有紧预解式，对某 $0 \leqslant \alpha < 1$ 及任意 $x \in X^\alpha$，(4.1) 的解 $u(t;x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在且 $\|u(t;x)\|_\alpha \leqslant M(x)$（$M(x)$ 是依赖于 x 的常数）。又(4.1)在 X^α 存在 Liapunov 函数，若 $\{x \mid \dot{V}(x) = 0, x \in X^\alpha\}$ 由唯一元素 u_0 组成，则 $t \to +\infty$ 时在 X^α 中有

$$u(t;x) \to u_0$$

证明 在定理的条件下，$\{u(t;x)\}_{t \geqslant 0}$ 是紧集，$L_\omega(u(0,x))$ 非空，$L_\omega(u(0;x)) = \{u_0\}$。因此

$$u(t;x) \to u_0 \quad (t \to +\infty)$$

证毕。

10.4.3 例子

考察一类问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

取 $X = L_2(0,\pi)$，$A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$，则 $D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$，

$X^{\frac{1}{2}} = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(0,\pi)$。(4.3)改写成

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u) \tag{4.3$'$}$$

(4.3) 满足初值 $u(x,0) = \varphi(x)$ 的解记为 $u(x,t;\varphi)$。

假设 $f(u) \in C^1(\mathbf{R}^1)$，则对(4.3)和(4.3)$'$，下面的结论成立：

1° $f: X^{\frac{1}{2}} \to X$ 是局部 Lipschitz 的，若 $\Sigma \subset X^{\frac{1}{2}}$ 是有界闭集，则 $f(\Sigma)$ 在 X 是有界的。

2° 对于(4.3)$'$，初值问题的解的存在唯一性定理及解的延拓

定理成立。

3° 任意给定 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$，(4.3) 存在唯一古典解 $u(x,t;\varphi)$，其存在区间是 $0\leqslant t<s\leqslant\infty$，且 u_t，u_x，u_{xx} 在 $[0,\pi]\times(0,s)$ 上连续。若对 $t\in[0,s)$，解 $u(x,t;\varphi)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上有界，则 $s=+\infty$。

4° (4.3) 存在 Liapunov 函数。

证明 令 $F(u)=\int_0^u f(\xi)d\xi$，

$$V(\varphi)=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}\varphi'^2(x)-F(\varphi(x))\right]dx\quad(\varphi\in H_0^1(0,\pi))$$

显然，$V(\varphi)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上连续。又

$$V(u(x,t,\varphi))=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}u_x^2-F(u)\right]dx$$

下面求 $\dfrac{dV}{dt}$。

为了在积分号下对 t 求导并用分部积分，对任意充分小的 $\delta>0$ 和任意 $0<t_1<t_2<s$，取 $[\delta,\pi-\delta]\times[t_1,t_2]$ 上的 C^∞ 函数序列 $w_n(x,t)$，使得 $n\to+\infty$ 时

$$w_n\to u,\ (w_n)_x\to u_x$$
$$(w_n)_{xx}\to u_{xx},\ (w_n)_t\to u_t$$

对 $(x,t)\in[\delta,\pi-\delta]\times[t_1,t_2]$ 一致成立。

令

$$V_\delta(\varphi)=\int_\delta^{\pi-\delta}\left[\frac{1}{2}\varphi'^2(x)-F(\varphi(x))\right]dx$$

则对 $t_1<t<t_2$ 有

$$\frac{d}{dt}V_\delta(w_n(x,t))=\int_\delta^{\pi-\delta}[(w_n)_x(w_n)_{xt}$$
$$-f(w_n(x,t))(w_n)_t]dx=(w_n)_x(w_n)_t\Big|_\delta^{\pi-\delta}$$
$$-\int_\delta^{\pi-\delta}[(w_n)_{xx}+f(w_n)](w_n)_t dx$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dt}V_\delta(w_n(x,t))=u_xu_t|_\delta^{\pi-\delta}-\int_\delta^{\pi-\delta}u_t^2dx$$

对 $t\in[t_1,t_2]$ 一致成立。又因为

$$\lim_{n\to\infty}V_\delta(w_n(x,t))=V_\delta(u(x,t;\varphi))$$

于是 $\frac{d}{dt}V_\delta(u(x,t;\varphi))$ 存在且

$$\frac{dV_\delta(u(x,t;\varphi))}{dt}=u_xu_t|_\delta^{\pi-\delta}-\int_\delta^{\pi-\delta}u_t^2dx$$

类似地，令 $\delta\to0$，得

$$\frac{dV(u(x,t;\varphi))}{dt}=u_xu_t|_0^\pi-\int_0^\pi u_t^2dx\quad(t>0)$$

因此，对任意 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$，

$$\frac{1}{t}[V(u(x,t;\varphi))-V(u(x,0;\varphi))]$$

$$=\dot V(u(x,t^*;\varphi))\leqslant0$$

其中 $t^*>0$，即 $\dot V(\varphi)\leqslant0$，$V(\varphi)$ 是 (4.3) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上的 Liapunov 函数。

5° 若对任意 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$，$s=+\infty$，则(4.3)在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统。

6° (4.3) 有界解的 ω 极限集包含在平衡解集中。

证明 设(4.3)的解为 $u(x;t)$，$\|u(x,t)\|_{H_0^1}$ 有界。因为 A 有紧预解式，所以 $\{u(x,t)\}_{t\geq0}$ 是紧的。若 $\varphi\in L_\omega(u(x,0))$，则 $\frac{d}{dt}V(u(x,t;\varphi))=0$，即 $\int_0^\pi u_t^2dx=0$。于是 $u(x,t;\varphi)$ 与 t 无关，$u(x,t;\varphi)=\varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases}\varphi''(x)+f(\varphi)=0\\\varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}\tag{4.4}$$

因此，$L_\omega(u(x,0))\subset(4.4)$ 的解集合。

例 1

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda u-au^k & (0<x<\pi, t>0)\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & (t>0)\end{cases}\tag{4.5}$$

其中 $\lambda\geqslant 0$ 及 a 为常数，k 为奇数。

1° 当 $a>0$，$k\geqslant 3$ 时(4.5)在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统。

证明

$$V(\varphi)=\int_0^\pi\left[\varphi'^2(x)-\lambda\varphi^2(x)+\frac{2a}{k+1}\varphi^{k+1}(x)\right]dx$$

是(4.5)在 $H_0^1(0,\pi)$ 上的 Liapunov 函数。

因为 $a>0$，$\int_0^\pi\varphi^2(x)dx\leqslant\int_0^\pi\varphi'^2(x)dx(\varphi\in H_0^1(0,\pi))$，所以

$$\frac{2a}{k+1}\int_0^\pi u^{k+1}dx+(1-\lambda)\int_0^\pi u^2dx$$

$$\leqslant V(u(x,t;\varphi))\leqslant V(\varphi)\tag{4.6}$$

而

$$\int_0^\pi u^2dx\leqslant M\left(\int_0^\pi u^{k+1}dx\right)^{\frac{2}{k+1}}$$

于是

$$M_1\left(\int_0^\pi u^2dx\right)^{\frac{k+1}{2}}+(1-\lambda)\int_0^\pi u^2dx\leqslant V(\varphi)\tag{4.7}$$

由(4.7)及(4.6)得 $\int_0^\pi u^2dx$，$\int_0^\pi u^{k+1}dx$ 有界.再由 $V(u(x,t;\varphi))\leqslant V(\varphi)$ 得 $\int_0^\pi u_x^2dx$ 也有界。因此，$\|u\|_{H_0^1}$ 有界，(4.5)在 $H_0^1(0,\pi)$ 确定动力系统。

注 当 $a=0$，$0\leqslant\lambda<1$，k 为奇数时，(4.5)在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统，这从上述证明中可以看到。

2° 当 $a\geqslant 0$，$0\leqslant\lambda<1$ 时原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 是全局渐近稳定的。

证明 令

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi'^2(x)dx=\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{H_0^1}$$

$u(x,t)$ 是(4.5)的解，则

$$\frac{dV(u(x,t))}{dt}=-\int_0^\pi u_{xx}u_t dx$$

$$=-\int_0^\pi u_{xx}(u_{xx}+\lambda u-au^k)dx$$

$$=-\int_0^\pi u_{xx}^2dx+\lambda\int_0^\pi u_x^2dx-ak\int_0^\pi u_x^2u^{k-1}dx$$

$$\leqslant-(1-\lambda)\int_0^\pi u_x^2dx=-(1-\lambda)\|u\|^2_{H_0^1}$$

于是

$$\dot V(\varphi)\leqslant-(1-\lambda)\|\varphi\|^2_{H_0^1}$$

因此，原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 是全局渐近稳定的。

3° $a>0$，$\lambda=1$ 时原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 全局渐近稳定。当 $a=0$，$\lambda=1$ 时原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 稳定但不渐近稳定。

证明 当 $a\geqslant 0$，$\lambda=1$ 时，(4.5) 仍有 Liapunov 函数 $V(\varphi)=\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{H_0^1}$。因此，原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 是稳定的。

当 $a=0$，$\lambda=1$ 时(4.5)有解 $u=c\sin x$，c 为任意常数，因此原点不是渐近稳定的。

当 $a>0$，$\lambda=1$ 时，再考察

$$\begin{cases}\varphi''+\varphi-a\varphi^k=0 & (0<x<\pi)\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}\tag{4.6}$$

用 φ 乘方程两边并积分得

$$a\int_0^\pi \varphi^{k+1}dx=\int_0^\pi(\varphi''+\varphi)\varphi dx$$

$$=\int_0^\pi(-\varphi'^2+\varphi^2)dx\leqslant 0$$

即 $\varphi=0$。

因为 $\|u(x,t)\|_{H_0^1}$ 有界，A 有紧预解式，$\{u(x,t)\}_{t\geqslant 0}$ 是紧的，$L_\omega(u(x,0))$ 非空，所以 $L_\omega(u(x,0))=\{0\}$，因此在 $H_0^1(0,\pi)$

中 $u(x,t)\to 0(t\to+\infty)$。

$4°$　$a<0$，$\lambda=1$，$k=3$ 时原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是不稳定的。

证明　我们在

$$U=\{\varphi\,|\,\varphi\in H_0^1(0,\pi),\ V(\varphi)<0\}$$

上考虑 Liapunov 函数。

$$V(\varphi)=\int_0^\pi\left[\varphi'^2(x)-\varphi^2(x)+\frac{a}{2}\varphi^4(x)\right]dx$$

令 $\varphi(x)=c\sin x$，则

$$V(\varphi)=\int_0^\pi c^2[\cos^2x-\sin^2x]dx+\frac{a}{2}\int_0^\pi c^4\sin^4x\,dx<0$$

即 $c\sin x\in U$，U 是 $H_0^1(0,\pi)$ 中的非空开集。

若能选取原点的小邻域 N，当 $\varphi\in N$，且仅当 $\varphi=0$ 时 $\dot V(\varphi)=0$，则由定理 10.3.5（其中 $\eta=0$），如果 $\varphi\in N$，$V(\varphi)<0$，那么具有初值 φ 的解 $u(x,t;\varphi)$ 总可达到 ∂N。因此原点是不稳定的。

余下只须证明：存在原点的小邻域 N，当 $\varphi\in N$，$\dot V(\varphi)=0$ 时 $\varphi=0$。

设 $a<0$，$\varphi(x)\not\equiv 0$ 满足

$$\begin{cases}\varphi''+\varphi-a\varphi^3=0 & (0<x<\pi)\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}\tag{4.9}$$

首先考察

$$c=\max_{[0,\pi]}|\varphi(x)|$$

(1) $\varphi(x)$ 有以下特点：在相邻零点中关于中垂线对称，在相邻的三个零点中关于中间零点是中心对称的（图 10-4.1 与图 10-4.2）。因此，若 $\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有 $n+1$ 个零点，则 $\varphi'\left(\frac{\pi}{2n}\right)=0$，$\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|$ 是 $|\varphi(x)|$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值。

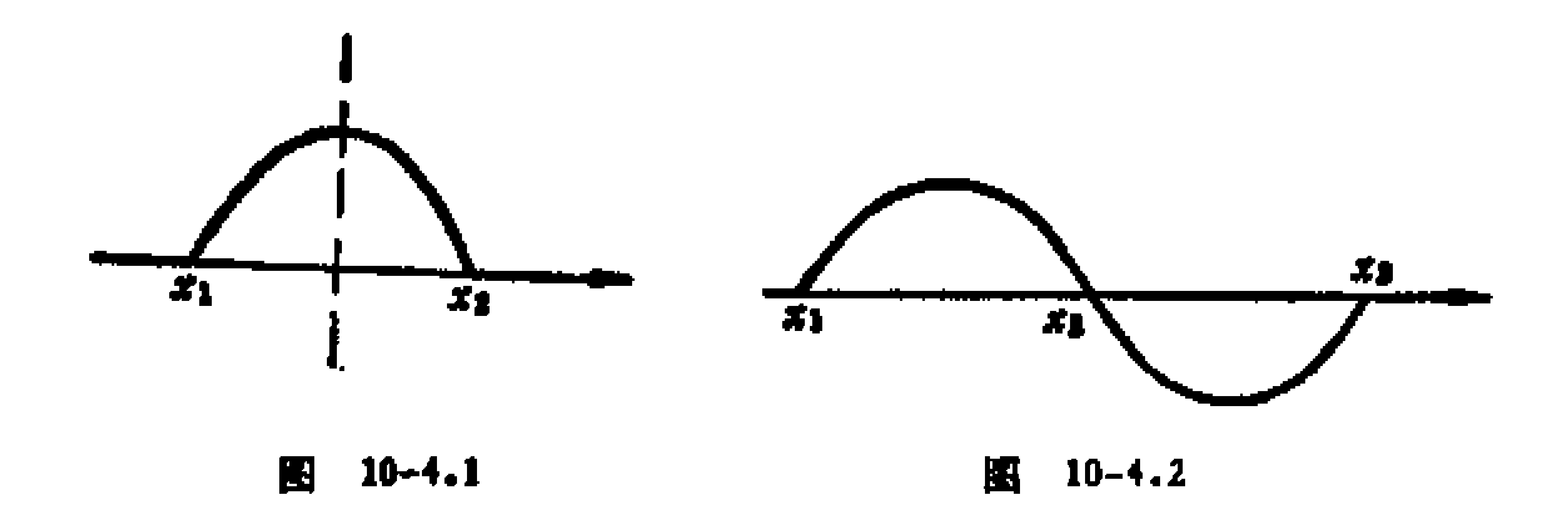


图 10-4.1　　　　图 10-4.2

(2) 若 $\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有 $n+1$ 个零点，则

$$\frac{\pi}{2n}=\int_0^c\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2-\frac{a}{2}c^4-\varphi^2+\frac{a}{2}\varphi^4}} \tag{4.10}$$

证明　由于

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right)=c,\ \varphi'\left(\frac{\pi}{2n}\right)=0$$

$$(\varphi')^2+\varphi^2-\frac{a}{2}\varphi^4=\text{常数}$$

(这里不妨设 $\varphi'(0)>0$，因为 $-\varphi(x)$ 也是(4.9)的解)，所以

$$(\varphi')^2+\varphi^2-\frac{a}{2}\varphi^4=c^2-\frac{a}{2}c^4$$

$$dx=\left(c^2-\frac{a}{2}c^4-\varphi^2+\frac{a}{2}\varphi^4\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi$$

从 0 到 $\frac{\pi}{2n}$ 对 x 积分得(4.10)。

(3) 令

$$J(c)=\int_0^c\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2-\frac{a}{2}c^4-\varphi^2+\frac{a}{2}\varphi^4}}$$

则

$$J(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{a}{2}c^2(1+\sin^2\theta)\right]^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

证明　令 $\varphi = c\sin\theta$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c\cos\theta d\theta}{\sqrt{c^2(1-\sin^2\theta)-\frac{a}{2}c^4(1-\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{a}{2}c^2(1+\sin^2\theta)\right]^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

(4) 若 $0 < c \leqslant 3/|a|$，则 $\frac{\pi}{4} < J(c) < \frac{\pi}{2}$。

证明

$$J'(c) = \frac{ac}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{a}{2}c^2(1+\sin^2\theta)\right]^{-3/2}(1+\sin^2\theta)d\theta < 0$$

$$J\left(\sqrt{\frac{3}{|a|}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\frac{3}{2}(1+\sin^2\theta)\right]^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\frac{3}{2}(1+1)\right]^{-\frac{1}{2}}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

又显然

$$J(0+) = \frac{\pi}{2}$$

因此，当 $0 < c \leqslant \sqrt{\frac{3}{|a|}}$ 时

$$\frac{\pi}{4} < J\left(\frac{3}{\sqrt{|a|}}\right) \leqslant J(c) < J(0+) = \frac{\pi}{2}$$

其次，由上述证明我们可以知道，如果 $\varphi(x)$ 满足 (4.9)，$\max\limits_{[0,\pi]}|\varphi(x)| \leqslant \sqrt{\frac{3}{|a|}}$，则 $\varphi(x) \equiv 0$。若不然，则

$$0 < c = \max_{[0,\pi]}|\varphi(x)| \leqslant \sqrt{\frac{3}{|a|}}$$

于是 $\frac{\pi}{4} < J(c) < \frac{\pi}{2}$ 与 $J(c) = \frac{\pi}{2n}$ 矛盾。

最后只须注意，当 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$ 时

$$\max_{[0,\pi]}|\varphi(x)|\leqslant\sqrt{\pi}\,\|\varphi\|_{H_0^1}$$

因此，上述要求的原点邻域N是存在的．证毕．

例 2.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda u-\rho u^k & (0<x<\pi,\ t>0)\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}\tag{4.11}$$

其中 $\lambda\geqslant0$, $\rho>0$ 为常数，k 为偶数．

1° 令 $C^+=\{\varphi\in H_0^1(0,\pi),\ \varphi(x)\geqslant0(0\leqslant x\leqslant1)\}$，则(4.11)在 C^+ 上确定动力系统．

证明 易证若 $\varphi\in C^+$，则(4.11)的解 $u(x,t;\varphi)\in C^+$（在解的存在区间上）．其余同例 1 一样证明 $\|u(x,t;\varphi)\|_{H_0^1}$，有界．因此(4.11)在 C^+ 上确定一个动力系统．

2° 当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时原点在 C^+ 是全局渐近稳定的．

证明 与例 1 的 2° 和 3° 相同．

3° 当 $\lambda>1$ 时

$$\begin{cases}\varphi''+\lambda\varphi-\rho\varphi^k=0\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}$$

在 C^+ 上有唯一不恒为零的解 $\varphi^+(x)$（这一点我们已经知道了.）若 $u(x,t;\varphi)=u(x,t)$ 是(4.11)的解，$\varphi\in C^+$ 且 $\varphi(x)\not\equiv0$，则当 $t\to+\infty$ 时 $\|u(\cdot,t)-\varphi^+(\cdot)\|_{H_0^1}\to0$．

证明 $L_\omega(u(\cdot,0))$ 非空，至多由两个元素 θ 与 φ^+ 组成．因为 $L_\omega(u(\cdot,0))$ 是连通的，所以只能由一个元素组成．

若 $L_\omega(u(\cdot,0))=\{\theta\}$，则 $\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1}\to0\ (t\to+\infty)$．于是

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^\pi u(x,t)\sin x\,dx=0\tag{4.12}$$

又

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi u(x,t)\sin x\,dx=\int_0^\pi u_{xx}\sin x\,dx$$

$$+\lambda\int_0^\pi u\sin xdx-\rho\int_0^\pi u^k\sin xdx$$

$$=\int_0^\pi[(\lambda-1)-\rho u^{k-1}]u\sin xdx$$

因为 $\max\limits_{[0,\pi]}|u(x,t)|\leqslant\sqrt{\pi}\|u\|_{H_0^1}$. 所以当 t 充分大时

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi u(x,t)\sin xdx>0$$

这与(4.12)矛盾。

因此，

$$L_\omega(u(\cdot,0))=\{\varphi^+(x)\}$$

$$\|u(\cdot,t)-\varphi^+(\cdot)\|_{H_0^1}\to 0\quad(t\to+\infty)$$

证毕。

本例子证明了第三章中提出的平衡解分支问题的稳定性。

10.4.4 关于渐近稳定性的逆定理

对于自治方程(4.1)我们能用 Liapunov 函数判断零解的一致渐近稳定性. 反过来，我们还可证明它的逆定理，零解的一致渐近稳定性保证了 Liapunov 函数的存在性.

定理 10.4.6 设 U 是 $X^\alpha(0\leqslant\alpha<1)$ 中原点的邻域，$f:U\to X$ 是 Lipschitz 连续的，满足 $f(0)=0$. 若对于(4.1)，$x=\theta$ 在 X^α 内是一致渐近稳定的，则存在正常数 β, K_0, r 以及严格增函数 $a(\cdot)\in C[0,r]$, $a(0)=0$, 同时存在定义于 $\|x\|_\alpha\leqslant r$ 上的实函数 $V(x)$ 使得 $\|x\|_\alpha\leqslant r$, $\|y\|_\alpha\leqslant r$ 时有

1° $a(\|x\|_\alpha)\leqslant V(x)\leqslant K_0\|x\|_\alpha$,

2° $|V(x)-V(y)|\leqslant K_0\|x-y\|_\alpha$,

3° $\dot V(x)\leqslant-\beta V(x)$.

证明 分以下几步.

(1) 先估计方程的解 $u(t;x)$ 及 $u(t;x)-u(t;y)$.

令

$$\theta(t)=\sup_{\substack{\|x\|_\alpha\leqslant r_0\\ s\in[t,+\infty)}}\|u(s,x)\|_\alpha+r_0\theta_0(t)$$

其中 $\theta_0(t)$ 是任一严格单调下降的连续函数且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\theta_0(t)=0$. r_0 充分小,使得当 $\|x\|_\alpha\leqslant r_0$ 时 $u(t;x)$ 一致趋于零($t\to+\infty$).显然 $\lim\limits_{r_0\to0}\theta(0)=0$ 且

$$\|u(t;x)\|_\alpha\leqslant\theta(t)$$

若 r_0 充分小, f 在半径为 $\theta(0)$ 的球上是 Lipschitz 连续的.于是当 $\|x\|_\alpha,\|y\|_\alpha\leqslant r_0$ 时

$$\begin{aligned}\|u(t;x)-u(t;y)\|_\alpha&\leqslant\|e^{-At}(x-y)\|_\alpha\\&\quad+\int_0^t\|A^\alpha e^{-A(t-s)}\|\|f(u(s;x))-f(u(s;y))\|ds\\&\leqslant M_1\|x-y\|_\alpha+M_2\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\|u(s;x)\\&\quad-u(s;y)\|_\alpha ds\end{aligned}$$

(此处不妨设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$). 由带奇性的 Gronwall 不等式得

$$\|u(t;x)-u(t;y)\|_\alpha\leqslant Le^{Mt}\|x-y\|_\alpha$$

其中 L,M 为正的常数.

(2) 构造函数 $V_k(x)$ 满足部分条件.

容易验证: $\sup\limits_{t\geqslant0}e^{-Mt}\|u(t;x)\|$ 满足条件 2°, $\sup\limits_{t\geqslant0}e^{\beta t}\|u(t;x)\|$ 满足条件 3°. 现对它们作修改,定义

$$g(\varepsilon)=\exp\{-(\beta+M)T(\varepsilon)\},\ g(0)=0$$

其中 β 是任一正数, $T(\varepsilon)$ 是 $\theta(t)$ 的反函数, $T(\varepsilon)$ 在 $0<\varepsilon<\theta(0)$ 上连续, $\varepsilon\to0+$ 时, $T(\varepsilon)\to+\infty$.

$$G_k(x)=\max\left(0,x-\frac{1}{k}\right)\quad(k\geqslant1\ \text{为自然数})$$

$$V_k(x)=g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{t\geqslant0}\{e^{\beta t}G_k(\|u(t;x)\|_\alpha)\}$$

注意 $T^{-1}(s)$ 是严格单调下降的,当 $t\geqslant T_k=T\left(\frac{1}{k+1}\right)$ 时

$$\|u(t;x)\|_\alpha\leqslant\theta(t)=T^{-1}(t)<\frac{1}{k+1}$$

因此,

$$V_k(x) = g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{0\leqslant t\leqslant T_k}\{e^{\beta t}G_k(\|u(t;x)\|_a)\}$$

可以验证它满足:

(i) $0 \leqslant V_k(x) \leqslant \theta(0)$。

(ii) $|V_k(x) - V_k(y)| \leqslant L\|x-y\|_a \quad (\|x\|_a, \|y\|_a \leqslant r_0)$。

因为

$$|G_k(\|u(t;x)\|_a) - G_k(\|u(t;y)\|_a)| \leqslant |\|u(t;x)\|_a - \|u(t;y)\|_a|$$

所以

$$|V_k(x) - V_k(y)| \leqslant g\left(\frac{1}{k+1}\right)Le^{(\beta+M)T_k}\|x-y\|_a$$

$$= L\|x-y\|_a$$

(iii) $\dot{V}_k(x) \leqslant -\beta V_k(x) \quad (\|x\|_a \leqslant r_0)$。

因为

$$V_k(u(h;x)) = g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{t\geqslant 0}\{e^{\beta t}G_k(\|u(t+h;x)\|_a)\}$$

$$= g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{t\geqslant h}\{e^{-\beta h}e^{\beta t}G_k\|u(t;x)\|_a)\}$$

$$\leqslant e^{-\beta h}V_k(x)$$

$$\frac{V_k(u(h;x)) - V_k(x)}{h} \leqslant \frac{e^{-\beta h}-1}{h}V_k(x)$$

所以

$$\dot{V}_k(x) \leqslant -\beta V_k(x)$$

(3) 最后构造 $V(x)$。

令

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}V_k(x) \quad (\|x\|_a \leqslant r_0)$$

因为当 $\|x\|_a \leqslant r_0$ 时 $|V_k(x)| \leqslant \theta(0)$，所以级数一致收敛，且满足：当 $\|x\|_a, \|y\|_a \leqslant r_0$ 时

$$V(0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} V_k(0) = 0$$

$$|V(x) - V(y)| \leqslant L \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|x - y\|_\alpha$$

$$\leqslant L\|x - y\|_\alpha$$

$$V(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g\left(\frac{1}{k+1}\right) G_k(\|x\|_\alpha) \equiv a(\|x\|_\alpha)$$

而 $a(\cdot)$ 满足:

$$a(0) = 0$$

$$|a(\|x\|_\alpha) - a(\|y\|_\alpha)| \leqslant |\|x\|_\alpha - \|y\|_\alpha|$$

当 $0 < \|x\|_\alpha < \|y\|_\alpha \leqslant r_0$ 时

$$a(\|y\|_\alpha) - a(\|x\|_\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g\left(\frac{1}{k+1}\right) [G_k(\|y\|_\alpha) - G_k(\|x\|_\alpha)] > 0$$

最后还有

$$\frac{V(u(h;x)) - V(x)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left[\frac{V_k(u(h;x)) - V_k(x)}{h}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k} V_k(x) \cdot \frac{e^{-\beta h} - 1}{h}$$

于是

$$\dot{V}(x) \leqslant -\beta V(x) \quad (\|x\| \leqslant r_0)$$

证毕。

作为定理 10.4.6 的应用。我们讨论含参数 ε 的自治方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u, \varepsilon) \qquad (\mathrm{E}_\varepsilon)$$

其中 $f(0,0) = 0$。对它我们有以下结果。

定理 10.4.7 设当 $\varepsilon = 0$ 时对 (E_0)，$x = \theta$ 是一致渐近稳定

的．又设对于 $\|x\|_\alpha, \|y\|_\alpha \leqslant r$，$\|\varepsilon\| \leqslant \varepsilon_0$，

$$\|f(x,\varepsilon) - f(y,\varepsilon)\|_\alpha \leqslant L\|x - y\|_\alpha$$

且当 $\varepsilon \to 0$ 时对 $\|x\|_\alpha \leqslant r$ 一致地有

$$\|f(x,\varepsilon) - f(x,0)\|_\alpha \to 0$$

则在 X^α 中存在原点的邻域 $U \subset \{\|x\|_\alpha < r\}$，当 $|\varepsilon|$ 充分小时，对 (E_ε) 它是正不变的．

证明　设 $V(x)$ 是由定理 10.4.6 给出的 (E_0) 的 Liapunov 函数．我们将沿 (E_ε) 的解 $u(t;x,\varepsilon)$ 估计 V 的右上导数 $\dot{V}_\varepsilon(x)$。

$$\begin{aligned}\dot{V}_\varepsilon(x) &= \limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}[V(u(h;x,\varepsilon)) - V(x)] \\ &\leqslant \limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h}[V(u(h;x,\varepsilon)) - V(u(h;x,0))] \\ &\quad + \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}[V(u(h;x,0)) - V(x)] \\ &\leqslant K(r) \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\|u(h;x,\varepsilon) - u(h;x,0)\|_\alpha + \dot{V}(x)\end{aligned}$$

现设 $\|x\|_\alpha \leqslant r$，$t > 0$ 充分小，则

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(t) - u_0(t) &\equiv u(t;x,\varepsilon) - u(t;x,0) \\ &= \int_0^t e^{-A(t-s)}[f(u_\varepsilon(s),\varepsilon) - f(u_0(s),\varepsilon)]ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-A(t-s)}[f(u_0(s),\varepsilon) - f(u_0(s),0)]ds\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(t) - u_0(t)\|_\alpha \leqslant ML\int_0^t \|u_\varepsilon(s) - u_0(s)\|_\alpha ds \\ + Mt\Delta(\varepsilon)\end{aligned}$$

其中

$$\Delta(\varepsilon) = \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant r} \|f(x,\varepsilon) - f(x,0)\|_\alpha$$

由 Gronwall 不等式可得，对充分小的 $h > 0$ 有

$$\|u(h;x,\varepsilon) - u(h;x,0)\|_\alpha \leqslant M_1 h\Delta(\varepsilon)$$

因此

$$\dot{V}_\varepsilon(x) \leqslant \dot{V}(x) + K(r)M_2\Delta(\varepsilon)$$

选取 $l>0$，使得

$$U = \{x \mid V(x) < l\} \subset \{\|x\|_\alpha < r\}$$

当 $V(x)=l$ 时 $\dot{V}(x) \leqslant -\beta V(x) = -\beta l$，因而$|\varepsilon|$充分小时

$$\dot{V}_\varepsilon(x) \leqslant -\beta l + K(r)M_2\Delta(\varepsilon) < 0$$

这就得到，若 $V(x)<l$，则对一切 $t>0$ 有

$$V(u(t;\ x,\varepsilon)) < l$$

即U是正不变的。证毕。

10.5 渐近自治方程

现在利用自治方程来讨论一类非自治方程——渐近自治方程。

设A是X中的扇形算子，U是X^α中的一个开集，$0 \leqslant \alpha < 1$。当 $t \to +\infty$ 时对每一 $u \in U$ 的一个邻域一致有 $\|f(t,\ u) - g(u)\| \to 0$，称

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u) \tag{5.1}$$

为渐近自治方程，相应地得到一个自治方程

$$\frac{du}{dt} + Au = g(u) \tag{5.2}$$

下面讨论系统（5.1）的解的极限状态与系统（5.2）有什么关系。

定理 10.5.1 设A有紧预解式，f: $R^+ \times U \to X$ 是局部 Lipschitz 连续的，对任意有界闭集 $B \subset U$，$f(R^+ \times B)$ 在 X 中有界。又当 $t \to +\infty$ 时对每一$u \in U$的一个邻域一致地有 $\|f(t,\ u) - g(u)\| \to 0$，而$g$在$U$内是局部 Lipschitz 连续的。若当 $t \geqslant t_0$ 时(5.1)有解 $u(t)$，且它包含在有界闭集$B \subset U$内，则

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_{X^\alpha}(u(t), M) = 0$$

其中M是B对(5.2)的最大不变子集。

证明　由解的紧性定理可知，$\{u(t)\}_{t\geq t_0}$ 是一个紧集 $K\subset B$。设 v_0 是K的任一极限点，即存在 $t_n\to+\infty$，$v_0=\lim\limits_{n\to+\infty}u(t_n)$。

考察

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}+Av=gv\\[2ex] v(0)=v_0\end{cases}\tag{5.3}$$

由解的局部存在性定理知，(5.3)存在解 $v(t)$，进一步可知，解的存在区间是$[0,+\infty)$。若不然，由解的延拓定理，存在 $0<T<+\infty$，使得 $v(t)$ 在$[0,T]$上有定义，而 $v(T)\notin B$。因为 $\{u(t)\}_{t\geq t_0}\subset B$，所以

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|v(t)-u(t+t_n)\|_a\geq a>0$$

另一方面，$u(t+t_n)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=f(t+t_n,u)\\[2ex] u|_{t=0}=u(t_n)\end{cases}$$

注意到假设条件，可得

$$\lim_{n\to+\infty}f(t+t_n,u)=g(u)$$

关于 $\mathbf{R}^+\times U$ 的任何一点 (t,u) 的一个邻域是一致的，由解对初值及右端函数的连续性定理，当 $n\to+\infty$时

$$\sup_{t\in[0,T]}\|v(t)-u(t+t_n)\|_a\to 0\quad(n\to+\infty)$$

故得一个矛盾．同时还证明了 $\{v(t)\}_{t\geq 0}\subset B$。

现在按照证明紧轨道的极限集具有不变性的同样方法可知，存在 $\{t_n\}$ 的一个子例 $\{t_n'\}$，使得对一切 $k=0,1,2,\cdots$存在极限

$$\lim_{n\to+\infty}u(t_n'-k)=v_k$$

同样道理

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}+Av=g(v)\\[2ex] v(0)=v_k\quad(k=1,2,\cdots,)\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上存在解 $v(t;v_k)$，$\{v(t;v_k)\}_{t\geq 0}\subset B$.

现可按如下方法延拓 $v(t)$ 使之在 $(-\infty,0)$ 上有定义

$$v(t)=v(t+k;\ v_k)\quad(-k\leqslant t\leqslant 0,k=1,2,\cdots)$$

这就把(5.3)的解延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上且

$$\{v(t)\}_{t\in(-\infty,+\infty)}\subset B$$

以上证明了，对 $u(t)$ 的任意极限点 v_0，(5.3) 的解 $\{v(t,v_0)\}_{t\in(-\infty,+\infty)}\subset B$，即 $v_0\in M$.

于是

$$\rho(u(t),M)\leqslant\rho(u(t),L_\omega(u(t)))$$

因此，当 $t\to+\infty$ 时

$$u(t)\to M$$

证毕.

定理 10.5.2 A, f, g 的假定同定理 10.5.1，其中 U 是 X^α 中包含原点的开集. 还假定 $f(t,\theta)\equiv\theta$, $g(\theta)=\theta$, 又 $u=\theta$ 对于极限方程(5.2)是一致渐近稳定的，则 $u=\theta$ 对于(5.1)是一致渐近稳定的.

证明略(可参见 [Hem]).

10.6 判断稳定性的线性近似方法

同常微分方程一样，我们也可以利用方程

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t,u)$$

的线性近似方程来判断解的稳定性.

10.6.1 线性方程的稳定性

先考察线性齐次方程

$$\frac{du}{dt}+Au=\theta$$

其中 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子，它满足初值 $u(t_0)=x$

的解是 $u(t;t_0,x)=e^{-A(t-t_0)}x$。

定理 10.6.1 在 $[t_0,+\infty)$ 上

1° $u=\theta$ 稳定（一致稳定）的充要条件是：存在常数 $K>0$，使得

$$\|e^{-A(t-t_0)}\|\leqslant K \quad (t\geqslant t_0) \tag{6.1}$$

2° $u=\theta$ 一致渐近稳定与下列任一条件等价：

(a) 存在常数 $\beta>0$，$K>0$，使得

$$\|e^{-A(t-t_0)}\|\leqslant Ke^{-\beta(t-t_0)} \tag{6.2}$$

(b) $u=\theta$ 是指数稳定的。

(c) $\mathrm{Re}\sigma(A)>0$。

证明 1° 设(6.1)成立，则任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{K}$，当 $\|x\|_\alpha<\dfrac{\varepsilon}{K}$ 时

$$\|e^{-A(t-t_0)}x\|_\alpha\leqslant\|e^{-A(t-t_0)}\|\|x\|_\alpha<\varepsilon$$

即 $u=\theta$ 是稳定的。类似可证 $u=\theta$ 还是一致稳定的。

反之，设 $u=\theta$ 稳定，给定 $\varepsilon>0$，则存在 $\delta>0$，当 $\|x\|_\alpha\leqslant\delta$ 时

$$\|e^{-A(t-t_0)}x\|_\alpha=\|e^{-A(t-t_0)}A^\alpha x\|<\varepsilon$$

因为 $R(A^\alpha)=X$，于是

$$\begin{aligned}\|e^{-A(t-t_0)}\|&=\sup_{\|\xi\|=1}\|e^{-A(t-t_0)}\xi\|\\&\leqslant\sup_{\|x\|_\alpha=\delta}\|e^{-A(t-t_0)}\delta^{-1}A^\alpha x\|<\delta^{-1}\varepsilon=K\end{aligned}$$

证明 2° 设 $u=\theta$ 一致渐近稳定。则存在 $b>0$，对任意 $0<\eta<b$，存在 $T=T(\eta)>0$，当 $\|x\|_\alpha\leqslant b$，$t\geqslant t_0+T$ 时

$$\|e^{-A(t-t_0)}x\|_\alpha<\eta$$

于是

$$\|e^{-A(t-t_0)}\|\leqslant b^{-1}\eta(t\geqslant t_0+T)$$

特别有

$$\|e^{-AT}\|\leqslant b^{-1}\eta<1$$

对任意 $t \geqslant t_0$，存在非负整数 n，使 $nT \leqslant t - t_0 \leqslant (n+1)T$。于是

$$\|e^{-A(t-t_0)}\| = \|e^{-A(t-t_0-nT)}e^{-AnT}\| \leqslant M\|e^{-AnT}\|$$
$$\leqslant M\|e^{-AnT}\| \leqslant M(b^{-1}\eta)^n$$

取 $(b^{-1}\eta)^n = e^{-\beta nT}$，即 $\beta = -T^{-1}ln(b^{-1}\eta)$，得

$$\|e^{-A(t-t_0)}\| \leqslant Me^{-\beta nT} = Me^{\beta T}e^{-\beta(n+1)T} \leqslant Ke^{-\beta(n+1)T}$$
$$\leqslant Ke^{-\beta(t-t_0)}(t \geqslant t_0)$$

其中 $K = Me^{\beta T}$.

这就证明了：由 $u = \theta$ 一致渐近稳定 $\Rightarrow$(a) 成立。

现设(6.2)成立，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$，得 $u = \theta$ 是指数稳定的． 即由(a)$\Longrightarrow$(b)。

若 $u = \theta$ 是指数稳定的，显然(6.2) 成立．对于 $\mathrm{Re}\lambda < \beta$，有

$$\|e^{-At}x - e^{-\lambda t}x\| \geqslant e^{-t\mathrm{Re}\lambda}[1 - Ke^{-(\beta-\mathrm{Re}\lambda)t}]\|x\|$$

$(\forall t \geqslant 0, x \in X)$．当 t 充分大时

$$\|(e^{-At} - e^{-\lambda t})x\| \geqslant c_0\|x\|$$

其中 $c_0 > 0$，又因 $R(e^{-At})$ 在X中稠密，所以 t 充分大时，若 $\mathrm{Re}\lambda < \beta$，则 $e^{-\lambda t}$ 属于 e^{-At} 的预解集，因而 $(-\lambda)$ 属于 $(-A)$ 的预解集（见习题 10.4），即 λ 属于 A 的预解集．因此，若 $\lambda \in \sigma(A)$，则 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \beta > 0$．这就证明了 (b)$\Longrightarrow$(c)。

最后，若 $\mathrm{Re}\sigma(A) > 0$，则有 (6.2) 成立，由此易知 $u = \theta$ 稳定．证毕.

10.6.2 按线性近似方程确定稳定性

现考虑非线性方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u), \tag{6.3}$$

其中 A 是 Banach 空间中的扇形算子.

设 u_0 是一个平衡点，把 $f(t, u)$ 在 u_0 展开

$$f(t, u_0 + v) = f(t, u_0) + Bv + g(t, v)$$

这里 $f(t,u_0)=Au_0$，我们假设

(H₁) 1° U 是 $\mathrm{R}\times X^\alpha(0\leqslant\alpha<1)$ 中 $(\tau,+\infty)\times\{u_0\}$ 的某柱形邻域；

2° $f:U\to X$ 对 t 局部 Hölder 连续，对 u 局部 Lipchitz 连续；

3° B 是 X^α 到 X 的有界线性算子；

4° 当 $\|v\|_\alpha\to 0$ 时对 $t>\tau$ 一致地有

$$\|g(t,v)\|=o(\|v\|_\alpha)$$

作变换 $u=u_0+v$，则方程(6.3)化为

$$\frac{dv}{dt}+Lv=g(t,v)\tag{6.4}$$

其中 $L=A-B$（它一定是扇形算子）。

(6.4) 的线性近似方程是

$$\frac{dv}{dt}+Lv=0\tag{6.5}$$

现由(6.5)确定(6.4) 的零解，从而确定 (6.3) 的平衡点 u_0 的稳定性。

定理 10.6.2 设 u_0 是 (6.3) 的平衡点且条件 (H₁) 成立。若对某 $\beta>0$，$\mathrm{Re}\sigma(L)>\beta$，或等价地说，若线性方程(6.5)的零解是指数稳定的，则(6.5) 的平衡点 u_0 在 X^α 中是指数稳定的：存在 $\rho>0$，$M\geqslant 1$，若 $t_0>\tau$，$x\in X^\alpha$，$\|x-u_0\|_\alpha\leqslant\rho/2M$，则在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上，(6.3)存在唯一解 $u(t;t_0,x)$，当 $t\geqslant t_0$ 时

$$\|u(t;t_0,x)-u_0\|_\alpha\leqslant 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x-u_0\|_\alpha$$

证明 取 β' 使 $\mathrm{Re}\sigma(L)>\beta'>\beta>0$，因为 L 是扇形算子，所以存在 $M\geqslant 1$ 使得

$$\|e^{-Lt}v\|_\alpha\leqslant Me^{-\beta' t}\|v\|_\alpha$$

$$\|e^{-Lt}v\|_\alpha=\|L^\alpha e^{-Lt}v\|\leqslant Mt^{-\alpha}e^{-\beta' t}\|v\|$$

选取 $\sigma>0$ 充分小使得

$$M\sigma\int_0^{\infty} s^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)s}ds < \frac{1}{2}$$

再取 $\rho>0$ 充分小，使得 $\|v\|_\alpha\leqslant\rho$，$t>\tau$ 时

$$\|g(t,v)\|\leqslant\sigma\|v\|_\alpha$$

令 $v=u(t;t_0,x)-u_0$，则 v 满足(6.4)。于是

$$v(t)=e^{-L(t-t_0)}v(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)}g(s,v(s))ds \qquad (6.6)$$

若 $\|v(t_0)\|_\alpha=\|x-u_0\|_\alpha\leqslant\frac{\rho}{2M}$，则在某区间上(6.6)的解存在且有 $\|v(t)\|_\alpha\leqslant\rho$，只要 $\|v(t)\|_\alpha\leqslant\rho$，则有

$$\|v(t)\|_\alpha\leqslant\frac{\rho}{2}+\sigma M\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}e^{-\beta'(t-s)}\|v(s)\|_\alpha ds$$

$$\leqslant\frac{\rho}{2}+\rho\sigma M\int_0^{t-t_0}s^{-\alpha}e^{-\beta's}ds<\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}=\rho$$

若在 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上 $\|v(t)\|_\alpha<\rho$，其中 t_1 是最大的，则或 $t_1=+\infty$ 或 $\|v(t_1)\|_\alpha=\rho$，但后一情形与上述估计矛盾，所以对任意 $t\geqslant t_0$，解 $v(t)$ 存在且 $\|v(t)\|_\alpha<\rho$。

现再令

$$z(t)=\sup_{s\in[t_0,t]}\{\|v(s)\|_\alpha e^{\beta(s-t_0)}\}$$

将积分方程(6.6)两边乘以 $e^{\beta(t-t_0)}$，则得

$$\|v(t)\|_\alpha e^{\beta(t-t_0)}\leqslant M\|v(t_0)\|_\alpha$$

$$+M\sigma\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)(t-s)}ds\cdot z(t)$$

$$\leqslant M\|v(t_0)\|_\alpha+\frac{1}{2}z(t)$$

由此得

$$z(t)\leqslant 2M\|v(t_0)\|$$

即当 $t\geqslant t_0$ 时

$$\|u(t;t_0,x)-u_0\|_\alpha=\|v(t)\|_\alpha\leqslant 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x-u_0\|_\alpha$$

证毕。

下面讨论不稳定性的判断。我们假设

(H_2)　1° U 是 $R^1\times X^\alpha(0\leqslant\alpha<1)$ 中 $R^1\times\{u_0\}$ 的某柱形邻域，

2°，3° 同 (H_1)，

4° 对 $t\geqslant t_0$，$g(t,\theta)=\theta$，

$$\|g(t,v_2)-g(t,v_1)\|\leqslant k(\rho)\|v_2-v_1\|_\alpha$$

其中 $\|v_1\|_\alpha,\|v_2\|_\alpha\leqslant\rho$，$\rho\to0$ 时 $k(\rho)\to0$。

为了叙述并证明关于不稳定性的判断定理，我们先叙述谱集的定义，关于空间分解与有关估计式的两个引理.

定义 10.6.3　设 A 是定义域和值域都在 Banach 空间 X 中的线性算子，$\sigma(A)$ 是 A 的谱，集合 $\sigma\subset\sigma(A)\cup\{\infty\}\doteq\hat{\sigma}(A)$ 是一个谱集，若 σ 和 $\hat{\sigma}(A)\backslash\sigma$ 在扩张复平面中都是闭的.

例　$\sigma(A)$的一个孤立点，或者$\sigma(A)$的有限个孤立点是谱集，谱集的余集是谱集.

引理 10.6.4　设 A 是 X 中的闭线性算子，σ_1 是一个有界谱集，而 $\sigma_2=\sigma(A)\backslash\sigma_1$，所以 $\sigma_2\cup\{\infty\}$ 是另一个谱集．设 E_1，E_2 是相应于这两个谱集的投影，而 $X_j=E_j(X)(j=1,2)$．则

1°　$X=X_1\oplus X_2$，

2°　X_j 在 A 下是不变的，

3°　又若 A_j 是 A 在 X_j 上的限制，则

$$A_1:X_1\to X_1 \text{ 是有界的，} \sigma(A_1)=\sigma_1$$

$$D(A_2)=D(A)\cap X_2,\text{ 且 } \sigma(A_2)=\sigma_2$$

引理 10.6.5　在引理 10.6.4 的条件下，若 A 是一个扇形算子，则

1°　A_1 是有界算子，A_2 是扇形算子，

2°　若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_1)<\alpha$，则对于 $t\leqslant0$，$\|e^{-A_1t}\|\leqslant ce^{-\alpha t}$，

3°　若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_2)>\beta$，则对于 $t>0$，

$$\|e^{-A_2t}\|\leqslant ce^{-\beta t}$$

$$\|A_2e^{-A_2t}\|\leqslant ct^{-1}e^{-\beta t}$$

引理 10.6.4 与引理 10.6.5 的证明可参见 [DS, v. I, 第七章]和

[He].

现在利用上述引理证明一个不稳定性的判别准则.

定理 10.6.6 设 u_0 是 (6.3) 的平衡点且条件 (H_2) 成立. 若 $L = A - B$, $\sigma(L)\cap\{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$ 是一非空谱集,则平衡点 u_0 是不稳定的,特别是存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\{x_n, n \geqslant 1\}$, 满足当 $n \to +\infty$ 时 $\|x_n - u_0\|_\alpha \to 0$, 对任意 n,

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|u(t; t_0, x_n) - u_0\|_\alpha \geqslant \varepsilon_0 > 0$$

其中上确界取在解 $u(t; t_0, x_n)$ 的最大存在区间上.

证明 记

$$\sigma_1 = \sigma(L)\cap\{\mathrm{Re}\lambda < 0\}, \sigma_2 = \sigma(L)\backslash\sigma_1$$

由引理 6.10.4 将 X 分解成 $X = X_1 \oplus X_2$, 使 $L_j = L|_{X_j}$

$$\sigma(L_j) = \sigma_j \quad (j = 1, 2)$$

记 E_j 是相应的在 X_j 上的投影算子 ($j \neq 1,2$).

由引理 6.10.5, 我们有下列估计式: 存在某 $\beta > 0$, $M \geqslant 1$, 对 $t > 0$

$$\|e^{-L_2 t}E_2 x\|_\alpha \leqslant M e^{\beta t}\|x\|_\alpha, M t^{-\alpha} e^{\beta t}\|x\|$$

而对 $t \leqslant 0$

$$\|e^{-L_1 t}E_1 x\|_\alpha \leqslant M e^{3\beta t}\|x\|_\alpha, M e^{3\beta t}\|x\|$$

现在对 $a \in X_1^\alpha$, $\|a\|_\alpha$ 充分小时考虑积分方程

$$y(t) = e^{-L_1(t-\tau)}a + \int_\tau^t e^{-L_1(t-s)}E_1 g(s, y(s))ds$$

$$+ \int_{-\infty}^t e^{-L_2(t-s)}E_2 g(s, y(s))ds \quad (t \leqslant \tau) \qquad (6.7)$$

令 $Y(t) = y(t)e^{-2\beta(t-\tau)}$ 得

$$Y(t) = G(Y)(t)$$

其中

$$G(Y)(t) = e^{-L_1(t-\tau)}e^{-2\beta(t-\tau)}a$$

$$+ \int_\tau^t e^{-2\beta(t-\tau)}e^{-L_1(t-s)}E_1 g(s, y(s))ds$$

$$+ \int_{-\infty}^t e^{-2\beta(t-\tau)}e^{-L_2(t-s)}E_2 g(s, y(s))ds \quad (t \leqslant \tau)$$

再令

$$S = \{Y:(-\infty, \tau) \to X^{\alpha} \text{ 连续}, \ \|Y(t)\|_{\alpha} \leqslant 2M\|a\|_{\alpha}\}$$

并定义范数

$$\|Y\|_{s} = \sup_{(-\infty,\tau)} \|Y(t)\|_{\alpha}$$

现选取 $\rho > 0$ 充分小，使得

$$M^{2}k(\rho)\left[\int_{0}^{+\infty} u^{-\alpha}e^{-\beta u}du + \beta^{-1}\right] < \frac{1}{2}$$

设 $\|a\|_{\alpha} \leqslant \frac{\rho}{2M}$，若 $Y, Z \in S$，则

$$\begin{aligned}
\|G(Y)(t)\|_{\alpha} &\leqslant M\|a\|_{\alpha} + Mk(\rho) \\
&\quad \times \left[\int_{t}^{\tau} e^{-2\beta(t-\tau)}e^{3\beta(t-s)}\|y(s)\|_{\alpha}ds\right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{t} e^{-2\beta(t-\tau)}(t-s)^{-\alpha}e^{\beta(t-s)}\|y(s)\|_{\alpha}ds\right] \\
&\leqslant M\|a\|_{\alpha} + Mk(\rho)\int_{t}^{\tau} e^{\beta(t-s)}2M\|a\|_{\alpha}ds \\
&\quad + Mk(\rho)\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}2M\|a\|_{\alpha}ds \\
&\leqslant M\|a\|_{\alpha} + Mk(\rho)\left[\int_{0}^{\tau-t} e^{-\beta u}du\right. \\
&\quad \left. + \int_{0}^{+\infty} u^{-\alpha}e^{-\beta u}du\right]2M\|a\|_{\alpha} \leqslant M\|a\|_{\alpha} \\
&\quad + Mk(\rho)\left[\beta^{-1} + \int_{0}^{+\infty} u^{-\alpha}e^{-\beta u}du\right]2M\|a\|_{\alpha} \\
&\leqslant 2M\|a\|_{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|G(Y)(t) - G(Z)(t)\|_{\alpha} &\leqslant Mk(\rho)\left[\beta^{-1}\right. \\
&\quad \left. + \int_{0}^{+\infty} u^{-\alpha}e^{-\beta u}du\right]\|Y - Z\|_{s} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|Y - Z\|_{s}
\end{aligned}$$

于是 G 在 S 有唯一不动点，即当 $t \leqslant \tau$ 时，积分方程有唯一解 $y(t) = y^{*}(t;\tau, a)$（注意，此记号不含有 $y^{*}(\tau:\tau, a) = a$），且

$$\|y(t)\|_\alpha \leqslant 2M\|a\|_\alpha e^{2\beta(t-\tau)} \leqslant \rho e^{2\beta(t-\tau)}$$

同时还有

$$\|y^*(\tau;\tau,a)-a\|_\alpha = \left\|\int_{-\infty}^{\tau} e^{-L_2(\tau-s)}E_2 g(s,y^*(s))ds\right\|_\alpha$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau-s)^{-\alpha}e^{\beta(\tau-s)}k(\rho)2M\|a\|_\alpha e^{2\beta(s-\tau)}ds$$

$$\leqslant 2M^2k(\rho)\int_0^{+\infty} u^{-\alpha}e^{-\beta u}du\|a\|_\alpha$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha \tag{6.8}$$

也就有

$$\|y^*(\tau;\ \tau,\ a)\|_\alpha \geqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha$$

若证得 $y^*(t;\tau,a)$ 是(6.4)的解，令 $z_n = y^*(t_0;t_0+n,a)$，则 $\|z_n\|_\alpha \leqslant \rho e^{-2\beta n} \to 0(n\to+\infty)$，且对 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+n$(6.4) 有解 $v(t;t_0,z_n) = y^*(t;t_0+n,a)$。

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|v(t;\ t_0,\ z_n)\|_\alpha \geqslant \|v(t_0+n;t_0,z_n)\|$$

$$= \|y^*(t_0+n,t_0+n,a)\|_\alpha \geqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha > 0$$

余下证明 $y(t)=y^*(t;\tau,a)$ 是(6.4)的解. 令 $\gamma(s)=g(s,y(s))$。由积分方程(6.7)得

$$E_1y(t) = e^{-L_1(t-\tau)}a + \int_\tau^t e^{-L_1(t-s)}E_1\gamma(s)ds$$

$$E_2y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-L_2(t-s)}E_2\gamma(s)ds$$

$$= e^{-L_2(t-t_0)}\left(\int_{-\infty}^{t_0} e^{-L_2(t_0-s)}E_2\gamma(s)ds\right)$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{-L_2(t-s)}E_2\gamma(s)ds$$

由第九章中积分方程与微分方程等价性定理得知，程分方程 (6.7) 的解 $y(t)=E_1y(t)+E_2y(t)$ 也是微分方程(6.4)的解。证毕。

注　由得到(6.8)的过程中易看到，我们也可得到

$$\|y^*(\tau;\tau,a)-a\| \leqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha$$

从而可得更强的结果：存在 $\{x_n, n\geqslant 1\}$ 满足 $\|x_n - x_0\|_\alpha \to 0$，但对每个 $n\geqslant 1$

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|u(t;t_0,x_n)-x_0\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$$

下面看两个例子。

例 1

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au-bu^3 \quad (0<x<\pi,\ t>0)\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases} \tag{6.9}$$

方程(6.9)关于零解的线性化问题是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+av\\ v(0,t)=v(\pi,t)=0\end{cases}$$

相应的特征值问题

$$\begin{cases}-\varphi''-a\varphi=\lambda\varphi\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}$$

的全体特征值为

$$\{n^2-a;\ n=1,2,3,\cdots\}$$

因此，当 $a<1$ 时零解在 $H_0^1(0,\pi)$ 是渐近稳定的，当 $a>1$ 时零解是不稳定的，当 $a=1$ 时有零特征值，因此线性近似方法不能用。

当 $b>0$，$a>1$ 时(6.9)存在唯一正平衡解 $u_e(x)$，令

$$f(u)=au-bu^3$$

则

$$f(v+u_e)=f(u_e)+Bv+g(v),\quad B=a-3bu_e^2$$

考察特征值问题

$$\begin{cases}-\varphi''+(3bu_e^2-a)\varphi=\lambda\varphi\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases} \tag{6.10}$$

因为

$$\begin{cases}-w'' + (bu_{t^2} - a)w = \lambda w \\ w(0) = w(\pi) = 0\end{cases}$$

有特征值 $\lambda = 0$，相应特征函数为 $u_t(x) > 0 (x \in (0,\pi))$，所以 $\lambda = 0$ 是最小特征值。因为 $(3bu_{t^2} - a) > (bu_{t^2} - a)$，所以 (6.10) 的最小特征值为正的。因此 $u_t(x)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 是稳定的。

例 2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界光滑区域，而 u, T 是消耗在一级热反应中的物质的浓度和温度，它们满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \varepsilon u f(T) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x \in \Omega) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + q u f(T)\end{cases} \tag{6.11}$$

其中 D, q, ε 是正的常数，ε 是充分小，$f(T) = \exp(-H/T)$，H 是正的常数（当 $T = 0$ 时 $f(T) = 0$）。

将方程组 (6.11) 化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \varepsilon u f(T^* + 1) \\ \dfrac{\partial T^*}{\partial t} = \Delta T^* + q u f(T^* + 1)\end{cases} \tag{6.12}$$

边条件是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ T^*|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.13}$$

其中 $T^* = T - 1$。

方程 (6.12) 连同边条件 (6.13) 关于 $(0,0)$ 的线性近似问题是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \varepsilon f(1) u \\ \dfrac{\partial T^*}{\partial t} = \Delta T^* + q f(1) u \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ T^*|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

相应的特征值问题是

$$\begin{cases}-\Delta u+\varepsilon f(1)u=\lambda u\\ -\Delta T^*-qf(1)u=\lambda T^*\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\ T^*|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{6.14}$$

它的最小特征值是 $\lambda_0=\min(\lambda^*,\varepsilon f(1))$，其中 λ^* 是

$$\begin{cases}-\Delta T^*=\lambda T^*\\ T^*|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{6.15}$$

的最小特征值，$\lambda^*>0$（习题 10.5）.因此 $\lambda_0>0$,$(u,T^*)=(0,0)$ 是渐近稳定的,即 $(u,T)=(0,1)$ 在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 是渐近稳定的.

10.7 稳定性问题的若干例子

本节利用抽象理论讨论算子方程

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=f(u)\\ u(0)=u_0\end{cases}$$

的若干例子,即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(u)\quad(x\in\Omega,\ t>0)\\ u|_{\partial\Omega}=0\ \text{或}\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\quad(x\in\partial\Omega,\ t>0)\\ u(x,0)=u_0(x)\quad(x\in\Omega)\end{cases}$$

这里 $A=-\Delta$ 是 Laplace 算子.

对于第一边条件情形,考虑

$$A:D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\to L_2(\Omega)\equiv X,$$

则 A 是扇形的,而且还是正的,自共轭的; A^{-1} 是紧算子. 我们可以定义 $A^\alpha(0<\alpha<1)$，$X^\alpha=D(A^\alpha)$，特别有 $X^{\frac{1}{2}}=H_0^1(\Omega)$.

对于第二边条件情形,考虑

$$A: D(A)=\left\{u \mid u\in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\right\}\to X$$

则 A 也是扇形的，而且是非负的，自共轭的，这时 $D(A^{\frac{1}{2}})=X^{\frac{1}{2}}=H^1(\Omega)$。

因此，本节中讨论的平衡解的稳定性均指 $H^1(\Omega)$ 中的稳定性。但是，在一定条件下，对于有界解来说，由 $H^1(\Omega)$ 中的收敛性可以得到 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的收敛性。

例 1 N. Chafee 和 E. Infante 在 1971 年对非线性方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda f(u) \quad (0<x<\pi, t>0) & \text{(a)}\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \quad (t\geqslant 0) & \text{(b)}\\ u(x,0)=u_0(x) \quad (x\in[0,\pi]) & \text{(c)}\end{cases} \tag{7.1}$$

讨论了全局稳定性问题，其中 λ 是非负常数，$f\in C^2(\mathbf{R}^1)$ 满足：

1° $f(0)=0$，$f'(0)>0$，

2° $\displaystyle\lim_{|u|\to\infty}\sup\frac{f(u)}{u}\leqslant 0$，

3° $\operatorname{sgn}f''(u)=-\operatorname{sgn}u$。

在第八章中，我们在条件(7.2)下，对 (7.1) 的平衡解的分叉即边值问题

$$\begin{cases}u''(x)+\lambda f(u(x))=0\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$$

进行过详细的讨论，现在分析这些平衡解的稳定性。

(7.1)(a),(b) 可写成

$$\frac{du}{dt}+Au=\lambda f(u) \tag{7.3}$$

其中 $A=-\dfrac{d^2}{dx^2}$，$D(A)=H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$，记 $X=L(0,\pi)$，$X^{\frac{1}{2}}=D(A^{\frac{1}{2}})=H_0^1(0,\pi)$。

(一) 解的估计。

方程(7.3)有 Liapunov 函数

$$V(\varphi)=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}(\varphi'(x))^2-\lambda F(\varphi(x))\right]dx\quad(\varphi(x)\in X^{\frac{1}{2}})$$

其中

$$F(u)=\int_0^u f(\xi)d\xi$$

因为$\dfrac{F(s)}{s^2}=\dfrac{\int_0^M f(\xi)d\xi}{s^2}+\dfrac{\int_M^s f(\xi)d\xi}{s^2}$，由条件 (7.2)2° 知：对任意 $\varepsilon>0$，存在常数 C_ε，使得

$$F(s)\leqslant\varepsilon s^2+C_\varepsilon\quad(-\infty<s<+\infty)$$

于是

$$V(\varphi)\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\pi\varphi'(x)^2dx-\lambda\varepsilon\int_0^\pi\varphi^2(x)dx-\lambda\pi C_\varepsilon$$

注意当 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$ 时由 $\int_0^\pi\varphi'(x)^2dx\geqslant\int_0^\pi\varphi^2(x)dx$，可得

$$V(\varphi)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\lambda\varepsilon\right)\int_0^\pi\varphi'(x)^2dx-\lambda\pi C_\varepsilon$$

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{4\lambda}$，得

$$V(\varphi)\geqslant\frac{1}{4}\|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2-\pi\lambda C_\varepsilon$$

若 $u(x,t;\varphi)$ 是(7.3)的解，则在解的存在区间上

$$V(\varphi)\geqslant V(u(x,t;\varphi))\geqslant\frac{1}{4}\|u(x,t;\varphi)\|_{\frac{1}{2}}^2-\pi\lambda C_\varepsilon$$

于是

$$\|u(x,t;\varphi)\|_{\frac{1}{2}}^2\leqslant4(\pi\lambda C_\varepsilon+V(\varphi))$$

因此，解的存在区间是 $[0,+\infty)$，(7.3) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统。

（二）原点的稳定性问题。

我们不妨假定 $f'(0)=1$，不然的话可改变参数 λ，使之满足

这个条件。

(7.3) 在原点的线性化问题是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\lambda v & (0<x<\pi, t>0)\\ v(0,t)=v(\pi,t)=0\end{cases}$$

由此易知

$$\sigma(A-\lambda I)=\{n^2-\lambda \mid n=1,2,3,\cdots\}$$

由定理 10.6.2 与定理 10.6.6 知:

若 $0\leqslant\lambda<1$, $u=0$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是指数稳定的;若 $\lambda>1$, $u=0$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是不稳定的。

利用线性近似方法,当 $\lambda=1$ 时是无法判断的,对 $\lambda<1$ 得到的也只是局部的稳定性。

现在可进一步证明:

定理 10.7.1 当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时, $u=0$ 在 $H_0^1(0,\pi)$中是全局渐近稳定的。

证明 令

$$V(\varphi)=\int_0^\pi \varphi'(x)^2dx=\|\varphi\|_{H_0^1}^2\quad(\varphi\in H_0^1(0,\pi))$$

设 $u(x,t)$ 满足(7.1),则

$$\begin{aligned}\frac{dV(u(x,t))}{dt}&=2\int_0^\pi u_x u_{tx}dx\\ &=-2\int_0^\pi u_t u_{xx}dx=-2\int_0^\pi \lambda f(u)u_{xx}dx\\ &\quad-2\int_0^\pi u_{xx}^2dx=2\int_0^\pi \lambda f'(u)u_x^2dx\\ &\quad-2\int_0^\pi u_{xx}^2dx\end{aligned}$$

对任意 $\xi, f'(\xi)\leqslant f'(0)=1$, $\int_0^\pi u_x^2dx\leqslant\int_0^\pi u_{xx}^2dx$, 于是

$$\frac{dV(u(x,t))}{dt}\leqslant-2(1-\lambda)\int_0^\pi u_x^2dx$$

由此得

$$\dot{V}(\varphi) \leqslant 0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$
$$\dot{V}(\varphi) \leqslant -2(1-\lambda)\|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^{2} \quad (0 \leqslant \lambda < 1)$$

这就证明了：当 $0 \leqslant \lambda < 1$ 时，$u = 0$ 是全局渐近稳定的。

当 $\lambda = 1$ 时仍有 Liapunov 函数 $V(\varphi) = \|\varphi\|_{H_0^1}^2$，故原点稳定，再考察

$$\begin{cases} \varphi''(x) + f(\varphi(x)) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

若 $\varphi(x)$ 是它的解，则

$$(\varphi''(x) + \varphi)\varphi = (\varphi - f(\varphi))\varphi$$

两边积分得

$$\int_0^\pi [-\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)]dx = \int_0^\pi [\varphi(x) - f(\varphi)]\varphi(x)\,dx$$

显然，左端 $\geqslant 0$，因为 $[u - f(u)]u < 0 \quad (u \neq 0)$，所以右端 $\leqslant 0$，只能有

$$\int_0^\pi [\varphi - f(\varphi)]\varphi\,dx = 0$$

即 $\varphi(x) \equiv 0$。因此，当 $\lambda = 1$ 时 $u = 0$ 也是全局渐近稳定的。

（三） 非零平衡解的稳定性。

现在讨论非零平衡解 $\varphi_k^\pm (k = 1, 2, 3, \cdots)$ 的稳定性问题，先证一个比较原理。

引理 10.7.2 设 $p(x) \in C^1[a, b]$，$p(x) > 0 \quad (x \in [a, b])$，$q(x) \in C[a,b]$，$\varphi(x)$、$\psi(x) \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$，在 $(a,b]$ 上 $\psi(x) > 0$ 且

$$(p(x)\varphi')' + q(x)\varphi \geqslant 0$$
$$\geqslant (p(x)\psi')' + q(x)\psi \quad (x \in (a,b)) \tag{7.4}$$

（在 (a,b) 的任意子区间上，若一端取恒等号，则另一端不取恒等号），又 $\varphi(a) = \psi(a) = 0$，$\varphi'(a) = \psi'(a) > 0$，则在 $a < x \leqslant b$ 上

$$\varphi(x) > \psi(x)$$

证明

(1) 先证对任意 $x_0\in(a,b]$，若 $x\in(a,x_0]$ 时 $\varphi(x)>0$，则 $\varphi(x)>\phi(x)(x\in(a,x_0])$。由(7.4)得

$$
\begin{aligned}
&(p\varphi')'\phi-(p\phi')'\varphi\\
&\quad=[p(\varphi'\phi-\varphi\phi')]'\geqslant 0 \quad x\in(a,x_0)
\end{aligned}
$$

在 (a,x_0) 的任意子区间上不恒为零，又

$$p(a)[\varphi'(a)\phi(a)-\varphi(a)\phi'(a)]=0$$

故 $x\in(a,x_0)$ 时 $(\varphi'\phi-\varphi\phi')>0$，而

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{\phi}\right)=\frac{\varphi'\phi-\varphi\phi'}{\phi^2}>0$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=1$$

所以

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}>1 \quad (x\in(a,x_0])$$

(2) 证明存在 $\delta>0$，当 $a<x<\delta$ 时 $\varphi(x)>0$，

令 $\varphi=ve^{\int_a^x\alpha(t)dt}$，则

$$
\begin{aligned}
&\varphi'=(v'+v\alpha)e^{\int_a^x\alpha(t)dt}, \quad \varphi'(a)=v'(a)\\
&(p\varphi')'+q(x)\varphi=[(pv')'+2\alpha(pv')\\
&\qquad+(p\alpha'+p\alpha^2+p'\alpha+q)v]e^{\int_a^x\alpha(t)dt}\geqslant 0
\end{aligned}
$$

于是存在 $\delta>0$，及 $\alpha(x)$，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$p\alpha'+p\alpha^2+p'\alpha+q=0$$

就有

$$(pv')'+2\alpha(x)(pv')\geqslant 0$$

$$(pv'e^{2\int_a^x\alpha(t)dt})'\geqslant 0$$

又 $p(a)v'(a)>0$，所以 $v'>0$；而 $v(0)=0$，所以 $v(x)>0$，即 $\varphi(x)>0 \quad (x\in(a,a+\delta))$。

(3) 取上述最大的 δ，则 $a+\delta=b$，在 $(a,b]$ 上 $\varphi(x)>$

若不然，最大的 δ 使 $a+\delta<b$，则 $\varphi(x)>0$ $(x\in(a,a+$

$\delta)$), $\varphi(a+\delta)=0$，由前面的证明在 $(a, a+\delta]$ 上 $\varphi(x)>\phi(x)$，于是 $\varphi(a+\delta)=0>\phi(a+\delta)$，这便矛盾了.

综合以上,引理得证. 证毕.

利用这个引理可证以下判断稳定性准则.

定理 10.7.3 设 $\varphi(x)$ 是(7.1)的非零平衡解,又设存在 $\phi(x)\in C^2(0,\pi)\cap C[0,\pi]$，满足

$$\begin{cases}\phi''(x)+\lambda f'(\varphi(x))\phi(x)=0 & (0<x<\pi)\\ \phi(0)=0,\ \phi'(0)=1\end{cases} \tag{7.5}$$

1° 若在 $0<x\leqslant\pi$ 上 $\phi(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 是渐近稳定的.

2° 若在 $0<x<\pi$ 内某点处 $\phi(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 是不稳定的.

证明 考察特征值问题

$$\begin{cases}-\vartheta''-\lambda f'(\varphi(x))\vartheta=\mu\vartheta\\ \vartheta(0)=0,\ \vartheta(\pi)=0\end{cases}$$

设 μ_0 为第一个特征值，相应的特征函数为 $\vartheta_0(x)$，$\vartheta_0'(0)=1$，$\vartheta_0(x)>0\quad(x\in(0,\pi))$.

若在 $0<x\leqslant\pi$ 上 $\phi(x)>0$，则 $\mu_0>0$.若不然,则 $\mu_0\leqslant 0$，若 $\mu_0=0$，由初值问题解的唯一性知，$\vartheta_0(x)=\phi(x)$，$\vartheta_0(\pi)=\phi(\pi)=0$，与 $\phi(\pi)>0$ 矛盾. 若 $\mu_0<0$，则

$$\vartheta_0''+\lambda f'(\varphi)\vartheta_0>0=\phi''+\lambda f'(\varphi)\phi\quad(x\in(0,\pi))$$

$$\vartheta_0(0)=\phi(0)=0,\ \vartheta_0'(0)=\phi'(0)=1$$

于是由引理 10.7.2 知，$\vartheta_0(x)>\phi(x)(x\in(0,\pi])$，与 $\phi(\pi)>0$ 矛盾. 由 $\mu_0>0$ 知，$\varphi(x)$ 是渐近稳定的. 另一结论类似可证. 证毕.

利用这个准则可得

定理 10.7.4 若 $\lambda>1(f'(0)=1)$，则(7.1)的平衡解 φ_1^+ 是渐近稳定的,而 $\varphi_k^\pm(k=2,3,\cdots)$ 都是不稳定的.

证明 令 $\varphi(x)=\varphi_1^+(x,\lambda)$，则 $\varphi'(0)>0$，在 $0<x<\pi$ 上 $\varphi(x)>0$，且 $f(\varphi(x))>0$.

现考察初值问题(7.5)的解 $\psi(x)$。令

$$v(x)=-(\lambda\varphi'(0))^{-1}\varphi''(x)=(\varphi'(0))^{-1}f(\varphi(x))$$

则在 $0<x<\pi$ 时，$v(x)>0$；$v(0)=0$，$v(\pi)=0$、$v'(0)=1$，又在 $(0,\pi)$ 上

$$v''+\lambda f'(\varphi)v=f''(\varphi(x))\varphi'(x)^2/\varphi'(0)\leqslant 0$$

($(0,\pi)$ 的任意子区间上不恒为零)，由引理 10.7.2 知，在 $0<x\leqslant\pi$ 上 $\psi(x)>v(x)\geqslant 0$，这就证明了 φ_1^+ 的渐近稳定性。类似地，φ_1^- 是渐近稳定的。

现假定 φ 是非零平衡解，满足 $\varphi'(0)>0$，同时在 $(0,\pi)$ 中某处 φ 取零值，则在 $(0,\pi)$ 中某点 x_1 处有负最小值，所以 $\varphi(x_1)<0$，$\varphi'(x_1)=0$，但是 $\psi(x)$ 和 $\varphi'(x)$ 都是 $v''+\lambda f'(\varphi)v=0$ 的解，所以它们的 Wronski 行列式为常数

$$\psi'(x)\varphi'(x)-\psi(x)\varphi''(x)=\varphi'(0)>0$$

因此，令 $x=x_1$，得

$$-\psi(x_1)\varphi''(x_1)>0$$

而 $\varphi''(x_1)>0$，故 $\psi(x_1)<0$，从而证明了 φ 是不稳定的。当 $\varphi'(0)<0$ 时类似可证。证毕。

以上稳定性均指 $H_0^1(0,\pi)$ 空间中的稳定性。本例子可参见 [Hen]。

例 2 初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u) & (0<x<1,\ t>0)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0 & (t\geqslant 0)\\ u(x,0)=u_0(x) & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}\tag{7.6}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u) & (0<x<1,\ t>0)\\ u(0,t)=u(1,t)=0 & (t\geqslant 0)\\ u(x,0)=u_0(x) & (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}\tag{7.7}$$

相应的平衡解问题是

$$\begin{cases}-(p(x)u')' - f(u) = 0\\ u'(0) = u'(1) = 0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}-(p(x)u')' - f(u) = 0\\ u(0) = u(1) = 0\end{cases}$$

这里，$p\in C^2[0,1]$，$p(x)>0(x\in[0,1])$，$f\in C^2$.

定理 10.7.5 设 $\varphi(x)$ 是（7.6）的非常数平衡解，$\varphi(x)\in C^3[0,1]$，若 $p(x)=b^2(x)$，$b''(x)\leqslant 0(x\in[0,1])$，则 $\varphi(x)$是不稳定的(在 $H^1(0,1)$).

证明 令

$$J(v)=\int_0^1[p(x)v'^2-f'(\varphi(x))v^2]dx$$

只须证明存在 $v\in H^1(0,1)$ 使得

$$J(v)<0$$

由

$$\begin{cases}(b^2\varphi')' + f(\varphi) = 0\\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0\end{cases}$$

得

$$b'(b\varphi')+b(b\varphi')'+f(\varphi)=0$$

两边对 x 求导得

$$b''(b\varphi')+2b'(b\varphi')'+b(b\varphi')''+f'(\varphi)\varphi'=0$$

两边乘以 $b^2\varphi'$ 并积分得

$$\int_0^1 b''b^3\varphi'^2dx+2\int_0^1 b^2b'(b\varphi')'\varphi'dx$$

$$+\int_0^1 b^2(b\varphi')''(b\varphi')dx+\int_0^1 f'(\varphi)b^2\varphi'^2dx=0$$

因为

$$\int_0^1 b^2(b\varphi')''(b\varphi')dx=-\int_0^1 b^2[(b\varphi')']^2dx$$

$$-2\int_0^1 bb'(b\varphi')(b\varphi')'dx$$

于是

$$\int_0^1 b^2[(b\varphi')']^2dx-\int_0^1 f'(\varphi)b^2\varphi'^2dx$$
$$=\int_0^1 b''b^3\varphi'^2dx$$

即

$$J(b\varphi')=\int_0^1 b''b^3\varphi'^2dx\leqslant 0$$

平衡解 $\varphi(x)$ 处线性化问题相应的特征值问题是

$$\begin{cases}-(b^2(x)w')'-f'(\varphi(x))w=\lambda w\\ w'(0)=w'(1)=0\end{cases}\tag{7.8}$$

按特征值的极小原理，若 $J(b\varphi')<0$，则(7.8)的最小特征值 $\lambda^*<0$，若 $J(b\varphi')=0$，也必有 $\lambda^*<0$，若不然 $\lambda^*=0$，则 $b\varphi'$ 是相应的特征函数，$b\varphi'|_{x=0,1}=0$，但(7.8)的最小特征值对应的特征函数在[0,1]处处不为零，故矛盾。

为了讨论(7.7)的平衡解，要用到以下一个结论，它易由特征值的极小性质得证。

引理 10.7.6 设 $a<a_1<b_1<b$，$p(x)\in C^1[a,b]$，$p(x)>0(x\in[a,b])$。若

$$\begin{cases}(p(x)u')'+q(x)u=\lambda u\\ u'(a_1)=u'(b_1)=0\end{cases}$$

的最小特征值是负的，则

$$\begin{cases}(p(x)u')'+q(x)u=\lambda u\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$$

的最小特征值也是负的。

定理 10.7.7 设 $\varphi(x)$ 是(7.7)的平衡解，$\varphi(x)\in C^3[0,1]$，在 $(0,1)$ 有零点，若 $p(x)=b^2(x)$，$b''(x)\leqslant 0(x\in[0,1])$，则 $\varphi(x)$ 是不稳定的(在 $H^1(0,1)$)。

证明 存在 $[\alpha,\beta]\subset(0,1)$ 使得

$$\begin{cases}(p(x)\varphi')'+f(\varphi(x))=0\\ \varphi'(\alpha)=\varphi'(\beta)=0\end{cases}$$

根据定理 10.7.5 的证明。

$$\begin{cases}-(p(x)w')'-f'(\varphi(x))w=\lambda w\\ w'(\alpha)=w'(\beta)=0\end{cases}$$

有负的最小特征值，再由引理 10.7.6 得到

$$\begin{cases}-(p(x)w')'-f'(\varphi(x))w=\lambda w\\ w(0)=w(1)=0\end{cases}$$

有负的最小特征值。因此 $\varphi(x)$ 在 $H^1(0,1)$ 是不稳定的。证毕。

定理 10.7.8 设 $f(0)=0, f'(0)>0$，当 $u>0$ 时 $f''(u)<0$。若 $\varphi(x)$ 是(7.7)的平衡解，在(0,1)上 $\varphi(x)>0$ 且 $f(\varphi(x))>0$，则 $\varphi(x)$ 是稳定的(在 $H_0^1(0,1)$)。

证明 考察初值问题

$$\begin{cases}(p(x)\psi')'+f'(\varphi(x))\psi=0 \quad (0<x<1)\\ \psi(0)=0,\ \psi'(0)=1\end{cases}$$

的解 $\psi(x)$。令 $v(x)=af(\varphi(x))$，$a=[f'(0)\varphi'(0)]^{-1}$

则

$$v(x)>0 \quad (x\in(0,1))$$

$$v(0)=0,\quad v'(0)=1$$

且

$$(p(x)v')'+f'(\varphi(x))v=p(x)f''(\varphi(x))\varphi'^2(x)a$$

$$\leqslant 0 \quad (x\in(0,1))$$

由引理 10.7.2 知，在 $0<x\leqslant 1$ 上 $\psi(x)>v(x)\geqslant 0$。再由定理 10.7.3 知，$\varphi(x)$ 是稳定的。证毕。

本例子可参见 [CaH]。

例 3 初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u) \quad ((t,x)\in(0,+\infty)\times\Omega)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \quad (t\in[0,+\infty))\\ u(x,0)=u_0(x) \quad (x\in\Omega)\end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是带光滑边界的有界区域，$f\in C^1$。它的平衡解

$\varphi(x)$，即

$$\begin{cases}-\Delta\varphi(x)-f(\varphi(x))=0\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{7.9}$$

“$\dfrac{\partial}{\partial n}$”为 $\partial\Omega$ 处的外法向导数。

下面对 f 或区域加以限制。以保证非常数平衡解 $\varphi(x)$ 是不稳定的(在 $H^1(\Omega)$ 中)。

在平衡解 $\varphi(x)$ 处线性化问题相应的特征值问题是

$$\begin{cases}-\Delta w-f'(\varphi(x))w=\lambda w\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{7.10}$$

按特征值的极小原理，若存在 $v\in H^1(\Omega)$，使得

$$I(v)=\int_\Omega[-|\nabla v|^2+f'(\varphi(x))v^2]dx>0$$

则最小特征值是负的，因而 $\varphi(x)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中是不稳定的。

定理 10.7.9 设 $\varphi(x)$ 是非常数平衡解，值域属于 $[a,b]$。若 $u\in[a,b]$ 时 $f''(u)\geqslant 0$（或 $f''(u)\leqslant 0$），但不恒为零，则 $\varphi(x)$ 是不稳定的。

证明 设 $f''\geqslant 0$，$f''(u)\not\equiv 0$ 令 $c=\min\limits_\Omega\varphi(x)$ 要证

$$I(\varphi-c)=\int_\Omega[-|\nabla\varphi|^2+f'(\varphi(x))(\varphi(x)-c)^2]dx>0$$

因为(7.9)成立，所以

$$\int_\Omega \varphi f(\varphi)dx=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dx$$

$$\int_\Omega f(\varphi)dx=0$$

因此，

$$I(\varphi-c)=-\int_\Omega(\varphi-c)f(\varphi)dx$$

$$+\int_\Omega f'(\varphi)(\varphi-c)^2dx$$

$$=-\int_\Omega(\varphi-c)[f(\varphi)-f'(\varphi)(\varphi-c)]dx$$

因为 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$，所以不论最小值在$\Omega$内或 $\partial\Omega$ 上取到，在最小值点 x_0 处均有

$$f(c)=-\Delta\varphi(x_0)\leqslant 0$$

由 f'' 的条件，若 $\varphi(x)\neq c$，则

$$0\geqslant f(c)>f(\varphi(x))+f'(\varphi)(c-\varphi(x))$$

于是

$$I(\varphi-c)>0$$

另一情形类似可证。证毕。

定理 10.7.10 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是凸子集，$\varphi(x)\in C^3(\Omega)$ 是非常数平衡解，则 $\varphi(x)$ 是不稳定的。

证明 $n=1$ 时即是例 2 的特殊情形，只须考虑 $n\geqslant 2$，分以下几步：

(1) 证明 $\sum_{i=1}^n I(\varphi_{x_i})=-\int_{\partial\Omega}\nabla\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\varphi)d\sigma$

由(7.9)得

$$\Delta\varphi_{x_i}+f'(\varphi)\varphi_{x_i}=0$$

$$\int_\Omega\varphi_{x_i}\Delta\varphi_{x_i}dx+\int_\Omega f'(\varphi)\varphi_{x_i}^2dx=0$$

$$\int_\Omega[-|\nabla\varphi_{x_i}|^2+f'(\varphi)\varphi_{x_i}^2]dx$$

$$=-\int_{\partial\Omega}\varphi_{x_i}\frac{\partial\varphi_{x_i}}{\partial n}d\sigma$$

于是

$$\sum_{i=1}^n I(\varphi_{x_i})=-\int_{\partial\Omega}\nabla\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\varphi)d\sigma \qquad (7.11)$$

(2) 证明对任意 $x\in\partial\Omega$

$$\nabla\varphi(x)\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\varphi(x))\leqslant 0$$

不失一般性，让 x 是坐标原点，并设原点邻域 Ω 的边界可表为 $x_n=g(x_1,\cdots,x_{n-1})$，在原点 $-x_n$ 方向是 $\partial\Omega$ 的外法向，g 是凸函数。

显然

$$\varphi_{x_n}(0)=-\frac{\partial\varphi(0)}{\partial n}=0$$

$$\frac{\partial\varphi_{x_j}(0)}{\partial n}=-\varphi_{x_jx_n}(0)$$

于是

$$\nabla\varphi(0)\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\varphi(0))=-\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}(0)\varphi_{x_jx_n}(0) \tag{7.12}$$

在 $\partial\Omega$ 上原点的邻域内

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}\cos\alpha_i\Big|_{x_n=g(x_1,\cdots,x_{n-1})}$$

$$0=\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_i}(x_1,\cdots,x_{n-1},g(x_1,\cdots,x_{n-1}))g_{x_i}$$
$$-\varphi_{x_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},g(x_1,\cdots,x_{n-1}))$$

注意 $g(0)=0$，g 以原点为极小点，$g_{x_i}(0)=0$ $(i=1,\cdots,n)$。

于是将上式对 x_j 求导，得

$$\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_i}(0)g_{x_ix_j}(0)=\varphi_{x_jx_n}(0)$$

代入(7.12)得

$$\nabla\varphi(0)\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\varphi(0))=-\sum_{i,j=1}^{n-1}g_{x_ix_j}(0)\varphi_{x_i}(0)\varphi_{x_j}(0)$$

因为 g 是凸的，所以右端非正，即

$$\nabla\varphi(x)\cdot\frac{\partial}{\partial n}(\nabla\varphi(x))\leqslant 0\quad(x\in\partial\Omega)\tag{7.13}$$

(3) 证明最小特征值 $\lambda^*<0$。

由(7.11)和(7.13)得

$$\sum_{i=1}^{n}I(\varphi_{x_i})\geqslant 0$$

因而至少有一个 i，使得 $\varphi_{x_i}\not\equiv 0, I(\varphi_{x_i})\geqslant 0$。

若 $I(\varphi_{x_i})>0$，显然 (7.10) 的最小特征值 $\lambda_0<0$。若 $I(\varphi_{x_i})=0$，也必有 $\lambda_0<0$，否则 $\lambda_0=0$，φ_{x_i} 是相应的特征函数。在 $\partial\Omega$ 的某点处必有

$$\varphi_{x_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,$$

但 (7.10) 的最小特征值对应的特征函数在 Ω 上是处处不为零的，故得矛盾。证毕。

本例子可参见 [ChH]。

习 题 十

10.1 证明定理 10.3.2.

10.2 证明推论 10.3.7 与推论 10.3.9。

10.3 设在原点邻域 $\rho: X^\alpha\to\mathbb{R}_+$，$f: X^\alpha\to X$ 是连续可微的，A 是扇形算子，$f(\theta)=\theta$，$\rho(\theta)=1$，又 $\sigma(A-Df(\theta))>0$，其中 $Df(\theta)$ 是 f 在 $x=\theta$ 处的导算子。证明

$$\frac{dx}{dt}+\rho(x)Ax=f(x)$$

的零解在 X^α 是一致渐近稳定的。

10.4 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，B 是它的无穷小生成元。令 $B_\lambda(t)x=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds$。证明

(1) 对 $\forall x\in X$，$B_\lambda(t)x\in D(B)$ 且

$$B(B_\lambda(t)x)=\lambda B_\lambda(t)x+T(t)x-e^{\lambda t}x$$

(2) 对 $\forall x\in X$

$$(\lambda I - B)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x$$

(3) 对 $\forall x \in D(B)$

$$B_\lambda(t)(\lambda I - B)x = e^{\lambda t}x - T(t)x$$

(4) 记 $\rho(T(t))$ 为 $T(t)$ 的预解集，若 $t\geqslant 0, e^{\lambda t}\in\rho(T(t))$，令 $Q = (e^{\lambda t} - T(t))^{-1}$，则

$$T(t)Q = QT(t),\ B_\lambda(t)Q = QB_\lambda(t)$$

(5) 若 $t\geqslant 0$，$e^{\lambda t}\in\rho(T(t))$，则 $\lambda\in\rho(B)$.

10.5 证明(6.14)的最小特征值是 $\lambda_0 = \min(\lambda^*, sf(1))$，其中 λ^* 是(6.15) 的最小特征值。

10.6 考察如下特征值问题：

$$\begin{cases}-u'' + a(x)u + b(x)v = \lambda u & (x\in[\alpha,\beta])\\ -v'' + c(x)v = \lambda v \\ u(\alpha) = u(\beta) = v(\alpha) = v(\beta) = 0\end{cases}$$

其中 $a(x), b(x), c(x)\in C[\alpha,\beta]$，它的特征值集合记为 Λ. 又

$$\begin{cases}-u'' + a(x)u = \lambda u\\ u(\alpha) = u(\beta) = 0\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}-v'' + c(x)v = \lambda v\\ v(\alpha) = v(\beta) = 0\end{cases}$$

的最小特征值集合分别记为 Λ_1 与 Λ_2，最小特征值分别记为 $\lambda_0^{(1)}$ 与 $\lambda_0^{(2)}$。证明：

(1) $\Lambda\subset\Lambda_1\cap\Lambda_2$,

(2) $\Lambda_1\cup(\Lambda_2\backslash\Lambda_1)\subset\Lambda$,

(3) 若 $\Lambda_1\cap\Lambda_2 = \varnothing$，则 $\Lambda = \Lambda_1\cup\Lambda_2$.

(4) 若 $\lambda\in(\Lambda_1\cap\Lambda_2)$，相应的特征函数分别为 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$，则 $\lambda\in\Lambda\Leftrightarrow\int_a^b b(x)\varphi(x)\psi(x)dx = 0$.

(5) $\Lambda\subset\mathbf{R}^1$，$\Lambda$有下界，$\inf\Lambda\equiv\lambda_0 = \min(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)})\in\Lambda$.

10.7 设X是 Banach 空间，$T(t)$ 是X上的解析半群，以B为无穷小生成元，$\|T(t)\|\leqslant Me^{-\omega t}(\forall t\geqslant 0)$，$M\geqslant 1$，$\omega > 0$ 为常数，$G: X\to X$ 是局部 Lipschitz 连续的，$G(\theta) = \theta$，$\exists$ 常数 $\varepsilon_0 > 0$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，使得

$$\|G(u)\|\leqslant\beta\|u\|^{1+\alpha}\quad(\|u\|\leqslant\varepsilon_0)$$

方程

$$\frac{du}{dt} = Bu + G(u)$$

满足初值 $u(0) = u_0$ 的解记为 $u(t; u_0)$，考察零解的局部渐近稳定性。

(1) 证明　当 $0<r_0<\left(\frac{\omega}{M\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 时初值问题

$$\begin{cases} r' = -\omega r + M\beta r^{1+\alpha} \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

的解 $r(t)$ 的存在区间是 $[0,+\infty)$，$r'(t)<0$，$\lim\limits_{t\to\infty} r(t)=0$。

(2) 导出 $r(t)$ 满足的积分方程。

(3) 令 $\varepsilon_1=\min\left(\varepsilon_0,\left(\frac{\omega}{M\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$，$\forall u_0\in X$，$\|u_0\|<\varepsilon_1/M$，证明解 $u(t;u_0)$ 在存在区间上满足

$$\|u(t;u_0)\|\leqslant r(t)$$

其中 $r(0)=M\|u_0\|$。

(4) $\forall u_0\in X$，$\|u_0\|<\varepsilon_1/2M$，证明解 $u(t;u_0)$ 的存在区间是$[0,+\infty)$。

(5) 证明 $\frac{du}{dt}=Bu+G(u)$ 的零解是(局部)渐近稳定的。

参 考 文 献

[ACP] Aronson, D., G. Crandall and L. A. Peletier, Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear problem, *Nonlinear Anal.*, 6(1982), 1001—1022.

[Ad] Adams, R. A., Sobolev spaces, Academic Press, 1975 (中译本：叶其孝等译，索伯列夫空间，人民教育出版社，1981)。

[ADN] Agmon, S., A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for the solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary values, *J. Comm. Pure Appl. Math.*, 12(1959), 623—727; II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17(1964), 35—92.

[Ama] Amann H.

1. Periodic solutions of semilinear parabolic equations, Nonlinear analysis: A collection of papers in honor of Erich H. Rothe, Edited by L. Cesari, R. Kannan and H. F. Weinberger, Academic Press, 1978.

2. A uniqueness theorem for nonlinear elliptic boundary value problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 44(1967), 178—181.

3. Existence of multiple solutions for nonlinear elliptic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.*, 21(1972), 925—935.

4. Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.* 65(1978), 432—467.

[AW] Aronson, D. G., and H. F. Weinberger

1. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation, *Lecture Notes in Mathematics*, 446(1975), 5—49, Springer.

2. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics, *Adv. in Math.*, 30(1978), 33—76.

[BC] Brunovsky, P. and Shui-nee Chow, Generic properties of stationary state solutions of reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations*, 53(1984), 1—23.

[BDG] Brown, K. J., P. C. Dunne and R. A. Gardner, A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity, *J. Differential Equations*, 40(1981), 212—252.

[BNS] Berestycki, H., B. Nicolaenko and B. Scheurer

1. Wave solutions to reaction-diffusion systems modeling combustion, Nonlinear Partial Differential Equations (J. Smoller ed.), Contemporary Mathematics, volume 17(1983), 189—208.

2. Travelling wave solutions to combustion models and their singular limits, *SIAM J. Math. Anal.*, 16(1985), 1207—1242.

[Br] Bramson, M., Convergence of solutions of the Kolmogorov equation of traveling waves, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 285(1983).

[CaH] Casten, R. G. and C. J. Holland, Instability results for a reaction diffusion

equation with Neumann boundary conditions, *J. Differential Equations*, 27 (1978), 266—273.

[CCS] Chueh, K., C. Conley and J. Smoller, Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1977), 373—392.

[Che] 陈文嫄,非线性泛函分析,甘肃人民出版社,1982.

[ChH] Chipot, M. and J. Hale, Stable equilibria with variable diffusion, Nonlinear Partial Differential Equations (J. Smoller ed.), Contemporary Mathematics, volume 17(1983), 209—213.

[CI] Chafee, N. and E. F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Applicable Anal.*, 4(1974), 17—37.

[CMa] Capasso, V. and L. Maddalena, Convergence to equilibrium states for reaction-diffusion system modeling the spatial spread of a class of bacterial and viral diseases, *J. Math. Biol.*, 13(1981), 173—184.

[CoH] Courant, R. and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, volumes 1, 2, Wiley-Interscience, 1948 (中译本: 钱敏等译, 数学物理方法 I, 科学出版社, 1958; 数学物理方法 II,科学出版社,1977).

[Dan] Dancer, E. N.

1. On the indexes of fixed point of mapping in cones and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 91(1983), 131—151.

2. On positive solutions of some pairs of differential equations II, *J. Differential Equations*, 60(1985), 236—258.

[Du] Dunbar, S. T., Travelling wave solutions of diffusive Volterra-Lotka in teraction equations, Ph. D. Thesis, Univ. of Minnesota, 1981.

[DS] Dunford, N. and J. T. Schwartz, Linear operators, part I and II, Wiley-Interscience, 1966.

[Fif] Fife, P. C.

1. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Lecture Notes in Biomathematics, volume 28, 1979.

2. Asymptotic analysis of reaction-diffusion wave fronts, *Rocky Mountain J. Math.*, 7(1977), 389—415.

[FLi] de Figueiredo, D. G. and P. L. Lions, On pairs of positive solutions for a class of semilinear elliptic problems, *Indiana Univ. Math. J.*, 34(1985), 591—606.

[FLN] de Figueiredo, D. G., P. L. Lions and R. D. Nussbaum, A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.*, 61(1982), 41—63.

[FM] Fife P. C. and J. B. McLoed

1. The approach of solutions of nonlinear diffusion equation to travelling front solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 65(1977), 335—361.

2. A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 75(1981), 281—314.

[Fr] Friedman, A., Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.

[FTa] Fife, P. C. and M. M. Tang, Comparison principles fpr reaction-diffusion systems: irregular comparison functions and applications to questions of stability and speed of propagation of disturbances, *J. Differential Equations*, 40(1981), 168—185.

[FTr] Field, R. J. and W. C. Troy, The existence of solitary travelling wave solutions of a model of the Belousov-Zhabotinskii reaction, *SIAM J. Appl. Math.*, 37(1979), 561—587.

[Ga] Gardner, R. A., Existence of travelling wave solutions of predator-prey systems via the connection index, *SIAM J. Appl. Math.*, 44(1984), 56—79.

[Gu] 关肇直,泛函分析讲义,高等教育出版社,1958.

[GZF] 关肇直、张恭庆、冯德兴,线性泛函分析入门,上海科学技术出版社,197?.

[Hag] Hagan, P. S., The stability of travelling wave solutions of parabolic equations, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1979.

[Has] Hastings, S. P., Some mathematical problems from neurobiology, *Amer. Math. Monthly*, 82(1975), 881—895.

[Hen] Henry, D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture Notes in Mathematics, volume 840, Springer, 1981.

[Her] Hernandez, J., Some existence and stability results for solutions of reaction-diffusion systems with nonlinear boundary conditions, Nonlinear Differential Equations: Invariance, Stability, and Bifurcation, Edited by P. de Mottoni and L. Salvadori, 161—173, Academic Press, 1981.

[Hes] Hess, P., On multiple positive solutions of nonlinear ellipticeigenvalue problems, *Comm. Partial Differential Equations*, 6(1981), 951—961.

[HR] Hadeler, K. P. and F. Rothe, Travelling fronts in nonlinear diffusion equations, *J. Math. Biol.*, 2(1975), 251—263.

[Ka] Kanel, Ya, I., On the stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations arising in the theory of combustion, *Math. USSR-Sb*, 59(1962), 245—288.

[KT] Klaasen, G. and W. Troy, The stability of travelling front solutions of reaction-diffusion systems, to appear in *J. Differential Equations*.

[Lem] Lemmert, R., Uber die invarianz konvexer teilmengen eines nomierten raumes in bezug auf elliptisch differentialgleichungen, *Comm. Partial Differential Equations*, 3(1978), 297—318.

[Lia] Liang Jin, Reaction-diffusion systems without monotone conditions, *Advances in Mathematics*, 14(1985), 73—75.

[Lin] 林源渠
1. 反应扩散方程的非常数平衡解,将发表于应用数学学报.
2. 椭圆型方程的正解分歧,将发表于北京大学学报(自然科学版).

[Lio] Lions, P. L., On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *SIAM Review*, 24(1982), 441—467.

[LiZ] 李正元
1. 扩散反应方程的控制方程及其应用,北京大学学报(自然科学版),1984年第4期,13—26.
2. 互助-竞争型扩散反应方程解的渐近性质,应用数学学报,7(1984),437—

[LQ] 李正元、钱敏，向量场的旋转度理论及其应用，北京大学出版社，1982.

[LSU] Ladyzhenskaya, O. A., V. A. Solonnikov and N. N. Ural' ceva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, AMS Translations of Mathematical Monographs, volume 23(1968).

[Mar] Martin, R. H., Asymptotic stability and critical points for nonlinear quasi-monotone parabolic systems, *J. Differential Equations*, 30(1978), 391—432.

[MMic] Miller, R. K., and A. N. Michel, Ordinary Differential Equations, Academic Press, 1982.

[MMit] Manoranjan, V. S. and A. R. Mitchell, A numerical study of the Belousov-Zhabotinskii reaction using Galerkin finite element methods, *J. Math. Biol.*, 16(1983), 251—260.

[OR] Osher, S. and J. Ralston, L^1 stability of travelling waves with applications to convective porous media flow, *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(1982), 737—749.

[Pao] Pao, C. V.

1. Nonexistence of global solutions and bifurcation analysis for a boundary-value problem of parabolic type, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65(1977), 245—251.

2. Asymptotic stability and nonexistence of global solutions for a semilinear equations, *Pacific J. Math.*, 84(1979), 191—197.

3. On the blow-up behavior of solutions for a parabolic boundary value problem, *Applicable Anal.*, 10(1980), 5—13.

4. On nonlinear reaction-diffusion systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 87(1982), 165—198.

[Paz] Pazy, A., Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.

[PW] Protter, M. H. and H. F. Weinberger, Maximum Principles in differential equations, Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1967 (中译本：叶其孝等译，微分方程的最大值原理，科学出版社，1985).

[Ra] Rabinowitz P. H.

1. Pairs of positive solutions of nonlinear elliptic partial differential equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 23(1973), 173—186.

2. Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.*, 7(1971), 487—513.

[RW] Redheffer, R. and W. Walter

1. Invariant sets for systems of partial differential equations I, parabolic equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 67(1978), 41—52.

2. Invariant sets for systems of partial differential equations II, first-order and elliptic euqations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 73(1980), 19—29.

[Sa] Sattinger, D. H.

1. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.*, 11(1972), 979—1000.

2. Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Notes in Mathematics, volume 309, Springer, 1973.

[Sm] Smoller, J., Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer, 1983.

[SW] Smoller, J. and A. Wasserman

1. Global bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, 39(1981), 269—290.

2. Generic bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, 52(1984), 432—438.

[Ty] Tyson, J. J., The Belousov-Zhabotinskii reaction, Lecture Note in Biomathematics, volume 10, Springer, 1976.

[Uc] Uchiyama, K., The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time, *J. Math. Kyoto Univ.*, 18(1978), 453—508.

[We] Weinberger, H. F., Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems, *Rendiconti di Matematica, Serie VI*, 8(1975), 295—310.

[XSX] Xiao, L., Y. Su and Z. P. Xin, On the asymptotic behavior of solutions of a reaction-diffusion system: a two predator-one prey model, to appear.

[Yan] Yang, Z. P. On a reaction diffusion system of compeling predators, to appear.

[Ye] 叶其孝,反应扩散方程简介,数学的实践与认识,1984年第2期,48—56.

[YW] Ye, Q. X. and M. X. Wang, Travelling wave front Solutions of Noyes-Field system for Belousov-Zhabotinskii reaction, to appear.

[Zh] 张锦炎,常微分方程几何理论与分支问题,北京大学出版社,1981.

[ZhQ] Zhang Q., Equilibria of initial-boundary value problem for $u_t = (u^m)_{xx} + (a - x^n)u$, to appear.



现代数学基础丛书

